全国大学生数学竞赛丛书

全国大学生数学竞赛 CMC

全国大学生数学竞赛
解析教程

（非数学专业类）
（上册）

佘志坤　主编

全国大学生数学竞赛命题组　编

科学出版社

目 录(上册)

第1章 极限、函数与连续

在大学生数学竞赛中, 无论是极限理论还是极限方法都占有十分突出的地位. 一方面, 连续、导数、积分和级数收敛等概念都以极限为基础; 另一方面, 极限作为一种工具, 它的计算几乎贯穿高等数学的全部内容. 因此, 怎样求极限是一个既重要又基本的问题, 除了要能灵活运用极限四则运算法则、极限与无穷小的关系、无穷小的性质以及初等函数的连续性之外, 还必须掌握一些方法与技巧.

本章首先重点讨论计算极限的方法与技巧, 然后再阐述函数及其连续性、闭区间上连续函数性质的运用.

1.1 竞赛要点与难点

(1) 函数的概念及表示法, 简单应用问题的函数关系的建立;

(2) 函数的性质: 有界性、单调性、周期性和奇偶性;

(3) 复合函数、反函数、分段函数和隐函数、基本初等函数的性质及其图形、初等函数;

(4) 数列极限与函数极限的定义及其性质、函数的左极限和右极限;

(5) 无穷小和无穷大的概念及其关系、无穷小的性质及无穷小的比较;

(6) 极限的四则运算、极限存在的单调有界准则和夹逼准则、两个重要极限;

(7) 函数的连续性 (含左连续性与右连续性)、函数间断点的类型;

(8) 连续函数的性质和初等函数的连续性;

(9) 闭区间上连续函数的性质 (有界性定理、最大值与最小值定理、介值定理).

1.2 范例解析与精讲

题型一、函数极限

函数的极限, 根据自变量的变化趋势可以分为 6 种不同的情形:

(1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$; (2) $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$; (3) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$;

(4) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$; (5) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; (6) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$,

其中 (1), (4) 两种形式是基本的.

如果根据函数值的变化情形来分类, 那么函数的极限又可以分为不定式与非不定式两种类型. 不定式一共有 7 种类型: $\dfrac{0}{0},\dfrac{\infty}{\infty},\infty-\infty,0\cdot\infty,1^{\infty},0^0,\infty^0$. 由于求非不定式的极限远比确定不定式极限的值要简单得多, 因此, 我们重点讨论求不定式极限的方法与技巧.

求函数极限的典型方法:

(1) 利用基本极限;

(2) 利用无穷小替换;

(3) 利用 L' Hospital (洛必达) 法则;

(4) 利用 Taylor (泰勒) 公式;

(5) 利用导数的定义.

1. 利用基本极限

利用基本极限, 特别是两个重要极限: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1, \lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$, 并结合代数或三角函数恒等变形, 以及变量代换等技巧, 可解决许多极限问题.

【例 1.1】 求极限 $I=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{x^3+\tan^2 x}$.

【分析】 利用恒等式: $a^n-b^n=(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}\right)$, 极限运算法则及基本极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$ 与 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}=1$.

解

$$\begin{aligned}I&=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{\cos x}}{x+\left(\dfrac{\tan x}{x}\right)^2}\cdot\frac{\sqrt[6]{\cos x}-1}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt[6]{\cos x}-1}{x^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{x^2}\cdot\frac{1}{\sqrt[6]{\cos^5 x}+\sqrt[6]{\cos^4 x}+\cdots+1}\\&=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=-\frac{1}{12}.\end{aligned}$$

熟知的一些基本极限当然也能用于求数列的极限, 如下例所示.

【例 1.2】 设实数列 $\{a_n\}$ 满足 $|a_0|<1, a_n=\sqrt{\dfrac{1+a_{n-1}}{2}}, n=1,2,\cdots$. 求

$$\lim_{n\to\infty}4^n\left(1-a_n\right).$$

解 令 $x=\arccos a_0$, 则 $\cos x=a_0, -\pi<x<\pi$, 且 $x\neq0$. 利用归纳法易证

$$a_n=\cos\frac{x}{2^n},\quad n=0,1,2,\cdots.$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}4^n\left(1-a_n\right)=\lim_{n\to\infty}4^n\left(1-\cos\frac{x}{2^n}\right)=\frac{x^2}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\dfrac{x}{2^{n+1}}}{\dfrac{x}{2^{n+1}}}\right)^2=\frac{x^2}{2}.$$

【例 1.3】 设 $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{\sin\dfrac{(2k-1)\pi}{2n}}{\cos^2\dfrac{(k-1)\pi}{2n}\cos^2\dfrac{k\pi}{2n}}, n=1,2,\cdots$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n^3}$. (Putnam (普特南) 数学竞赛试题, 2019 B2)

解 利用三角公式, 得

$$\begin{aligned}a_n\sin\frac{\pi}{2n}&=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{4\sin\dfrac{(2k-1)\pi}{2n}\sin\dfrac{\pi}{2n}}{\left(1+\cos\dfrac{k-1}{n}\pi\right)\left(1+\cos\dfrac{k}{n}\pi\right)}\\&=2\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\cos\dfrac{k-1}{n}\pi-\cos\dfrac{k}{n}\pi}{\left(1+\cos\dfrac{k-1}{n}\pi\right)\left(1+\cos\dfrac{k}{n}\pi\right)}\\&=2\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{1+\cos\dfrac{k}{n}\pi}-\frac{1}{1+\cos\dfrac{k-1}{n}\pi}\right)\\&=\frac{2}{1+\cos\dfrac{n-1}{n}\pi}-1=\cot^2\frac{\pi}{2n},\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^3}=\lim_{n\to\infty}\frac{8}{\pi^3}\left(\frac{\dfrac{\pi}{2n}}{\sin\dfrac{\pi}{2n}}\right)^3\cos^2\frac{\pi}{2n}=\frac{8}{\pi^3}.$$

2. 利用无穷小替换

法则 设 α,β 与 α',β' 都是在同一个自变量的变化过程中的无穷小, 而 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}$ 与 $\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 也是在这个变化过程中的极限. 如果 $\alpha\sim\alpha',\beta\sim\beta'$, 且 $\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在, 则

$$\lim\frac{\beta}{\alpha}=\lim\frac{\beta'}{\alpha'}.$$

这个法则告诉我们, 如果在计算 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}$ 较困难时, 可以设法寻求分别与 α,β 等价的无穷小 α',β' 来替换 α,β, 把 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}$ 的计算转化为 $\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 的计算.

【例 1.4】 求极限: $I=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt[n]{(x+a_1)(x+a_2)\cdots(x+a_n)}-x\right]$.

解 因为当 $x\to0$ 时, 有 $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$, 所以

$$\begin{aligned}I&=\lim_{x\to+\infty}x\left[\sqrt[n]{\left(1+\frac{a_1}{x}\right)\left(1+\frac{a_2}{x}\right)\cdots\left(1+\frac{a_n}{x}\right)}-1\right]\\&=\lim_{x\to+\infty}x\left[\sqrt[n]{1+\left(\left(1+\frac{a_1}{x}\right)\left(1+\frac{a_2}{x}\right)\cdots\left(1+\frac{a_n}{x}\right)-1\right)}-1\right]\\&=\lim_{x\to+\infty}x\cdot\frac{1}{n}\left[\left(1+\frac{a_1}{x}\right)\left(1+\frac{a_2}{x}\right)\cdots\left(1+\frac{a_n}{x}\right)-1\right].\end{aligned}$$

注意到

$$\left(1+\frac{a_1}{x}\right)\left(1+\frac{a_2}{x}\right)\cdots\left(1+\frac{a_n}{x}\right)=1+\frac{1}{x}\sum_{k=1}^{n}a_k+\frac{b_2}{x^2}+\cdots+\frac{b_n}{x^n},$$

其中 $b_2,\cdots,b_n$ 为常数, 于是

$$I=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{n}\left(\frac{1}{x}\sum_{k=1}^{n}a_k+\frac{b_2}{x^2}+\cdots+\frac{b_n}{x^n}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k.$$

无穷小替换法如果运用恰当, 能大大简化不定式极限的计算. 为了能得心应手地利用无穷小替换法求极限, 掌握一些常用的等价无穷小是必要的.

常用的等价无穷小 (当 $x\to 0$ 时) 有

(1) $\sin x\sim x$; (2) $\arcsin x\sim x$; (3) $\tan x\sim x$;

(4) $1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$; (5) $\arctan x\sim x$; (6) $\ln(1+x)\sim x$;

(7) $\mathrm{e}^x-1\sim x$; (8) $a^x-1\sim x\ln a\ (a>0)$;

(9) $(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$ (α 为任意实数).

在利用无穷小替换法时, 还应考虑综合利用其他方法, 如 L'Hospital 法则、重要极限等.

【例 1.5】 求极限 $I=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x+x\sin 2x)}{\mathrm{e}^{x^2}-\sqrt[3]{1-x^2}}$.

解

$$I=\lim_{x\to 0}\frac{\ln[1+(\cos x-1)+x\sin 2x]}{\mathrm{e}^{x^2}-\sqrt[3]{1-x^2}}=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos x-1)+x\sin 2x}{\mathrm{e}^{x^2}-\sqrt[3]{1-x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\cos x-1}{x^2}+2\dfrac{\sin 2x}{2x}}{\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}-1}{x^2}+\dfrac{\sqrt[3]{1-x^2}-1}{-x^2}}=\frac{-\dfrac{1}{2}+2}{1+\dfrac{1}{3}}=\frac{9}{8}.$$

值得注意的是, 如果所求极限中分子 (或者分母) 是代数和的形式, 那么在做部分替换时, 应考虑替换前后分子 (或者分母) 在整体上的等价性. 这是因为: 尽管 $\alpha\sim\alpha'$ 且 $\beta\sim\beta'$, 但是 $\alpha+\beta$ 与 $\alpha'+\beta'$ 却未必等价.

例如, 当 $x\to 0$ 时, 虽然 $\tan x\sim x$ 且 $\sin x\sim x$, 但是 $\tan x-\sin x$ 与 $x-x=0$ 并不等价. 因此, 在求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$ 时, 就不能把分子中的 $\tan x$ 和 $\sin x$ 都用 x 替换. 一个有效的解法为

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\tan x(1-\cos x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\dfrac{1}{2}x^2}{x^3}=\frac{1}{2}.$$

3. 利用 L'Hospital 法则

L'Hospital 法则 如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 满足

全国大学生数学竞赛丛书

CMC

全国大学生数学竞赛

解析教程

（非数学专业类）

（下册）

佘志坤　主编

全国大学生数学竞赛命题组　编

科学出版社

目 录(下册)

第5章　向量代数与空间解析几何

空间解析几何是在建立空间直角坐标系的基础上，用代数方法来研究和解决空间几何问题的一门学科，主要包括向量代数、空间直线与平面，以及二次曲面等内容，为进一步研究多元函数及其微积分学做必要的准备.

本章着重讨论向量代数、空间直线与平面的解题方法，并简要讨论曲面及其方程.

5.1　竞赛要点与难点

(1) 向量的概念、向量的线性运算、向量的数量积和向量积、向量的混合积；

(2) 两个向量垂直、平行的条件，两个向量的夹角；

(3) 向量的坐标表达式及其运算、单位向量、方向数与方向余弦；

(4) 曲面方程和空间曲线方程的概念、平面方程、直线方程；

(5) 平面与平面、平面与直线、直线与直线的夹角以及平行、垂直的条件、点到平面和点到直线的距离；

(6) 球面、母线平行于坐标轴的柱面、旋转轴为坐标轴的旋转曲面的方程、常用的二次曲面方程及其图形；

(7) 空间曲线的参数方程和一般方程、空间曲线在坐标面上的投影曲线方程.

5.2　范例解析与精讲

题型一、向量代数

向量运算，包括向量的模、向量的投影、向量与数的乘法、向量的加减法、数量积、向量积以及混合积等，除了应熟悉各种运算的定义、运算律与坐标表达式之外，还要理解相应的几何意义.

常见的题型有三类:

(1) 向量的基本运算;

(2) 证明恒等式或简化算式;

(3) 利用向量方法求解几何问题.

1. 向量的基本运算

【例 5.1】　设单位向量 $\overrightarrow{OA}$ 和 $\overrightarrow{OB}$ 的夹角为 $\theta\,(0<\theta<2\pi)$, a,b 是正常数. 求

$$l=\lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\theta^2}(|a\cdot\overrightarrow{OA}|+|b\cdot\overrightarrow{OB}|-|a\cdot\overrightarrow{OA}+b\cdot\overrightarrow{OB}|).$$

解 由题设以及向量加法的几何意义, 有

$$|a\cdot\overrightarrow{OA}+b\cdot\overrightarrow{OB}|^2=a^2+b^2-2ab\cos(\pi-\theta)=a^2+b^2+2ab\cos\theta.$$

故

$$\begin{aligned}l&=\lim_{\theta\to0}\frac{(a+b)^2-|a\cdot\overrightarrow{OA}+b\cdot\overrightarrow{OB}|^2}{\theta^2(a+b+|a\cdot\overrightarrow{OA}+b\cdot\overrightarrow{OB}|)}\\&=\lim_{\theta\to0}\frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\cdot\frac{2ab}{a+b+|a\cdot\overrightarrow{OA}+b\cdot\overrightarrow{OB}|}=\frac{ab}{2(a+b)}.\end{aligned}$$

【例 5.2】 设向量 $\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}-5\boldsymbol{k},\boldsymbol{b}=3\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$.

(1) 求向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦.

(2) 求向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影.

(3) 求向量 $\boldsymbol{c}$, 使得 $|\boldsymbol{c}|=\sqrt{3}$, 且由 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 三向量所张成的平行六面体的体积最大.

解 (1) 因为 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{2^2+3^2+(-5)^2}=\sqrt{38}$, 所以

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\left(\frac{2}{\sqrt{38}},\frac{3}{\sqrt{38}},-\frac{5}{\sqrt{38}}\right),$$

即向量 $\boldsymbol{a}$ 的方向余弦为 $\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{38}},\cos\beta=\dfrac{3}{\sqrt{38}},\cos\gamma=-\dfrac{5}{\sqrt{38}}$.

(2) 因为 $|\boldsymbol{b}|=\sqrt{3^2+(-4)^2+1^2}=\sqrt{26},\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\times3+3\times(-4)+(-5)\times1=-11$, 所以

$$\mathrm{Prj}_{\boldsymbol{b}}\,\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=-\frac{11}{\sqrt{26}}.$$

(3) 易知, 当且仅当向量 $\boldsymbol{c}$ 垂直于向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 所在的平面时, 由 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 三向量所张成的平行六面体的体积最大, 此时有 $\boldsymbol{c}$ 平行于 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$. 故可设 $\boldsymbol{c}=\lambda(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$. 而

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\2&3&-5\\3&-4&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&-5\\-4&1\end{vmatrix}\boldsymbol{i}-\begin{vmatrix}2&-5\\3&1\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}2&3\\3&-4\end{vmatrix}\boldsymbol{k}\\&=-17\boldsymbol{i}-17\boldsymbol{j}-17\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

所以

$$\boldsymbol{c}=\lambda(-17\boldsymbol{i}-17\boldsymbol{j}-17\boldsymbol{k})=-17\lambda\boldsymbol{i}-17\lambda\boldsymbol{j}-17\lambda\boldsymbol{k}.$$

由 $|\boldsymbol{c}|=\sqrt{3}$, 可解得 $\lambda=\pm\dfrac{1}{17}$. 故 $\boldsymbol{c}=\pm\dfrac{1}{17}(-17\boldsymbol{i}-17\boldsymbol{j}-17\boldsymbol{k})=\mp(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$.

2. 证明恒等式或简化算式

可采用的方法有

(1) 利用向量运算的定义;

(2) 利用向量的运算性质;

(3) 利用向量运算的坐标表达式.

【例 5.3】　证明: 对任意的向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$, 有

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a},$$

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}.$$

证　先证第一个等式. 设 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3),\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3),\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,c_3)$, 则

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1).$$

再设 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(d_1,d_2,d_3)$, 则

$$\begin{aligned}d_1&=(a_3b_1-a_1b_3)c_3-(a_1b_2-a_2b_1)c_2\\&=(a_2c_2+a_3c_3)b_1-(b_2c_2+b_3c_3)a_1\\&=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}-a_1c_1)b_1-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}-b_1c_1)a_1\\&=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})b_1-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})a_1.\end{aligned}$$

同理可得 $d_2=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})b_2-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})a_2,d_3=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})b_3-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})a_3$. 所以

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}.$$

利用已证得的等式, 以及数量积的反对称性, 即得到第二个等式:

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=-(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}.$$

【例 5.4】(Lagrange 恒等式)　证明: 对任意四个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{d}$, 有

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}&\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d}\\\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}&\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d}\end{vmatrix}.$$

证　利用二重向量积公式 (例 5.3), 得

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})&=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})\\&=[(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})\times\boldsymbol{a}]\cdot\boldsymbol{b}=[(\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{d}-(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{c}]\cdot\boldsymbol{b}\\&=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\end{aligned}$$