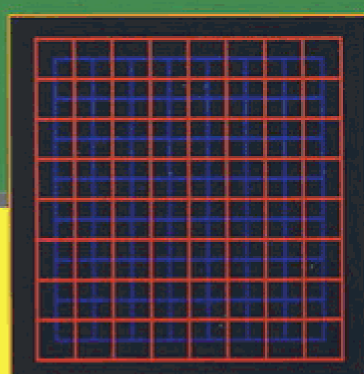
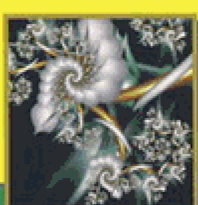
中学数学拓展丛书

数学思想领悟

Shuxue Sixiang Lingwu

沈文选　杨清桃　编著





哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

● 中学数学拓展丛书

本丛书是湖南省教育厅科研课题《教育数学的研究》（编号06C510）成果之一

数学思想领悟

SHUXUE SIXIANG LINGWU

沈文选　杨清桃　编著

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 提 要

本书共分五章。第一章数学思想概述；第二章两大“基石”思想；第三章两大“支柱”思想；第四章两大“主梁”思想；第五章数学思想的运用与领悟。本书可作为高等师范院校教育学院、教师进修学院数学专业及国家级、省级中学数学骨干教师培训班的教材或教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

数学思想领悟/沈文选，杨清桃编著．—哈尔滨：哈尔滨工业大学出版社，2008.1

(中学数学拓展丛书；2)

ISBN 978-7-5603-2637-5

Ⅰ．数…　Ⅱ．①沈…②杨…　Ⅲ．数学课-中学-教学参考资料　Ⅳ．G633.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 190746 号

策划编辑　刘培杰
责任编辑　康云霞
封面设计　卞秉利
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　黑龙江省教育厅印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 20.25　字数 485 千字
版　　次　2008 年 1 月第 1 版　2008 年 1 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-2637-5
印　　数　1～4 000 册
定　　价　38.00 元

⊙序

我和沈文选教授有过合作，彼此相熟。不久前，他发来一套数学普及读物的丛书目录，包括数学眼光、数学思想、数学应用、数学模型、数学方法、数学史话等，洋洋大观。从论述的数学课题来看，该丛书的视角新颖，内容充实，思想深刻，在数学科普出版物中当属上乘之作。

阅读之余，忽然觉得公众对数学的认识很不相同，有些甚至是彼此矛盾的。例如：

一方面，数学是学校的主要基础课，从小学到高中，12 年都有数学；另一方面，许多名人在说"自己数学很差"的时候，似乎理直气壮，连脸也不红，好像在宣示：数学不好，照样出名。

一方面，说数学是科学的女王，"大哉数学之为用"，数学无处不在，数学是人类文明的火车头；另一方面，许多学生说数学没用，一辈子也碰不到一个函数，解不了一个方程，连相声也在讽刺"一边向水池注水，一边放水"的算术题是瞎折腾。

一方面，说"数学好玩"，数学具有和谐美、对称美、奇异美，歌颂数学家的"美丽的心灵"；另一方面，许多人又说，数学枯燥、抽象、难学，看见数学就头疼。

数学，我怎样才能走近你，欣赏你，拥抱你？说起来也很简单，就是不要仅仅埋头做题，要多多品味数学的奥秘，理解数学的智慧，抛却过分的功利，当你把数学当做一种文化来看待的时候，数学就在你心中了。

我把学习数学比做登山，一步步地爬，很累，很苦。但是如果你能欣赏山林的风景，那么登山就是一种乐趣了。

登山有三种意境。

首先是初识阶段。走入山林，爬得微微出汗，坐拥山色风光。体会"明月松间照，清泉石上流"的意境。当你会做算术，会

记账，能够应付日常生活中的数学的时候，你会享受数学给你带来的便捷，感受到好似饮用清泉那样的愉悦。

其次是理解阶段。爬到山腰，大汗淋漓，歇足小坐。环顾四周，云雾环绕，满目苍翠，心旷神怡。正如苏轼名句："横看成岭侧成峰，远近高低各不同；不识庐山真面目，只缘身在此山中。"数学理解到一定程度，你会感觉到数学的博大精深，数学思维的缜密周全，数学的简捷之美，使你对符号运算能够有爱不释手的感受。不过，理解了，还不能创造。"采药山中去，云深不知处。"对于数学的伟大，还莫测高深。

第三则是登顶阶段。攀岩涉水，越过艰难险阻，到达顶峰的时候，终于出现了"会当凌绝顶，一览众山小"的局面。这时，一切疲乏劳顿、危难困苦，全都抛到九霄云外。"雄关漫道真如铁"，欣赏数学之美，是需要代价的。当你破解了一道数学难题，"蓦然回首，那人却在灯火阑珊处"的意境，是语言无法形容的快乐。

好了，说了这些，还是回到沈文选先生的丛书。如果你能静心阅读，它会帮助你一步步攀登数学的高山，领略数学的美景，最终登上数学的顶峰。于是劳顿着，但快乐着。

信手写来，权作为序。

张奠宙
2007 年 11 月 13 日
于沪上苏州河边

附　　文

（文选先生编著的丛书，是一种对数学的欣赏。因此，再次想起数学思想往往和文学意境相通，年初曾在《文汇报》发表一短文，附录于此，算是一种呼应）

数学和诗词的意境

张奠宙

数学和诗词，历来有许多可供谈助的材料。例如：

一去二三里，烟村四五家；
楼台七八座，八九十支花。

把十个数字嵌进诗里，读来琅琅上口。郑板桥也有咏雪诗：

一片二片三四片，五片六片七八片；
千片万片无数片，飞入梅花总不见。

诗句抒发了诗人对漫天雪舞的感受。不过，以上两诗中尽管嵌入了数字，却实在和数学没有什么关系。

数学和诗词的内在联系，在于意境。李白《送孟浩然之广陵》诗云：

故人西辞黄鹤楼，烟花三月下扬州。

孤帆远影碧空尽，唯见长江天际流。

数学名家徐利治先生在讲极限的时候，总要引用"孤帆远影碧空尽"这一句，让大家体会一个变量趋向于0的动态意境，煞是传神。

近日与友人谈几何，不禁联想到初唐诗人陈子昂《登幽州台歌》中的名句：

前不见古人，后不见来者；

念天地之悠悠，独怆然而涕下。

一般的语文解释说：上两句俯仰古今，写出时间绵长；第三句登楼眺望，写出空间辽阔；在广阔无垠的背景中，第四句描绘了诗人孤单寂寞悲哀苦闷的情绪，两相映照，分外动人。然而，从数学上看来，这是一首阐发时间和空间感知的佳句。前两句表示时间可以看成是一条直线（一维空间）。陈老先生以自己为原点，前不见古人指时间可以延伸到负无穷大，后不见来者则意味着未来的时间是正无穷大。后两句则描写三维的现实空间：天是平面，地是平面，悠悠地张成三维的立体几何环境。全诗将时间和空间放在一起思考，感到自然之伟大，产生了敬畏之心，以至怆然涕下。这样的意境，数学家和文学家是可以彼此相通的。进一步说，爱因斯坦的四维时空学说，也能和此诗的意境相衔接。

贵州六盘水师专的杨老师告诉我他的一则经验。他在微积分教学中讲到无界变量时，用了宋朝叶绍翁《游园不值》中的诗句：

满园春色关不住，一枝红杏出墙来。

学生每每会意而笑。实际上，无界变量是说，无论你设置怎样大的正数 M，变量总要超出你的范围，即有一个变量的绝对值会超过 M。于是，M 可以比喻成无论怎样大的园子，变量相当于红杏，结果是总有一枝红杏越出园子的范围。诗的比喻如此恰切，其意境把枯燥的数学语言形象化了。

数学研究和学习需要解题，而解题过程需要反复思索，终于在某一时刻出现顿悟。例如，做一道几何题，百思不得其解，突然添了一条补助线，问题豁然开朗，欣喜万分。这样的意境，想起了王国维用辛弃疾的词来描述的意境："众里寻它千百度，蓦然回首，那人却在灯火阑珊处。"一个学生，如果没有经历过这样的意境，数学大概是学不好的了。

⊙前言

音乐能激发或抚慰情怀，绘画使人赏心悦目，诗歌能动人心弦，哲学使人获得智慧，科技可以改善物质生活，但数学却能提供以上的一切。

——Klein

数学是一个思想领域，它为我们提供了有关清晰、精确思维的必要和明确的知识。

——R. D. Cannichael

数学研究极大地开阔了人类思想的地平线，并且在某种程度上帮助人们理解自然界和物理世界。

——Jawahar Lal Nehru

人们喜爱音乐，因为它不仅有神奇的乐谱，而且有悦耳的优美旋律！

人们喜爱画卷，因为它不仅描绘出自然界的壮丽，而且可以描绘人间美景！

人们喜爱诗歌，因为它不仅是字词的巧妙组合，而且有抒发情怀的韵律！

人们喜爱哲学，因为它不仅是自然科学与社会科学的浓缩，而且使人更加聪明！

人们喜爱科技，因为它不仅是一个伟大的使者或桥梁，而且是现代物质文明的标志！

而数学之为德，数学之为用，难以用旋律、美景、韵律、聪明、标志等词语来表达！

你看，不是吗？

数学眼光，使我们看到世间万物充满着带有数学印记的奇妙的科学规律，看到各类书籍和文章的字里行间有着数学的踪迹，看到满眼绚丽多彩的数学景象！

数学思想，使我们领悟到数学是用字母和符号谱写的高亢歌曲，似协奏曲一样充满着和谐的旋律，让人难以忘怀，难以割舍！

数学应用，给我们展示出了数学的神通广大，在各个领域与角落闪烁着人类智慧的火花！

数学建模，呈现出了人类文明亮丽的风景！特别是那呈现出的抽象彩虹——一个个精巧的数学模型，璀璨夺目，流光溢彩！

数学方法，像画卷一样描绘着各学科的异草奇葩般的景色，令人目不暇接！

数学史话，充满了诗人的前辈们的创造或再创造的心血机智，使人获得明智的丰富营养！

因此，我们可以说，你可以不信仰上帝，但不能不信仰数学。

从而，提高我国每一个公民的数学文化水平及数学素养，是提高我国各个民族整体素质的重要组成部分，这也是数学基础教育中的重要目标。为此，笔者构思了这套丛书。

这套丛书是笔者学习张景中院士的数学教育思想，对一些数学素材和数学研究成果进行再创造并以此为指导思想来撰写的；是献给中学师生，企图为他们扩展数学视野、提高数学素养以响应张奠宙教授的倡仪；建构符合时代需求的数学常识，享受充满数学智慧的精彩人生的书籍。

不积小流无以成江河，不积跬步无以至千里，没有积累便没有丰富的素材，没有整合创新便没有鲜明的特色。这套丛书的写作，是笔者在多年资料的收集、学习笔记的整理及笔者已发表的文章的修改并整合的基础上完成的。因此，每册书末都列出了尽可能多的参考文献，在此，忠心感谢这些文献的作者。

这套丛书，作者试图以专题的形式，对中、小学中典型的数学问题进行广搜深掘来串联，并以此为线索来写作的。因而，形成了这六册书。

本册是《数学思想领悟》。

数学思想，是数学内容的精髓，是知识转化为能力的桥梁。它使学习者在处理数学问题时又思又想：由思激疑，在思疑中启悟；由想反思，在思辩中省悟；由思导验，在体验中领悟。认识在启悟中升华，思维在省悟中开拓，能力在领悟中形成。数学思想的深刻领悟，是一种高尚的数学享受，是有益心智的精神漫步！

数学思想，是数学知识中闪光的珍珠，是数学花坛中灿烂的花朵，它使人领悟到数学的真谛，懂得数学的价值，学会用数学的思维解决问题，它能把数学知识的学习和数学能力的培养和人的智力发展有机地联系起来！

数学思想，是铭记在人们头脑中起永恒作用的精神和态度，它能使人思维敏捷，表达清楚，工作有条理，善于处世和做事，实事求是，锲而不舍，使人得到文化方面的修养，更好地理解、领略和创造现代社会的文明！

数学思想，是数学学习者前进道路上的路标和灯塔，它使数学学习者能在寒冬耐心地等待，在暖春活泼地开放，在盛夏默默地成长，在金秋喜悦地收获！

由于数学思想是数学内容的进一步提炼和概括，它所涉及的面又宽又广，它所渗透的体又厚又大，因此，作者提出了作为数学思想的奠基性或总括性成分的基本数学思想观点，以

及基本数学思想是由两大“基石”、两大“支柱”、两大“主梁”思想等三大块有机组成的探讨，以企图给数学思想构建一种理论体系。

又由于数学思想是以数学内容为载体的对数学内容的一种本质认识，是一种隐性的知识，学习者要领悟、理解、掌握并运用数学思想，就需要通过精心设计的内容与范例学习，需要通过反复体验才能有所收获。本册书就是在这种思想指导下完成的，并把作者在山西学习报上连载的百余篇文章进行整理而成有关章节的内容。

让我们领悟数学思想！让我们用数学思想领悟吧！

沈文选

2007 年 11 月于岳麓山下

目录
CONTENTS

第一章 数学思想概述

第二章 两大“基石”思想

第三章 两大“支柱”思想

目录 CONTENTS

第四章 两大"主梁"思想

第五章 数学思想的运用与领悟

目录
CONTENTS

目录 CONTENTS

目录
CONTENTS

目录 CONTENTS

第一章　数学思想概述

随着各门科学抽象化、数字化水平的日益提高，以及数学本身由于集合论与结构思想的发展而日益走向整体化，对精髓性、灯塔性、普遍性的数学思想的高度重视、研究及教学探讨，已成为历史的必然和时代的要求，成为数学教育现代化进程中的一个重要课题.

1.1　对数学思想重要性的认识渐趋深刻

国际数学教育界关于基础数学教育（中、小学数学教育）现代化的问题，曾进行了多种实验研究，提出过种种设想方案，许多人基本上倾向如下观点：数学教育的现代化，并不只是要进行“现代数学的教学”，而是要进行“数学的现代教学”，要把基础数学教育“建立在现代数学的思想基础上，并使用现代数学的方法和语言”.

我们的教学实践也表明：中小学数学教育的现代化，主要不是内容的现代化，而是数学思想、方法及教学手段的现代化，加强数学思想方面的教学是基础数学教育现代化的关键.特别是对能力培养这一问题的探讨与摸索，以及社会对数学价值的要求，使我们更进一步地认识到数学思想的重要性.

1.1.1　经验的总结

随着教育理论的研究和教育实践深入进行，广大数学教育工作者对数学思想的认识也渐趋深刻.

众所周知，知识是人们在改造世界的实践中获得的认识和经验的总结，它是人类文化的核心内容.在数学学科中，概念、法则、性质、公式、公理、定理等显然属于知识的范围，这些知识要素也都有其本身的内容.长期以来，人们一直思考着：这丰富多彩的数学内容反映了哪些共同的、带有本质性的东西呢？历史的车轮碾出了人们所需要的答案，这就是数学思想.人们逐渐认识到，数学思想是数学知识中奠基性的成分，是使人们获得概念、法则、性质、公式、公理、定理等必不可少的基础，它是人类文化的重要组成部分，是数学文化的核心内容，它作为数学知识内容的精髓，是铭记在人们头脑中起永恒作用的精神与态度.

例如，自1949年以来，我国的数学教育经历了10个教学大纲到数学课程标准的指导，这些纲领性文献对数学思想重要性的认识就是一个从低到高的过程.特别是在数学课程标准中，并列地提出了要求学生掌握数学的基础知识、基本技能、基本思想，充分体现了数学教育工作者对于数学课程发展的一些共识，对数学思想的重要性的共识.

1.1.2　现实的需要

(1) 形势发展的需要

时代的前进依赖于科技的发展，现代科技日新月异，促进着社会主义市场经济的迅猛发

展，现代科技及经济发展成熟的标志是数学化．例如，市场经济中的经济统计学、金融学等领域就急需数学的支撑．在探索科技与经济发展的过程中，当然需要某些具体的数学知识，但更多的是数学思想与方法的运用，以便从数学的角度去思考周围的实际问题，建立数学模型，从而预测出事业发展的前景，决策下一步的行动，……，可以说时代的发展，越来越依赖于数学思想这方面的作用．

(2) 教育目的的需要

我国的教育面临着重大改革任务，由升学教育向素质教育转轨是重大改革任务之一．

进入新世纪，社会对人的要求越来越高．要求学校教育强调人的全面发展．如果"人的全面发展"是教育方针中所指的"德、智、体"等方面的全面发展，那么素质教育就是"全面发展"这一教育方针的一种教育模式或教育体系．正是由于数学思想这方面的重要作用使得数学教育在素质教育中具有特殊的地位．数学是思维的体操这是众所周知的，数学的思想哺育着人并完善人的辩明、清晰、简约、深刻及机智、顽强等当今时代迎接挑战不可或缺的精神与品格，这也是人们普遍感觉到了的，数学已成为人们进入社会各部门、各行业的敲门砖．社会各部门、各行业对数学知识的要求的深度与广度的差异虽然是较大的，但对人的素质的要求却是共性的，如要求走向社会的人，具备严谨的工作态度，能分析情况、归纳总结、综合比较、分类评析、概括判断的工作方法．实际生产者、科研工作者，特别是决策部门工作人员更需要逻辑论证、严密推测的科学方法与工作作风．这一切都是在数学思想的熏陶、训练中得以培养的．

随着社会主义市场经济大潮的到来，股票、利息、保险、分期付款等经济方面的数学问题已日渐成为人们的常识，这迫使我们的中学教育要特别加强数学应用意识的培养，这就要求通过抽象概括、数学模型等思想的学习和训练，让学生体会到数学中的定义、概念、公式、定理等是从现实世界中经过逐步抽象概括而得到的数学模型，与现实世界有着千丝万缕的联系，并且可以反过来应用于现实世界解决各种实际问题．

数学创新意识的培养是素质教育的一个重要方面．数学创新意识主要是指，对自然界和社会中的数学现象具有好奇心，不断追求新知识，独立思考，会从数学的角度发现和提出问题，并进行探索和研究，而数学思想的灯塔性指引，使学习者在数学知识的学习中，启引好奇心、求知欲、怀疑感、自信心、独创意识，以创新为荣，释放创新激情，从知识型人才变为创新型人才．

在数学教育改革中，培养人才变考试型为素质型，并不是不要考试，社会的进步，对高层次的人才需求量会越来越大，而参加中考、高考进入高一级学校学习，至少目前仍是培养高层次人才的一条重要渠道．数学教学实践告诉我们，数学思想方面的教学，正是使学生牢固掌握基础知识、培养数学能力、"既高分、又高能"的重要举措，加强数学思想方面的教学，在进行定义、定理、法则、公式等的教学时，注意这些概念、知识的发生、发展、应用过程的揭示与解释，并将这一过程中丰富的思维训练的因素开掘出来，这有利于学生创造力的发展与培养，这是培养有创新型人才的良好手段和渠道．

1.1.3 认知的实现

学习的认知结构理论告诉我们：数学学习过程，是一个数学认知过程，其实质是一个数学认知结构的发展变化过程，这个过程是通过同化和顺应两种方式实现的，在同化和顺应过

程中，数学思想在数学认知结构中发挥着极为重要的作用.

(1) 对同化过程的分析

所谓数学学习中的同化，就是主体把新的数学学习内容纳入到自身原有的认知结构中去.这种纳入不是机械的囫囵吞枣式地摄入，而是把新的数学材料进行加工改造，使之与原数学认知结构相适应.那么，怎样加工新的数学材料才能使得它与原数学认知结构相适应呢?任意的盲目的加工能否达到这个目的呢?显然不能!这种加工要具有自觉的方向性和目的性，肯定是在某种因素的指导下进行的.在数学认知结构中，存在数学基础知识、数学思想、心理成分三种主要因素，数学基础知识显然不具备思维特点和能动性，不能指导"加工"过程的进行，就像材料本身不能自己变成产品一个道理.而心理成分只给主体提供愿望和动机，提供主体的认知特点仅凭它也不能实现"加工" 过程，就像人们只有生产愿望和生产工具而没有生产产品的设计思想和技术照样生产不出产品一样.数学思想担当起了指导"加工" 的重任，它不仅提供思维策略(设计思想)，而且还提供实施目标的具体手段(生产技术).实际上数学中的转化，就是实施新旧知识的同化.总之，数学思想对数学活动的同化过程起着重要作用.

(2) 对顺应的分析

数学学习中的顺应是指主体原有的数学认知结构不能有效地同化新的学习材料时，主体调整或改造原有的数学认知结构去适应新的学习材料.这种对原认知结构的改造也不是任意盲目地进行的.如同化过程的分析，也必然是在数学思想的指导下进行的.离开了数学思想的顺应是不可理解的，也是不可能实现的.

(3) 数学思想对数学认知结构发展的作用

通过上面的分析看到，数学思想对同化和顺应的进行，进而对认知结构的发展起重要作用.实际上，无论是同化还是顺应，都是在原数学认知结构和新的数学内容之间，改造一方去适应另一方.这种改造就是转换或化归，而转换或化归是数学家思想体系中的精髓和"主梁".数学思想产生于数学认知活动，又反回来对数学认知活动起重要作用，因此可以说数学思想是数学认知结构中最积极最活跃的因素，是认知的实现因素.

1.2 大力加强对数学思想的探讨

作为教育的数学，可以看作是双基(基础知识和基本技能) 和基本数学思想的统一体，它们相互渗透、相互支持、相互补充，交替出现，构成了中学数学极其引人入胜的丰富内涵和优美的主旋律.

在课程标准、教科书和实际教学中，常把"思想方法" 作为一个词语使用，这可以认为是从数学方法论的角度来考虑、分析问题的.例如，在解二元一次方程组时，我们常说要让学生掌握"消元" 的思想方法，事实上，当我们从科学认识论的"化未知为已知" 的角度来分析此问题时，其思想属于"化归" 的思想;当我们从"化二元为一元" 的角度来分析此问题时，其方法属于"消元法";当我们从认识解题方法的实质就是对数学形式的认识，解线性方程组的"代入公式直接求解" 也可称为"行列式法".根据这样的认识以及中学生的认识水平，在一般场合下笼统使用"思想方法" 一词是合理的，但作为科学研究，必须把"思想" 和"方法" 分开予以界定.

1.2.1 思想和数学思想

思想是客观存在反映在人的意识中经过思维活动而产生的结果.它是从大量的思维活动中获得的产物,经过反复提炼和实践,如果一再被证明为正确,就可以反复被应用到新的思维活动中,并产生出新的结果.因此,我们认为,思想就是那些颠扑不破、屡试不爽的思维产物.对于学习者来说,思想就成为他们进行思维活动的细胞和基础;思想是他们的思维活动的载体.

"思想"一词可以在不同的抽象层次上用于不同的场合.每一个概念都凝结着一定的思想,但不能因此把每个概念都冠以思想,这样将会妨碍我们在更高层次上进一步提炼出更为本质的、一般的、带有奠基性和总括性的思维产物.所谓数学思想,是指现实世界的空间形式和数量关系反映到人的意识之中,经过思维活动而产生的结果,它是对数学事实与数学理论(概念、定理、公式、法则、方法等)的本质认识.首先,数学思想比一般说的数学概念具有更高的抽象和概括水平,后者比前者更具体、更丰富,而前者比后者更本质、更深刻.其次,数学思想、数学观点、数学方法三者密不可分:如果人们站在某个位置、从某个角度并运用数学去观察和思考问题,那么这种思维产物就是数学观点.数学观点是提炼数学思想的重要途径.对于数学方法来说,思想是相应的方法的精神实质和理论基础,方法则是实施有关思想的技术手段.中学数学中出现的数学观点(例如方程观点、函数观点、统计观点、几何变换观点、向量观点等)和各种数学方法,都体现着一定的数学思想.

数学思想也可以看作是数学知识的组成部分.中学数学教学内容是由数学课本中的概念、公式、法则、性质、公理、定理、例题等表层知识以及由这些表层知识所反映出的数学思想等深层知识组成.数学思想常蕴含于表层知识之中,处于潜形态.

数学思想是数学科学的"灵魂",是数学科学赖以建立和发展的重要因素.纵观数学史,大凡有所成就的数学家,在数学思想方面都有良好的表现,他们从无数次的失败与成功中经过分析与研究,探索到了科学的思维规律,提炼出了先进的数学思想.他们对人类的奉献不仅仅是数学成就,更重要的是给后人留下从事数学研究的思想.例如,伽罗瓦之所以创立群论,罗巴切夫斯基之所以创立非欧几何,维纳之所以创立控制论,等等,主要是由于他们在数学思想方面实行了革命性的变革所致.欧拉之所以不仅在代数、数论、微积分等多个数学分支上取得突出成就,而且还在力学、物理学、天文学、航海、造船、建筑等许多非数学领域与部门做出重大贡献,集中到一点就是他掌握了深刻的数学思想和非凡的运用数学思想解决实际问题的思维方式.

由此也可知,一个人数学能力强,有数学才能,并不简单地指他掌握了多少数学表层知识,而主要是说他运用数学思想解决实际问题和创造数学理论的本领.对于一个科技工作者和一个新时代的建设者来说,掌握数学思想则是绝对必要的.这是创造的源泉,是发展的基础,是数学能力的集中体现.数学的社会功能的发展,靠的是数学思想的灵活运用.

1.2.2 数学思想与科学思想

每门科学都逐渐形成了它自己的思想,而科学学则概括出各门科学共同遵循和运用的一些科学思想.显然数学思想是一类科学思想,但科学思想未必就单单是数学思想.例如,分类思想是各门科学都要运用的思想(比方语文分为文学、语言和写作,外语分为听、说、读、写

和泽，物理学分为力学、热学、声学、电学、光学和原子核物理学，化学分为无机化学和有机化学，生物学分为植物学和动物学等，中学生见到的最漂亮的分类应该是在学习哺乳纲动物时所出现的门（亚门）、纲（亚纲）、目、属、科、种的分类表），它不是单由数学给予的．只有将科学思想应用于空间形式和数量关系时，才能成为数学思想．如果用一个词语“逻辑划分”作为标准，那么，当该逻辑划分与数理有关时（可称之为“数理逻辑划分”），可以说是数学思想；当该逻辑划分与数理无直接关系时（例如把社会中的各行各业分为工、农、兵、学、商等），不应该说是运用数学思想．同样地，当且仅当哲学思想（例如一分为二的思想、质量互变思想和肯定否定思想）在数学中予以大量运用并且被“数学化”了时，它们也可以称之为数学思想．因此，作为一般科学方法论的逻辑所包含的思想，例如“演绎思想”、“归纳思想”、“类比思想”、“分析思想”、“综合思想”等在数学中的运用已经被“数学化”了，它们均被称之为数学思想．

当然，随着科学的数学化，越来越多的数学思想被众多学科吸收，从而转化成为一般的科学思想．例如，“公理化思想”（它也与逻辑有关）它产生于数学并成为数学科学体系建立的重要思想依据，它已较普遍地运用于一些自然科学领域，并日益渗透到社会科学领域中去，还有“分解与组合思想”（如代数中的“裂项”、“添项”，几何中的“割补”，命题的分拆等所蕴藏的思想）、“模拟思想”（如用“物理模型”，“力学模型”来解决数学问题所体现的思想）等等，这些思想既是数学思想也是（或将是）一般科学思想．

1.2.3　历史上数学思想的几次重大突破与中学数学教材内容的阶段性转折

(1) 数学发展历史的六个时期

(i) 数学萌芽时期．这段时间从几十万年的远古到公元前 6 世纪．这个时期人类在长期的生产实践中逐渐形成了数的概念，初步掌握了数的运算方法，并积累了一些数学知识，由于田亩度量和天文观测的需要，几何知识初步兴起，但还没有逻辑因素，未发现命题的证明．

(ii) 初等数学的开创时期．这段时间国外从泰勒斯（公元前600年前后）到公元641年亚历山大图书馆被焚．它还可分为两个时期、四个阶段，即古典时期的爱奥尼亚阶段（前 600 ～ 前480年）和雅典阶段（前480 ～ 前330年）；亚历山大里亚时期的希腊化阶段（前330 ～ 前200年）和罗马阶段（前 200 ～ 公元 600 年）．我国自公元前 221 年至公元 220 年，这个时期数学已经成为一门独立科学，建立了真正科学意义的数理论；数学的两个重要分支 —— 几何和算术，已经按演绎体系建立起来，数学已经明显地从经验形态上升为理论形态，欧几里得的几何学，阿基米德的穷竭法和阿波罗尼的圆锥曲线论，标志着数学的主体部分 —— 算术、代数、几何等已基本建立起来．这一时间主要是希腊数学．

(iii) 初等数学的交流和发展时期．这一时期国外自公元6世纪到17世纪初．我国自公元221 年至 14 世纪．这一时期的数学主要是中国数学、印度数学和阿拉伯数学等，初等数学的主体部分已经全部形成，并且发展成熟了．这一时期在交流中体现了两种传统：希腊传统，强调数学是逻辑的，是认识自然的工具，重点为几何，重视理论；中国、印度 —— 阿拉伯传统，强调数学是经济的，是支配自然的工具，重点为算术和代数，重视应用．

(iv) 近代数学的创立与发展时期．这一时期从17世纪初到18世纪末，共约200年左右的时间．在 17 世纪，继希腊数学诞生并从经验数学跃入理论数学之后，数学在这一时期又出现一次从常量数学到变量数学的跃进，以解析几何和微积分为代表，数学教育范围扩大，从事数学工作的人数迅速增加，数学著作广为传播，学园、学会、研究院、科学院等学术团体或场

所相继创立.数学传统由古希腊以来的几何(形)研究为主导转变为以数、代数为主导.数学开始进入其它学科,科学数学化的过程从此开始了.这个时期产生了一系列有影响深远的新领域,如解析几何、微积分、概率论、射影几何和数论等;出现了代数化的趋势;一系列新的数学概念相继出现,如无理数、虚数、瞬时变化率、导数、积分等.数学在自己抽象化的进程中又升一个层次.18世纪的数学,一是以微积分为基础发展形成一个新的宽广的研究领域——数学分析;二是数学方法发生了主要是欧拉、拉格朗日和拉普拉斯完成的从几何方法向解析方法的转变;三是物理学(特别是力学、天体力学)成为数学发展的一个直接动力;四是纯粹数学与应用数学已明确地区别开来.

(v) 近代数学的成熟时期.这个时期主要是19世纪.这个时期是数学发展史上伟大的转折时期,突出表现是:一方面是近代数学的主体部分发展成熟了,它的三个组成部分都取得了前所未有的成就:微积分发展成为数学分析,方程论发展成为高等代数,解析几何引申、发展成为高等几何.另一方面,近代数学的基本思想和基本概念在这一时期发生了根本性的变化:在分析中,傅里叶级数论的产生和建立,使得函数概念有了重大突破.在代数中,伽罗瓦群论的创立,使得代数运算的概念发生了重大突破.在几何中非欧几何的诞生,在空间概念方面发生重大突破.三项突破促使近代数学迅速向现代数学转变.这一时期开拓的一个前所未有的数学新领域,是数学基础的研究,它发端于柯西的极限论,后来形成了实数理论、集合论和数理逻辑等三种理论.因而,这一时期的数学的对象、内容在深度上和广度上都有了很大发展,分析学、代数学、几何学的思想、理论和方法都发生了革命性的变化,数学越发抽象、不断分化、不断综合的发展规律开始显露;数学基础研究的开始,标志着一座宏伟稳固的数学大厦已在人们脑海里出现;数学应用范围继力学、光学之后,又在热力学、电磁学、技术科学中获得扩展.

(vi) 现代数学时期.20世纪以来是现代科学技术突飞猛进的历史时期,原子能、电子计算机、空间技术、分子生物学、激光、合成材料、农业新技术和高能物理等八大新兴领域的开拓,使数学发生了空前巨大的飞跃,其规模之大,影响之深远,都远非前世纪可比.在这一时期,电子计算机进入数学领域,使整个数学的面貌大为改观;数学几乎渗透到所有科学领域,形成了数学科学的一系列分支理论和应用数学理论;数学发展的整体化趋势日益加强,使数学在不断分化的同时,又不断进行着逐级综合,明显地出现了整个数学走向大统一的发展趋势,预示着数学将发生更大规模的突破;纯粹数学不断向纵深发展,集合论观点的普遍运用,公理化方法的完善,数理逻辑的发展,数学基础的奠定,模糊数学的创建,以及泛函分析、抽象代数和拓扑学三大现代理论的建立,已经使数学在整个科学体系中的特殊地位和作用突出地显现出来,20世纪以来,人们眼光中的数学同以往任何时代都无法相比了.

如上数学发展的历史表明,数学思想的演进不仅仅是新思想的量的积累,而且在一定条件下还产生了一些根本性的变革,即质的飞跃.

(2) 数学思想的几次重大突破

(i) 从算术发展到代数是数学思想的一次重大发展.算术是代数产生的基础,代数是算术发展到一定阶段的必然产物.古代算术的主要内容是自然数、分数和小数的性质及四则运算.它的产生表明,人类对客观世界数量关系的认识迈出了具有决定性意义的一步,它是人类在社会实践中不可缺少的数学工具,有着广泛的应用.离开了算术,科学技术的进步几乎是难以想象的.在算术发展的过程中,人们发现:算术解题的局限性在很大程度上限制了数

学的应用.正是由于这一矛盾,代数解题法的产生也就成了历史的必然.

算术解题法的局限性,主要表现在只允许具体的、已知的数进行运算,不允许抽象的、未知的数参与运算.也就是说,利用算术解应用题时,首先要根据所求的数量,将已知数量按问题的条件列出算式,然后通过四则运算求出算式的结果,许多古老的数学应用题,如行程问题、工程问题、分配问题、盈亏问题等等,都是借助于这种方法求解的.这里的关键是列出算式,而对于那些具有复杂数量关系的应用题,要列出相应算式并非易事,而往往需要很高的机敏和技巧.特别是对于那些含有几个未知数的应用题,要通过列出算式求解,有时甚至是不可能的.正是为了解决这一矛盾,便产生了代数解题法.其特点是允许未知数参与运算,把已知数与未知数放在同等地位对待.其解题思想是,首先依据问题的条件列出包括已知数和未知数的方程,然后通过对方程的同解变换求出未知数的值.这就克服了算术解题法的局限性,使代数方法有了更大的普遍性和灵活性.

代数解题法的产生过程,也就是代数学的形成过程.这个过程大体经历了三个不同的阶段:第一,文词代数,即全部算法用文字语言来表达;第二,简字代数,即用简化了的文词来表述算法的内容和步骤;第三,符号代数,即普遍使用抽象的符号.对抽象符号的使用,表明初等代数已进入成熟时期.

解方程是初等代数最基本的内容,它的产生不仅极大地扩充了数学的应用范围,使得许多利用算术不能解决的问题得以解决,而且对数学的发展产生了巨大的影响.例如,对二次方程的求解,导致了虚数的发现;对五次和五次以上方程的求解,导致了群论的产生,等等.

随着数学的发展和社会实践的深化,代数学的研究对象和处理思想也在不断地扩大和创新,不仅由初等代数发展到高等代数,而且高等代数又出现了许多分支学科,如线性代数、多项式代数、群论、环论、格论、布尔代数、李代数、同调代数等等.高等代数与初等代数在处理思想上有很大差别,初等代数属于计算型,并且只限于研究实数和复数等特定的数系.而高等代数是概念型和公理化的,它的研究对象一般是抽象代数系统.因此,高等代数比初等代数具有更高的抽象性,更大的普遍性和更加广泛的应用范围.

(ii) 从综合几何到几何代数化是数学思想的一次质的飞跃.在几何学的漫长发展史中,其体现的思想经过了一系列变革,但起质的飞跃作用的是从综合几何到几何代数化的辩证发展.

几何学这一门古老的学科,它形成于公元前三世纪,以欧几里得的《几何原本》问世为重要标志.那时候,代数尚处于潜科学阶段,尚未形成为严谨的逻辑体系,是以零散片断的形式存在着.因此,在公元十四世纪之前,几何学在数学中一直属于主导地位.由于综合几何方法证明问题往往需要高超的技巧,而且推演证明的步骤相当繁难,缺乏一般性方法,这给几何学的进一步发展带来了困难.正当此时,代数学日渐成熟,特别是十六世纪代数学得到突飞猛进的发展,不仅形成了一套简明的字母符号体系,而且成功地解决了二次、三次、四次方程的求根问题,这使代数学在数学中的地位逐渐上升.十六世纪法国数学家就曾尝试用代数方法解决几何问题,并萌发了用方程表示曲线的思想.他指出,几何作图中线段的加减乘除可以通过代数的术语表出,因此它们实质上属于代数的运算.法国数学家笛卡尔继承和发展了韦达先进的数学思想,主张采用几何和代数中一切最好的东西,创立一门普通数学,使算术、代数、几何统一起来.由此他在其著作《几何学》中明确地提出了坐标的思想和曲线方程的思想,并用这些思想解决了许多几何问题.此书的问世标志着解析几何的诞生,用代数方

程表示一定的几何轨迹，这正是解析几何的基本思想．

随着解析几何的发展，几何代数的内容和方法不断得到丰富．如牛顿用坐标思想研究了三次曲线（1704年）；欧拉全面系统论述了解析几何理论（1748年）；拉格朗日又把力、速度和加速度给予算术化，由此开创了向量理论的研究方向．与此同时，坐标概念本身也在不断丰富，除直角坐标外，又相继产生了斜坐标、极坐标、柱坐标和球坐标以及面积坐标、体积坐标、重心坐标，坐标系也从二维扩展到三维以及多维和无穷维，从而又产生了多维解析几何和无穷维解析几何，由此又导致了泛函分析的产生．

几何代数化对数学的发展有着重大意义．首先，它为几何学的研究提供了新方法，使许多几何问题变得简单易解；它使数学从定性研究阶段发展到定量分析阶段，使人们对形的认识由静态发展到动态，对空间的认识由低维发展到高维．其次，它为代数研究提供了形象模型；几何学的思想向代数学的移植和渗透开拓了代数学新的研究领域．再次，把变数引进了数学，为微积分的建立准备了必要条件．另外，它为数学思想方法论提供了重要启示，点与数对、曲线与方程相对应的思想的自然发展，成为函数与点、函数集与空间相对应的思想，这为泛函分析理论的创立奠定了基础．

（iii）从常量数学到变量数学是数学思想的一次根本变革．算术、初等代数、初等几何和三角，是初等数学的主要内容，它们以不变的数量（常量）和固定的图形为其研究对象，因此这部分数学也称为常量数学．运用常量数学能有效地描述相对稳定状态的现象，但对于描述运动和变化的现象却无能为力．在现实世界中"动"和"变"是永恒的、绝对的，因而产生描述运动和变化的变量数学，是数学辩证发展的必然结果．

变量数学产生于17世纪，其标志一是解析几何的产生；二是微积分的建立．在微积分建立过程中，牛顿是从运动学的角度来研究和建立的，莱布尼兹是从几何的角度来研究和建立的，他们两人同时创建了微积分．

变量数学的产生意义十分重大，可概括为三点：

首先，扩展了数学的应用范围．科学的对象是研究运动变化着的物质世界，变量数学是描述和研究物质世界运动变化规律的强有力的工具．

其次，具有重大的数学思想方法论意义．变量数学的产生使数学思想发生了重大变革，由此带来数学的大发展．变量数学的思想渗透到常量数学的各分支中去，使得几何、代数、三角、数论等学科的数学思想发生了深刻变化，学科的内容也随之极大丰富．例如，把解方程理解为求函数的零点；借助分析的方法给出了代数基本定理的严格证明等等．由于数学思想的变革，一大批新的数学分支产生了，如解析数论、微分几何、微分方程、积分方程、实变函数论、复变函数论等等，变量数学的思想，从其产生开始便在数学中取得了主导地位．

第三，具有重大哲学意义．变量数学的基本概念，如函数、极限、微分和积分等，从本质上看不外是辩证法在数学上的应用．恩格斯曾指出："数学中的转折点是笛卡尔的变数，有了变数，运动进入了数学，有了变数，辩证法进入了数学．"因而变量数学的产生是辩证法在数学中取得了一次根本性胜利，为辩证法的普适性从数学上提供了生动的例证．

（iv）从必然数学到或然数学是数学思想的一次深刻变革．现实世界中存在两类截然不同的现象：一类是必然现象，另一类是或然（或随机）现象．

必然现象是指在一定条件必然产生某种结果或者必然不发生某种结果的现象，即条件和结果之间存在着必然联系．用以描述和研究必然现象的量及其关系的数学，称为必然数

学，如几何、代数、微积分等.

或然现象是指在一定要件下可能发生某种结果也可能不发生某种结果的现象，即或然现象中不存在条件与结果的必然联系.或然现象是不能用必然数学进行精确的定理描述的.这不意味着或然现象不存在规律，也不意味着我们不能从数量上描述和研究或然现象的规律.当同类或然现象大量重复出现时，便呈现出一种总体规律性，这就是统计规律性.这种统计规律性的存在便是或然数学的现实基础.例如，实验表明多次投掷一枚质量均匀的硬币，出现正面的次数与投掷总次数之比总是接近于$\frac{1}{2}$，而且随着投掷次数的增加，这个比越来越接近$\frac{1}{2}$.

研究或然现象统计规律性的或然数学有众多分支，其中最主要的是创立于17世纪的概率论和数理统计.通常把概率论的出现作为或然数学产生的主要标志.

随着科学技术和实践的发展，以概率论为基础的或然数学也得到了迅速的发展，目前已成为具有众多分支的庞大数学部门.如，平稳随机过程论、马尔科夫过程论、随机微分过程论、多元分析、试验分析、统计物理学、统计生物学、统计医学、概率逻辑、数理统计等.它的理论和方法在科学技术、工农业生产、国防和国民经济部门日益得到更加广泛的应用.

(v) 从明晰数学到模糊数学是数学思想的一次重大辩证演变.实践和科研当中遇到的各种量，依其界限是否分明可分为两类：一类是明晰的，另一类是模糊的.

用以描述明晰量及其关系的数学称为明晰数学，经典数学均属此类.明晰数学的理论基础是普通集合论.对于这种集合，一事物与它有着明确的隶属关系，要么属于这个集合，要么不属于这个集合，两者必居其一，不能模棱两可，这种关系可用特征函数 $A(x)$ 表示为

$$A(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x\in A \text{ 时}\\ 0, & \text{当 } x\notin A \text{ 时}\end{cases}$$

特征函数是二值函数，它只能表示"非此即彼"的状态，不能表示事物在中介过渡时呈现出的"亦此亦彼"性，这正是普通集合论的局限之所在.

现实世界中还存在大量模糊量.例如"适度"、"附近"、"美丽"、"健康"等等，这些概念作为现实世界事物状态的反映，在量上是没有分明界限的，是一些模糊量.明晰数学对这类量的研究和描述是无能为力的.特别是电子计算机发展的一个重要方面是模拟人脑的思维，以便能够应付和处理复杂多变的环境.人的思维之所以具有高度灵活性，能应付多变复杂的环境，是因为在逻辑思维和非逻辑思维的综合作用下进行的.一般来说，逻辑思维可用明晰数学来描述和刻画，而非逻辑思维却有很大的模糊性，无法用明晰数学来描述和刻画.这对电子计算机，特别是人工智能的发展，无疑是个极大障碍.为了解决这个矛盾，就必须建立起一种能够描述和处理模糊量及其关系的数学理论，这是模糊数学产生的直接背景.为此，美国加利福尼亚大学自动控制专家扎德教授进行了探索，于1965年提出并建立了一种新的集合论——模糊集合论.

模糊数学的理论基础是模糊集合，模糊集合的逻辑基础是多值逻辑.对于这种集合，一事物对它没有"属于"、"不属于"这样绝对分明的隶属关系，不能用普通集合的特征函数 $A(x)$ 来描述，而是用另一种隶属函数，即将特征函数 $A(x)$ 只取$\{0,1\}$二值扩大到$[0,1]$闭区间上的任意值，亦即用 $0\leqslant\mu(x)\leqslant 1$(或 $\mu(x)\in[0,1]$) 来刻画.

普通集合与模糊集合的关系，可由特征函数与隶属函数之间的关系来刻画.当隶属函数

$\mu(x)$ 的值域取闭区间[0,1]的两个端点,即取{0,1}两个值时,隶属函数便退化为特征函数 $A(x)$,模糊集合也就退化为普通集合.可见,模糊集合是普通集合的推广,而普通集合是模糊集合的特殊情况.也就是说,普通集合与模糊集合有着辩证统一的关系.它们既有区别又有联系,在一定条件下互相转化.因此,模糊数学与明晰数学有着不可分割的内在联系.模糊数学概念是明晰数学概念的推广和发展,模糊数学也广泛地应用着明晰数学的方法.模糊数学的产生,是数学思想的一次重大辩证演变.

(vi) 对实验数学引起重视是数学思想的观念变革.由于计算机技术的日新月异,现在计算机的作用,已远非是解决问题的工具和手段,它甚至可以激起研究者的科学洞察力并且引导进一步的探索,它完全能够与实验的作用相比拟,不同种类的计算机可以模拟并揭示未知的数学现象.计算机正为数学的发展带来巨大的推动力量,诚如当初望远镜的出现给予天文学的推动,以及显微镜的出现给予生物学的推动一样.

可视化,它是数学研究最迅速增长的领域之一.数据分析的第一步是把数据直观可见地展示出来,以求出隐蔽的模式,各种类型的图象提供了关系和函数的可见的展示.许多世纪以来,艺术家和地图绘制者利用投影几何工具把3维图象表示在2维幕布或纸张上,现在,计算机图形学把这些过程自动化,使我们同样能发掘高维空间中形状的投影,把数学模式可视化,使视觉的天赋成为数学研究无价的盟友.

由于计算机介入数学证明,用机器证明产生定理,因而人们不再以逻辑推理作为证明数学命题的唯一手段,于是提出"实验证明"的想法,即实验也应该成为判断数学命题真假的一种手段.实验数学的例子也不断地涌现在人们面前:1963年,英国气象学家E.N.洛伦兹在其计算机上检查天气数学模型时"发现"了混沌,1965年,美国控制论专家L.A.扎德教授因研究事物是非之间渐变的中介过渡形态而提出模糊集合,1967年,法国数学家R.托姆为了解释胚胎学中的成胚过程而提出了突变论.这些例子充分说明了实验是数学发展的源泉.从过去只认为数学是思维的数学到对实验数学也引起重视,这是数学思想的观念变革.

从上述数学发展史及其数学思想重大突破的简介中,我们也可了解到中学数学教材内容所体现的近代基础与现代学思想.在现编的中学数学教材内容中,也有几个重要转折点:如字母表示数,逻辑证明的出现,直线形到曲线形与保距性到保角性的飞跃,函数问题、解析几何、概率统计初步、极限、微积分初步以及微型计算机等等,而这几点恰恰在数学发展史上表现为数学思想的几次重大突破,即:从算术到代数,从综合几何到几何代数化,从常量数学到变量数学(包括从有限到无限),从必然数学到或然数学,也蕴含着从明晰数学到模糊数学的内容.

从数学发展史的简介中,我们还看到:新的数学思想的萌芽是数学矛盾发展的必然;数学思想的突破是推动数学发展的革命性变化.这也启示我们,知识发展的阶段性带来了认识上的跳跃度,反映在教学中,就可以体现数学思想在渗透、突破、应用中发挥"质变"功能,使学生的知识水平和心理认知结构上升到一个新的阶段.因而处理前述各个转折点(即教学难点)时,不仅要注意具体知识本身,更要注意教育思想的更新,突破思想局限性这一制约点是解决这些教学难点的关键.

1.2.4 数学思想中的基本数学思想

科学及其思想体系在构成上有它的层次性.数学科学有其基础层次(目前中小学数学就

属于基础层次,可称为"基础数学",但这只是在通常意义下说的,并非特指的"数学基础"),数学思想也有奠基性的成分.

在数学思想中,体现或应该体现于基础数学中的具有奠基性和总结性的成分的思想可以称之为数学思想.基本数学思想含有传统数学思想的精华和近现代数学思想的基本特征,并且也是历史地形成和发展着的.

当然,这里需作说明的是:基础数学本身也是在发展着的.如早期并不把"分析基础"、"统计基础"以及"计算基础"等划归基础数学,随着时代的发展和科学的进步,基础数学的水准也在提高;关于奠基性,指的是其本身非他者的衍生物,而它可以衍生他者.此处证明的"本身"与"他者"都是在数学思想体系这个范围内说的.

数学思想处在高于数学知识和具体数学观点而又低于哲学和一般科学思想的层次.基本数学思想作为数学思想的奠基性或总括性成分,它应该而且能够统摄中学数学的全部概念和方法,它的网络应能疏而不漏地复盖整个中学数学.基于这样理解,我们认为基本数学思想包括如下主要内容:符号化与变元表示思想,集合思想,对应思想,公理化与结构思想,系统与统计思想,化归与辩证思想.

在这些基本数学思想中,它有两大"基石"—— 符号化与变元表示思想和集合思想,又有两大"支柱"—— 对应思想和公理化与结构思想,还有两大"主梁"—— 系统与统计思想和化归与辩证思想.一些常运用的数学思想都可以从"基石"、"支柱"和"主梁"直接衍生或相关衍生或传递衍生出来.例如,"函数与方程思想"相关衍生于符号与变元表示的思想(函数式或方程式)、集合思想(函数的定义域或方程中字母的取值范围)和对应思想(函数的对应法则或方程中已知数、未知数的值的对应关系);"数形结合思想"直接衍生于对应思想(数或有序数组与图形中点的对应关系);特殊化思想传递衍生集合思想 —— 母集思想 —— 必要性淘汰思想等等.基本数学思想及其衍生的数学思想,形成了一个结构性很强的网络.

中学数学教材中处处渗透着基本数学思想,如果能使它落实到学生学习和运用数学的思维活动上,它就能在发展学生的数学能力方面发挥出一种方法论的功能.

关于基本数学思想的详细讨论我们将在第二、三、四章展开.

1.2.5 思路、思绪、思考和意识(观念)

在中学数学教育、教学中,还经常使用"思路"、"思绪"、"思考"和"意识"这些词语.一般说来,"思路"是指思维活动的线索,可视为串联、并联或网络形状出现的思想和方法的载体;"思绪"是指思路的头绪;"思考"是指进行比较深刻、周到的思维活动."思路"和"思绪"实际上是同义词,并且它们都是名词,"思考"是动词,它反映了主体把思想、方法串联、并联或用网络组织起来以解决问题的思维过程.由此可见,"思考"所产生的有效途径就是"思路"或"思绪","思路"或"思绪"是"思考"的结果,是思想、方法的某种选择和组织,且明显带有程序性,对思路及其所含思想、方法的选择和组织的水平,反映了学习者能力的差异.

所谓意识(观念)是人脑对客观世界的某种反映.数学意识是指用数学的思维方式去思考问题,处理问题的自觉行为或思维倾向,数学意识是低层次数学思想的升华,又是高层数学思想的准备.数学意识影响着人的思考方式,所以数学意识影响着人们接受、加工处理信息的方式,从而影响认知结构的形成.这说明数学意识是数学认知结构中起重要的组织作用的因素.如果把数学认知结构比作一个立体的网络结构,则数学意识就是建立网络的思想.

掌握数学知识并不是形成数学意识的充分条件,但掌握数学知识及数学思想是形成数学意识的必要步骤,形成数学意识是认识应达到的较高层次.

培养数学意识,主要是培养推理意识、抽象意识、符号意识、整体意识、化归意识等意识.

(i) 推理意识.这是指推理与讲理的自觉意识,即遇到问题时自觉推测,并做到落笔有据,言之有理,这是严密的逻辑性的反映.它包括演绎推演、归纳推理、类比推理的自觉意识.推理意识是公理化思想的准备.

(ii) 抽象意识.这是指在学习数学的过程中应形成的如下思维习惯:从本质上看问题,自觉地进行抽象概括,建立数学模型.抽象意识强调对事物(或数量)的结构、关系的敏感.抽象意识是结构思想的准备.

(iii) 符号意识.这是指对数学概念及专用术语相关的记号,表述各种数学对象相互关系的符号、性质符号、运算符号的深刻理解和灵活运用的良好习惯.符号意识包括:认识与鉴别能力 —— 对于数表、图象表示的数学模式,能粗略估计其分析表达式,鉴别以某个法则表示某个模式是否恰当;估算能力 —— 对以某种符号法则表示某种函数,如二次函数,能对函数值作出非正式的估计与比较;验算与预告能力 —— 对运算结果作一算术估计,或对已进行的运算的正确性做出判断;选择能力 —— 对一个特定问题,从几个等价的解答形式中确定最合适的形式.符号意识是符号化与变元表示思想的准备.

(iv) 整体意识.这是指全面地,从全局上考虑问题的思维习惯或自觉意识,它注重问题的整体结构及其改造,能卓有成效地作用于思维过程中的定向、调节和控制.培养整体意识,不能仅强调一个整体,还要强调整体与局部的关系,整体与局部的相对性、整体与结构的关系.整体意识是系统思想的准备.

(v) 化归意识.这是指在解决问题的过程中,有意识地对问题进行转化,变为已经解决或易于解决的问题;化归意识还意味着用联系、发展的、运动变化的眼光观察问题、认识问题.强调化归意识,能够使学生意识到,事物是多方联系的,解决问题的途径不是单一的,从而可提醒他们自觉地建立联想,调整思考方向.化归意识是化归思想以及辩证思想的准备.

1.2.6 数学思想与数学方法的关系

数学方法是处理、探索、解决问题,实现数学思想的技术手段和工具.“方法”是指向“实践”的,是理论用于实践的中介.数学方法的运用、实施与数学思想的概括、提炼是并行不悖,相互为用,互为表里的.

数学思想又是数学中处理问题的基本观点,是对中学数学基础知识与基本方法本质的概括,是其精神实质和理论根据,是创造性地发展数学的指导方针.

数学思想来源于数学基础知识与基本方法,又高于知识与方法,居于更高层次的地位,它指导知识与方法的运用,它能使知识向更深、更高层次发展.

有人说,一个方法就像一把钥匙,一把钥匙只能开一把锁,如待定系数法仅能解决知道结果形式的问题;数学归纳法只能解决与自然数有关的问题.而数学思想就相当于制造钥匙的原理.如果把技巧比作交通工具,方法比作交通方式,那么思想就是指示方向的路标和灯塔,这也是有一定的道理的.

由于数学方法与数学思想互为表里,它们都建立在一定的知识基础上,反过来又促进知识的深化提高和向能力的转化,在研究数学解题中的基本解题方法时,若与基本数学思想相

对应，可认为基本解题方法包括的主要内容是：符号与变元表示型方法，集合论型方法，对应型方法，公理化与结构型方法，系统与统计型方法，化归与辩证型方法．

中学数学中用到的各种解题方法，都体现着一定的数学思想．此时，我们还可以看到：有的解题方法和思想可以说是等同的，只是在不同的情况下或侧重于不同的方面才有“方法”与“思想”提法之别．例如“公理化方法”与“公理化思想”、“坐标法”与“坐标思想”，既同一又有差异；有的解题方法与思想可以结合起来表明它的含义，例如“公理法思想”、“坐标法思想”、“换元法思想”等，这说明有时“思想”与“方法”之间并不是都有十分明确的界限．当然，中学数学中由于解题方法的层次性，有的方法通常不宜简单直接冠以“思想”的雅号，例如“配平方”倘若冠以“配平方思想”就与我们所定义的“思想”不那么相称，要说配平方方法出于什么思想的话，那还可以说是出于“恒等变换思想”．

鉴于中学数学中解题方法与数学思想的这种特殊关系，以及从数学方法论的角度来考虑既同一又有差异或没有明确界限的数学思想和数学方法时，我们在中学数学教学中一般仍笼统使用“数学思想方法”一词．

思考题

1．数学思想与科学思想的关系怎样？
2．数学思想中的基本数学思想有哪些？
3．历史上数学思想有哪几次重大突破？
4．试阐述数学思想与数学方法的关系．

第二章 两大“基石”思想

数学的抽象性与广泛应用性特征决定了数学的形式化表征与语言通用的集合化表述，从而确立了数学思想的两大基石.

2.1 符号化与变元表示思想

使用符号化语言和在其中引进“变元”，是数学科学高度抽象性的要求. 例如，公式$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$就是采用符号化语言来表述的，当a，b代以任意数时都成立，这样的字母就表示“变元”，这个公式就是用变元表示的一般规律.

用含有变元的符号组合来表示一般规律和规则，是从作为经验科学的“算学”进到作为理论科学的“数学”的第一个标志. 我国传统数学的最大弱点是没有普遍贯彻符号化与变元表示的思想，因此在许多方面难以表示数学的一般规律. 这些弱点曾长期阻碍我国数学向更高方向发展.

“符号化与变元表示”不仅仅限于“用字母表示数”，也可以用字母或其他符号表示任意具有一定通性的“量”（如数量、向量、变换、命题、事件等等）及其运算.

用符号与变元来表示有关对象关系，具有简洁、明确的优点，增大了信息密度和思维容量，这样抽象的形式有时反而带来“思维的直观”. 例如用“$\Rightarrow$”表示“推导”，用“$A\Rightarrow B$”表示“A是B的充分条件”或“B是A的必要条件”，就显得很直观；又由于“$\Rightarrow$”具有传递性，故在一连串的推论中，人们甚至不假思索地从箭头指向中判断出有关的两个命题或词项间的蕴涵关系.

有人把数学符号系统跟巴甫洛夫的“第一信号系统”、“第二信号系统”并列，称为“第三信号系统”，作为“定理思维”与“全息系统思维”的载体，是有一定道理的.

数学是一个符号化的世界，数学符号就是数学的语言——世界上最通用的一种语言，它是数学抽象物的表现形式，是对现实世界数量关系的反映结果.

综上，所谓符号化与变元表示思想是指将所研究的对象进行抽象，并用数学符号、变元加以表述，用数学符号、变元表示任意具有一定通性的“量”及运算，用数学符号、变元来表示一般规律、规则，通过对“量”的研究理解其应用规律、规则来解决问题的一种思想.

符号化与变元表示思想有以下重要特征：

(1) 抽象化

数学符号是数学抽象的表现形式，是事物内在的、共同的本质属性的体现. 因此，符号化与变元表示思想体现抽象化特征，并以此作为思想基础.

(2) 层次化

数学符号也反映了数学抽象物的抽象层次(抽象度). 数学符号的差异，有时表示同一抽象层次上不同数学物的差别，如表示物体个数的不同数字符号，但更主要的是表示不同抽象

层次的差别(即不同的抽象度).

(3) 形式化

数学符号为数学形式化(各种数学抽象物之间的本质联系即数学符号之间的联系组合成一般规律或规则)创造了条件,它们所反映的思想内容是密切联系在一起的. 如代数中,由于引入了字母表示未知数和一般系数,使代数成为一门研究一般类型的形式和方程的学科,从而同单纯研究数的算术分清了界限.

在中学数学中,符号化与变元表示思想主要体现在换元思想、方程思想、参数思想等方面.

2.1.1　换元思想

换元思想是指通过字母变元(或表达式)表示,代替或转化为某些确定的数学对象,将数学问题化繁为简、化难为易,从而达到化未知为已知的而达到所求目标的一种思维倾向.

换元思想的本质是映射转移,或者说就是引进某种新的映射,对原给定的对象进行分解或实施复合,它的理论依据是等量代换.

运用换元思想处理问题的具体操作过程中,实施未知量或变量的替代,其关键是确定替代关系. 替代关系的确定常有:以新元代旧元,以新元替旧式,赋旧元以新式,以新式替旧式.

(1) 以新元代旧元

例 1　化简$\dfrac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$.

解　令$\sqrt{2}=x,\sqrt{3}=y,\sqrt{5}=z$,则$x^2+y^2-z^2=0$,故

$$\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}=\frac{2xy}{x+y+z}=\frac{2xy+(x^2+y^2-z^2)}{x+y+z}=$$

$$\frac{(x+y+z)(x+y-z)}{x+y+z}=\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}$$

例 2　已知

$$\frac{x^2}{2^2-1^2}+\frac{y^2}{2^2-3^2}+\frac{z^2}{2^2-5^2}+\frac{w^2}{2^2-7^2}=1$$
$$\frac{x^2}{4^2-1^2}+\frac{y^2}{4^2-3^2}+\frac{z^2}{4^2-5^2}+\frac{w^2}{4^2-7^2}=1$$
$$\frac{x^2}{6^2-1^2}+\frac{y^2}{6^2-3^2}+\frac{z^2}{6^2-5^2}+\frac{w^2}{6^2-7^2}=1$$
$$\frac{x^2}{8^2-1^2}+\frac{y^2}{8^2-3^2}+\frac{z^2}{8^2-5^2}+\frac{w^2}{8^2-7^2}=1$$

求$x^2+y^2+z^2+w^2$的值.

解　分别将 4,16,36,64 用 t 代换,则 x,y,z,w 能满足给定的方程组等价于$t=4,16,36,64$满足方程

$$\frac{x^2}{t-1}+\frac{y^2}{t-9}+\frac{z^2}{t-25}+\frac{w^2}{t-49}=1 \qquad ①$$

用$(t-1)(t-9)(t-25)(t-49)=M$乘方程①的两边,可知,对于有意义的 t 来说(即$t\neq 1,9,25,49$),①等价于方程

$$M-\frac{M}{t-1}x^2-\frac{M}{t-9}y^2-\frac{M}{t-25}z^2-\frac{M}{t-49}w^2=0 \qquad ②$$

方程 ② 是关于 t 的四次方程，$t=4,16,36,64$ 是这个方程的4个已知根，而4次多项式至多有4个根，所以这4个根就是方程 ② 的全部根．于是 ② 等价于方程

$$(t-4)(t-16)(t-36)(t-64)=0 \tag{③}$$

由于方程 ② 和 ③ 的 t^4 的系数都是1，所以 t 的其他各次幂的系数也应该对应相等．特别地，两方程中 t^3 的系数相等，比较 ② 和 ③ 的 t^3 的系数得

$$1+9+25+49+x^2+y^2+z^2+w^2=4+16+36+64$$

由此求得

$$x^2+y^2+z^2+w^2=36$$

(2) 以新元替旧式

以新元替旧式好比以"集装箱"形式来装运货物：先把小件分散的货物装成"大单元"，然后把这些"大单元"以一定方式装进车厢．

例3　解不等式 $\sqrt{2x+5}>x+1$．

解　令 $\sqrt{2x+5}=t(t\geqslant 0)$，则 $x=\frac{1}{2}(t^2-5)$．于是，原不等式可化为

$$t>\frac{1}{2}(t^2-5)\quad 即\quad t^2-2t-3<0$$

解得 $0\leqslant t<3$，即 $0\leqslant\sqrt{2x+5}<3$．由此解得原不等式解集为 $\left[-\frac{5}{2},2\right)$

注：对于形如 $\sqrt{ax+b}>cx+d$（或 $\sqrt{ax+b}\leqslant cx+d$）$(a\cdot b\neq 0)$ 的不等式，通过代换 $\sqrt{ax+b}=t(t\geqslant 0)$，原不等式可代为 $\frac{c}{a}t^2-t+d-\frac{cb}{a}<0$（或 $\frac{c}{a}t^2-t+d-\frac{cb}{a}\geqslant 0$）来解．这种解法可避免繁杂的讨论，是解这类无理不等式（甚至是方程）的好方法．

例4　设 $a_n=\sqrt{1\cdot 2}+\sqrt{2\cdot 3}+\cdots+\sqrt{n(n+1)}(n=1,2,\cdots)$．证明不等式：$\frac{1}{2}n(n+1)<a_n<\frac{1}{2}(n+1)^2$ 对所有的正整数 n 都成立．

证明　令 $a_n-\frac{1}{2}(n+1)^2=b_n(n\in\mathbf{N})$，则

$$\begin{aligned}b_{n+1}-b_n&=(a_{n+1}-a_n)-\frac{1}{2}[(n+2)^2-(n+1)^2]=\\&\sqrt{(n+1)(n+2)}-\frac{1}{2}(2n+3)=\\&-\frac{1}{2}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n+2})^2<0\end{aligned}$$

所以 $b_{n+1}<b_n$，即 $\{b_n\}$ 是递减数列，第一项 $b_1=\sqrt{2}-2$ 为最大项，$b_n\leqslant b_1=\sqrt{2}-2<0$，故 $a_n<\frac{1}{2}(n+1)^2$．

类似地，可证 $a_n>\frac{1}{2}n(n+1)$．

(3) 赋旧元以新式

赋旧元以新式，这好比把不合理的集装方式改换为合理的散载形式．

例5　已知 x,y,z 是非负实数且 $x+y+z=1$．求证：$0\leqslant xy+yz+zx-2xyz\leqslant\frac{7}{27}$．

证明　注意到已知条件，可令 $x=\sin^2\alpha\cdot\cos^2\beta,y=\cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta,z=\sin^2\beta$．于是

$$xy + yz + zx - 2xyz = xy(1-z) + z(x+y-xy) =$$
$$\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha \cdot \cos^2\beta + \sin^2\beta \cdot \cos^2\beta(1 - \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha \cdot \cos^2\beta) \geqslant 0$$
$$xy + yz + zx - 2xyz = xy(1-2z) + z(x+y) =$$
$$\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha \cdot \cos^4\beta \cdot \cos 2\beta + \frac{1}{4}\sin^2 2\beta =$$
$$\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha \cdot \frac{1}{4}(1+\cos 2\beta)^2 \cdot \cos 2\beta + \frac{1}{4}(1-\cos^2 2\beta) \leqslant$$
$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16}\cos 2\beta(1+\cos 2\beta)^2 - \frac{1}{4}\cos^2 2\beta =$$
$$\frac{1}{4} + \frac{2}{32}\cos 2\beta(1-\cos 2\beta)^2 \leqslant \frac{1}{4} + \frac{1}{32}\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{7}{27}$$

例 6　求函数 $y = \sqrt{x-4} + \sqrt{15-3x}$ 的最大值和最小值.

解　由于 $4 \leqslant x \leqslant 5$,故可令 $x = 4 + \sin^2\alpha\left(0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$.则原式变为 $y = 2\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$.

当 $\alpha = \frac{\pi}{6}$ 时,即 $x = 4\frac{1}{4}$ 时,y 取最大值 2;

当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时,即 $x = 5$ 时,y 取最小值 1.

例 7　求方程 $x^3 - 15x - 126 = 0$ 的实数根.

解　令 $126 = u^3 + v^3, 5 = uv$,则 u, v 为正实数且原方程化为

$$x^3 - 3uvx - u^3 - v^3 = 0$$

亦即

$$(x-u-v)[(x+u)^2 + (u-v)^2 + (x+v)^2] = 0$$

从而上述方程的实数解为 $x = u + v$.于是,由 $u^3 + v^3 = 126, u^3v^3 = 125$,解得

$$\begin{cases} u = 5 \\ v = 1 \end{cases} \text{或} \begin{cases} u = 1 \\ v = 5 \end{cases}$$

总之有 $x = u + v = 6$,所以所求方程实根为 6.

(4) 以新式替旧式

例 8　解方程 $\sqrt{x - \frac{5}{x}} - \sqrt{5 - \frac{5}{x}} = x$.

解　令 $\sqrt{x - \frac{5}{x}} = \frac{1}{2}x + t$, $-\sqrt{5 - \frac{5}{x}} = \frac{1}{2}x - t$,则由上述两式平方之差,有

$$x - 5 = 2xt \quad \text{即} \quad t = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{5}{x}\right)$$

于是

$$\sqrt{x - \frac{5}{x}} = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{5}{x}\right)$$

即

$$\left(\sqrt{x - \frac{5}{x}} - 1\right)^2 = 0$$

从而 $x - \frac{5}{x} = 1$ 即 $x^2 - x + 5 = 0$,解得 $x = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{21})$.

经检验,$x = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{21})$ 是原方程的根.

换元思想在解题中具有广泛的应用,具有减元、降次、分层、联系、转化、简化、显化等功

能.掌握并运用换元思想,将有利于培养思维的灵活性和创新性.

2.1.2 方程思想

所谓方程的思想就是突出研究已知量与未知量之间的等量关系,通过设未知数、列方程或方程组,解方程或方程组等步骤,达到求出未知量的解题思路和策略,它是解决各类计算问题的基本思想,是运算能力的基础.

笔者也曾认为,方程思想也称笛卡尔模式.数学家笛卡尔在他的一部著作《指导思维的法则》中,提出了一个重要的法则:

第一,把任何问题化为数学问题;

第二,把任何数学问题化为代数问题;

第三,把任何代数问题化为单一方程去解.

当然,这三条规则现在看来不一定正确,有时甚至是不可能的,但是它却包含着重要的方程思想,比一般的技巧具有更大的意义.这个模式虽然不能用于所有场合,但是,它确实能用于许多场合,其中包含许多重要的场合.

在前面运用换元思想解题时,也涉及了方程思想,这可从前述诸例中看出.

例1 已知方程$(x^2-2x+m)(x^2-2x+n)=0$的四个根组成一个首项为$\frac{1}{4}$的等差数列,求$|m-n|$的值.

解 只要把m,n求出即可.为求m,n,需要根据已知条件列出关于m,n的两个方程.

设已知方程的四个根分别为x_1,x_2,x_3,x_4,并且x_1,x_2是方程$x^2-2x+m=0$的两个根,x_3,x_4是方程$x^2-2x+n=0$的两个根,则由根与系数的关系,有

$$\begin{cases} x_1+x_2=2 & ① \\ x_1\cdot x_2=m & ② \\ x_3+x_4=2 & ③ \\ x_3\cdot x_4=n & ④ \end{cases}$$

下面还需要利用$x_1=\frac{1}{4}$,x_2,x_3,x_4成等差数列的条件再列方程.也可以利用等差数列的性质来解,由①、③容易求得一组解$x_1=\frac{1}{4},x_3=\frac{3}{4},x_4=\frac{5}{4},x_2=\frac{7}{4}$.于是,$m=\frac{1}{4}\cdot\frac{7}{4}=\frac{7}{16},n=\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{4}=\frac{15}{16}$,故$|m-n|=\frac{1}{2}$.

例2 设x,y为实数,且$x^2+xy+y^2=3$,求$f(x,y)=x^2-xy+y^2$的最大值和最小值.

解 由

$$\begin{cases} x^2+xy+y^2=3 \\ x^2-xy+y^2=f(x,y) \end{cases}$$

可求得

$$xy=\frac{1}{2}[3-f(x,y)],\quad x+y=\pm\sqrt{\frac{9-f(x,y)}{2}}$$

于是,x,y是方程$t^2\pm\sqrt{\frac{9-f(x,y)}{2}}t+\frac{3-f(x,y)}{2}=0$的两个实根.

由 $\Delta \geqslant 0$，得 $f(x,y) \geqslant 1$；

由 $\frac{9-f(x,y)}{2} \geqslant 0$，得 $f(x,y) \leqslant 9$.

故 $f(x,y)=x^2-xy+y^2$ 的最大值和最小值分别为 9 和 1.

由上述几例可看出：一个数学问题中的任何一个数或式都可以视为未知数，而其余的数或式则视为已知数. 它们之间的制约关系 —— 等式，即可视为方程.

例 3　设 α,β,γ 均为锐角，且 $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-1=0$，求证：$\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

证明　由已知等式知 $\cos\alpha$ 是一元二次方程 $x^2+2x\cos\beta\cos\gamma+\cos^2\beta+\cos^2\gamma-1=0$ 的一个正根，则

$$\cos\alpha=\frac{-2\cos\beta\cos\gamma+\sqrt{4\cos^2\beta\cos^2\gamma-4(\cos^2\beta+\cos^2\gamma-1)}}{2}=$$

$$-\cos\beta\cos\gamma+\sin\beta\sin\gamma=-\cos(\beta+\gamma)=\cos[\pi-(\beta+\gamma)]$$

又 $\alpha,\beta,\gamma\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$，则 $\alpha=\pi-(\beta+\gamma)$，即 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

例 4　等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n 且 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}$，求 a_1 的范围.

解　欲求 a_1 的范围，应先找到含 a_1 的方程，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{2}$ 就是一个方程，此方程与 a_1 应有关系，易得 $\frac{a_1}{1-q}=\frac{1}{2}$，即 $q=1-2a_1$. 由此看出，应由 q 的范围控制 a_1 的范围，由 $|q|<1$ 且 $q\neq 0$，易求得 $0<a_1<1$ 且 $a_1\neq\frac{1}{2}$.

例 5　求证：$2(1-\sin\alpha)(1+\cos\alpha)=(1-\sin\alpha+\cos\alpha)^2$.

分析　本题等号两边反复出现 $1-\sin\alpha$，因此，将 $1-\sin\alpha$ 换成 x 作出关于 x 的方程，求出有解 $1-\sin\alpha$ 即可得证.

证明　设关于 x 的方程

$$(x+\cos\alpha)^2=2(1+\cos\alpha)x \qquad ①$$

即

$$x^2-2x+\cos^2\alpha=0$$

解方程得，$x=1\pm\sin\alpha$，将其中一根 $x=1-\sin\alpha$，代入方程 ① 中有

$$(1-\sin\alpha+\cos\alpha)^2=2(1-\sin\alpha)(1+\cos\alpha)$$

注　在证明中，将方程另一根 $x=1+\sin\alpha$ 代入方程 ① 中，则可得 $2(1+\sin\alpha)(1+\cos\alpha)=(1+\sin\alpha+\cos\alpha)^2$. 类似地有：$2(1+\sin\alpha)(1-\cos\alpha)=(1+\sin\alpha-\cos\alpha)^2$ 等等. 这种化证明为解方程的方法，真是别具一格.

2.1.3　参数思想

波利亚曾认为，引入辅助元素可"使问题的概念更完整，更富有启发性，更为人所熟悉"，是个"好念头". 因此，当问题的条件和结论不易发生关系或关系不明朗时，借助辅助元素 —— 参数为桥梁或探测器，可使条件和结论联结起来，关系明朗，这就是参数思想的基本点.

参数思想解题的特征是：引入参数、参与推导、消去参数、显露结论.

例 1 设 x,y,z 是不全为零的实数，求函数 $f(x,y,z)=\dfrac{xy+2yz+2zx}{x^2+y^2+z^2}$ 的最大值.

解 引进参数 $\lambda>0$，则

$$\lambda xy\leqslant\frac{1}{2}\lambda(x^2+y^2),\quad 2y\lambda z\leqslant y^2+\lambda^2z^2,\quad 2\lambda zx\leqslant\lambda^2z^2+x^2$$

则
$$\lambda(xy+2yz+2zx)\leqslant\left(\frac{1}{2}\lambda+1\right)x^2+\left(\frac{1}{2}\lambda+1\right)y^2+2\lambda^2z^2$$

令 $\frac{1}{2}\lambda+1=2\lambda^2$，即求得 $\lambda=\frac{1}{8}(1+\sqrt{33})(\lambda>0)$. 从而

$$xy+2yz+2zx\leqslant\frac{1}{4}(1+\sqrt{33})(x^2+y^2+z^2)$$

故
$$\frac{xy+2yz+2zx}{x^2+y^2+z^2}\leqslant\frac{1}{4}(1+\sqrt{33})$$

上式等号当 $x=y=\frac{1}{8}(1+\sqrt{33})z$ 时成立，故 $f(x,y,z)$ 的最大值为 $\frac{1}{4}(1+\sqrt{33})$.

例 2 已知 $x,y\in\mathbf{R}_+$，且 $x^3+y^3=1$，求函数 $f(x,y)=x+4y$ 的最大值.

解 引入参数 $\lambda_1,\lambda_2\in\mathbf{R}_+$，则

$$x^3+\lambda_1^3+\lambda_1^3\geqslant3\lambda_1^2x,\quad y^3+\lambda_2^3+\lambda_2^3\geqslant3\lambda_2^2y$$

则
$$x^3+y^3+2\lambda_1^3+2\lambda_2^3\geqslant3(\lambda_1^2x+\lambda_2^2y)$$

令 $\lambda_2^2=4\lambda_1^2$，即 $\lambda_2=2\lambda_1$，则

$$x^3+y^3+18\lambda_1^3\geqslant3\lambda_1^2(x+4y)\quad 即\quad x+4y\leqslant\frac{1+18\lambda_1^3}{3\lambda_1^2}$$

当 $x=\lambda_1,y=\lambda_2=2\lambda_1$ 时，上式等号成立.

将 $x=\lambda_1,y=2\lambda_1$ 代入 $x^3+y^3=1$，解得 $\lambda_1=\frac{1}{3}\sqrt[3]{3}(\lambda_1>0)$.

故当 $x=\frac{1}{3}\sqrt[3]{3},y=\frac{2}{3}\sqrt[3]{3}$ 时，$f(x,y)$ 的最大值为 $3\sqrt[3]{3}$.

例 3 设 $a,b,c\in\mathbf{R}_+$，试证：$b+c-a,c+a-b,a+b-c$ 中至少有两个为正的.

证明 不妨设 $a\geqslant b\geqslant c>0$（因所给条件式是对称的）.

引进参数 $\lambda_1=a-b\geqslant0,\lambda_2=b-c\geqslant0$，则 $a=b+\lambda_1,c=b-\lambda_2$，于是

$$b+c-a=b-\lambda_2-\lambda_1\tag{①}$$
$$c+a-b=b-\lambda_2+\lambda_1\tag{②}$$
$$a+b-c=b+\lambda_2+\lambda_1\tag{③}$$

上述三式中，① 的正负不易判断；但 ② 等于 $c+\lambda_1$ 为正；③ 显然为正，故命题获证.

参数思想在解析几何内容占有很重的分量，直线方程、曲线方程的一般形式中的字母系数都可看作参数. 例如直线方程 $y=kx+b$，若把 k 看作参数，则表示过定点 $(0,b)$ 的直线系方程，若把 b 看作参数，则表示斜率为 k 的直线系方程. 像这样，在一个数学问题中，决定其本质特征的量，都可称之为独立参数. 因而，在解析几何中，研究并应用参数方程是其重要内容，参数思想熏陶与运用也成为这门学科的重要特色.

例 4 已知 P 为第一象限内的动点，A、B 分别为点 P 在 x 轴和 y 轴上的射影. 矩形 $OAPB$ 的周长为定值 $2a$. 求证：经过点 P 并与直线 AB 垂直的直线必经过一定点.

证明 由于 $OA+OB=a$（常数），则可引进 $OA=\lambda$ 为参数，此时点 P 的坐标必为

$(\lambda, a-\lambda)$. 直线 AB 的斜率为 $\frac{\lambda-a}{\lambda}$，与 AB 垂直且过点 P 的直线方程为

$$y-(a-\lambda)=\frac{\lambda}{a-\lambda}(x-\lambda) \quad ①$$

考虑结论需要，应证 ① 可化为

$$m(a_1x+b_1y+c_1)+n(a_2x+b_2y+c_2)=0(m,n\neq 0) \quad ②$$

所求定点为二直线 $a_1x+b_1y+c_1=0$ 与 $a_2x+b_2y+c_2=0$ 的交点. 所以，化 ① 为

$$(a-\lambda)y=\lambda x+a^2-2a\lambda$$

即

$$\lambda(x+y-2a)-a(y-a)=0 \quad ③$$

③ 与 ② 同形，故所求定点为直线 $x+y-2a=0$ 与 $y=a$ 的交点，解方程组得定点为 (a,a).

2.2　集合思想

集合是现代数学中最基本的概念之一，又是数学各科通用的数学语言载体. 人们在认识事物、解决问题的实践中，经常把在某些方面具有共同性质的事物放在一起视为一个整体，对它们作统一的研究和处理，这在数学中的具体体现就是集合的概念及运算. 集合的元素是任意的对象，这就使数学应用的领域大大拓广. 集合运算与逻辑运算之间可以建立起同构关系，因此，运用集合思想便可使数学与逻辑更趋于统一，从而更有利于数学理论与应用的研究.

在中学数学中，集合思想可以贯穿于数学教学内容的各部分.

首先，我们注意到，数集、点集、解集等是集合论的基础. 而中学数学的研究对象是在通常的数集($\mathbf{N},\mathbf{Z},\mathbf{Q},\mathbf{R},\mathbf{C}$) 和通常的空间($\mathbf{R}^1,\mathbf{R}^2,\mathbf{R}^3$) 中研究数、式、形，包括数和式的运算和变形，方程和不等式的解，函数的图象和性质，几何图形的结构和变换，形与数之间的对应关系，等等. 它们可以在集合论的观点下联系和统一起来，并归结到某一种集合或几种集合间的某些关系当中去研究. 例如：

数集的逐步扩展，从自然数集到整数集 → 有理数集 → 实数集 → 复数集的扩充过程都可以通过对前一个集按集合的某种等价关系分类而得；实数与数轴上点的对应关系，促使数形结合，逐步展开对各种数学问题的讨论；

方程的解集、不等式的解集，均对应数轴上或有关平面上的一个点集；

运算、函数、序是集合上的某种关系；数值函数可完全由其图象确定，该图象是平面上的一个点集，对应着 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 的一个子集；

几何元素间的各种结合关系、平行与垂直是集合间的某种关系；平面几何中图形的平移、旋转、反射、相似等几何变换都是 $\mathbf{R}^2$ 中集合间满足一定条件的对应关系，等等.

可见，中学数学中的数学对象都归结为集合.

其次，又注意到，可以利用集合语言表述、揭示、理解数学概念. 理解概念在于准确把握概念的内涵和外延，内涵是指这个概念所包含对象的一切基本属性的总和，外延是指适合于这一概念的一切对象. 由于集合可用列举法或描述法表示，以及数学概念都可看作集合，因此，用揭示概念外延的方式定义概念实际上就是列举集合的元素，用揭示概念内涵的方式定

义概念实际上就是给出集中元素所满足的性质、概念间的同一关系、从属关系都体现为外延集合(或内涵集合)的相等、包含关系.因此,在数学中渗透集合思想有助于学生对概念的理解、把握概念的实质.

最后,再注意到,很多数学内容都是针对或建立在某些特定的集合上.中学数学中所讨论的每个定理、公式都是针对某一类确定的数学对象来进行的.例如,勾股定理是对所有直角三角形而言的,是直角三角形集合中所有元素所共同具有的一个性质.

式的变形与集合有着非常紧切的关系.恒等式(或恒等关系)指的是在数的某一集合上恒等,改变了这一集合,就未必保持恒等;代数式的变形,可能会引起变元允许值集合的变化;方程与不等式的讨论与数集的选择有密切的关系.在指定的数集下确定出未知量的允许值集合,然后才能在允许值集合中确定解集,同解变形是建立在允许值集不变的基础之上的.

集合思想是中学数学思想的基石,常可从如下几个方面来呈现.

2.2.1 类分思想(并集思想)

对于比较复杂的问题,可将问题所涉及的对象的全体划分为若干两两不相交的部分,然后分别求解或论证,从而解决原问题,这就是所谓的类分思想(或逻辑划分思想).从集合论的观点看,类分思想就是将问题所研究对象的全体或所涉及的范围,记为一个集合 $P=\{x\mid p(x)\}$(其中 $p(x)$ 为集合 P 的本质属性),将 P 划分为若干个子集 $P_i(i=1,2,\cdots,n)$,满足(i) $P_i\cap P_j=\varnothing\ (i\neq j)$;(ii) $\bigcup\limits_{i=1}^{n}P_i=P$.然后对每个 P_i 分别求解或论证,达到全面解决问题的目的,所以又称为并集(无公共元素)思想.中学数学解题中常用的分类讨论、穷举法等都是属于这种思想的具体体现.

类分思想处理问题时,要正确地对事物进行分类,通常应从所研究的具体问题出发,选取恰当的标准,然后根据对象的属性,把它们不重不漏地划分为若干类别.科学地分类,一个是标准的统一,一个是不重不漏,划分只是手段,分类研究才是目的,还需要在分好的类别下逐个进行研究.其中体现的是大化小,由整体化部分,由一般化特殊来解决问题,它的研究基本方向是“分”,但是“分”与“合”既是矛盾的对立面,又是矛盾的统一体,有“分”必然有“合”.当分类解决完这个问题后,还必须把它们总合到一起,因为我们研究的毕竟是这个问题的全体.有分有合,先分后合是这种类分思想的本质属性.

例1 设函数 $f(x)=\sqrt{x^2+1}-ax$,其中 $a>0$.

(Ⅰ)解不等式 $f(x)\leqslant 1$;

(Ⅱ)求 a 的取值范围,使函数 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调函数.

解 (Ⅰ)由题意,转化为 $\sqrt{x^2+1}\leqslant ax+1$,由 $x^2+1\geqslant 1$,得 $ax\geqslant 0$,而 $a>0$,得 $x\geqslant 0$.则

$$\begin{cases}x\geqslant 0\\ x^2+1\leqslant a^2x^2+2ax+1\end{cases}\quad 即\quad \begin{cases}x\geqslant 0\\ (1-a^2)x^2-2ax\leqslant 0\end{cases}$$

此题关键的是要对 $1-a^2$ 的取值进行分类讨论.

当 $1-a^2=0$,$a=1$ 时,有 $\begin{cases}x\geqslant 0\\ -2x\leqslant 0\end{cases}$,解之,$x\geqslant 0$.

当 $1-a^2<0$，即 $a>1$ 时，$\begin{cases}x\geqslant 0\\ x\leqslant \dfrac{2a}{1-a^2}\text{ 或 }x\geqslant 0\end{cases}$，则 $x\geqslant 0$.

当 $1-a^2>0$，即 $0<a<1$ 时，有 $\begin{cases}x\geqslant 0\\ 0\leqslant x\leqslant \dfrac{2a}{1-a^2}\end{cases}$，则 $0\leqslant x\leqslant \dfrac{2a}{1-a^2}$.

综上所解，当 $a\geqslant 1$ 时，不等式的解集为 $\{x\mid x\geqslant 0\}$.

当 $0<a<1$ 时，不等式的解集为 $\left\{x\mid 0\leqslant x\leqslant \dfrac{2a}{1-a^2}\right\}$.

(Ⅱ) 设单调区间内的 $x_1<x_2$，转化为解不等式 $f(x_1)<f(x_2)$ 或 $f(x_1)>f(x_2)$ 中的参数解集.

注意到问题(Ⅰ)中，解得的结果：

当 $0<a<1$ 时，$0\leqslant x\leqslant \dfrac{2a}{1-a^2}$，有 $f(x)\leqslant 1$.

从而当 $x=0$ 时，$f(x)=1$，$0<x<\dfrac{2a}{1-a^2}$ 时，$f(x)<1$，$x=\dfrac{2a}{1-a^2}$ 时，$f(x)=1$，显然，当 $0<a<1$ 时，$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是非单调函数；

当 $a\geqslant 1$ 时，$x\geqslant 0$，设 $0\leqslant x_1<x_2<+\infty$，则

$$f(x_1)-f(x_2)=\sqrt{x_1^2+1}-\sqrt{x_2^2+1}-a(x_1-x_2)=$$
$$\frac{x_1^2-x_2^2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}-a(x_1-x_2)=$$
$$(x_1-x_2)\left[\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}-a\right]$$

又 $\sqrt{x_1^2+1}>x_1$，$\sqrt{x_2^2+1}>x_2$，则 $\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}>x_1+x_2>0$，则

$$\frac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}<1\leqslant a$$

从而有 $\dfrac{x_1+x_2}{\sqrt{x_1^2+1}+\sqrt{x_2^2+1}}-a<0$，而 $x_1-x_2<0$，则 $f(x_1)-f(x_2)>0$，即 $f(x_1)>f(x_2)$，故当 $a\geqslant 1$ 时，$f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上是单调减函数.

例 2 在直角坐标系中，设矩形 $OPQR$ 的顶点按逆时针顺序依次为 $O(0,0)$，$P(1,t)$，$Q(1-2t,2+t)$，$R(-2t,2)$，其中 $t\in(0,+\infty)$.

(Ⅰ) 求矩形 $OPQR$ 在第一象限部分的面积 $S(t)$；

(Ⅱ) 确定函数 $S(t)$ 的单调区间，并加以证明.

解 (Ⅰ) 由于 Q 点的横坐标 $1-2t$ 可正、可零、可负，故作如下讨论：

(i) 当 $1-2t>0$，即 $0<t<\dfrac{1}{2}$ 时，Q 点在第一象限. QR 与 y 轴相交于 K，见图 2.2.1.

直线 QR 的方程是 $\dfrac{y-2}{2+t-2}=\dfrac{x+2t}{1-2t+2t}$，即 $y-2=t(x+2t)$.

故点 K 的坐标是 $(0,2+2t^2)$，所以 $S(t)=S_{OPQK}=S_{OPQR}-S_{OKR}$，但

$$|OP|=\sqrt{1+t^2},\quad |OR|=2\sqrt{1+t^2}$$

则

$$S(t)=\sqrt{1+t^2}\cdot 2\sqrt{1+t^2}-\frac{1}{2}(2+2t^2)\cdot 2t=2(1-t+t^2-t^3)$$

(ii) 当 $1-2t=0$,即 $t=\frac{1}{2}$ 时,Q 点坐标为$(0,\frac{5}{2})$,见图 2.2.2.则

$$S(t)=S_{OPQ}=\frac{1}{2}\times\frac{5}{2}\times 1=\frac{5}{4}$$

(iii) 当 $1-2t<0$,即 $t>\frac{1}{2}$ 时,Q 点在第二象限,设 PQ 与 y 轴相交于 L,见图 2.2.3.

直线 PQ 的方程是$\frac{y-t}{2+t-t}=\frac{x-1}{1-2t-1}$,即 $y-t=-\frac{1}{t}(x-1)$,故点 L 的坐标为$(0,t+\frac{1}{t})$,则

$$S(t)=S_{OPL}=\frac{1}{2}(t+\frac{1}{t})\cdot 1=\frac{1}{2}(t+\frac{1}{t})$$

综上可知,矩形 $OPQR$ 在第一象限的面积为

$$S(t)=\begin{cases}2(1-t+t^2-t^3),0<t<\frac{1}{2}\\ \frac{5}{4},t=\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}(t+\frac{1}{t}),t>\frac{1}{2}\end{cases}$$

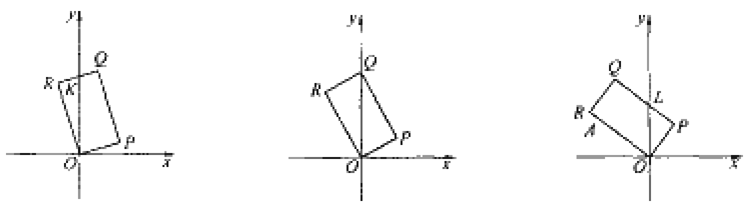


图 2.2.1　　图 2.2.2　　图 2.2.3

(Ⅱ) 按(Ⅰ)分类作如下讨论:

(i) 当 $0<t<\frac{1}{2}$ 时,设 $0<t_1<t_2<\frac{1}{2}$,有

$$S(t_1)-S(t_2)=2(1-t_1+t_1^2-t_1^3)-2(1-t_2+t_2^2-t_2^3)=$$
$$2(t_2-t_1)[1-(t_1+t_2)+(t_1^2+t_1t_2+t_2^2)]>0$$

则
$$S(t_1)>S(t_2)$$

又
$$S(\frac{1}{2})=2[1-\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2-(\frac{1}{2})^3]=\frac{5}{4}$$

故 $S(t)$ 在区间$(0,\frac{1}{2}]$内是减函数.

(ii) 当 $t>\frac{1}{2}$ 时,设$\frac{1}{2}<t_1<t_2$,有

$$S(t_1)-S(t_2)=\frac{1}{2}(t_1+\frac{1}{t_1})-\frac{1}{2}(t_2+\frac{1}{t_2})=\frac{1}{2}(t_1-t_2)(1-\frac{1}{t_1t_2})$$

但 $t_1 - t_2 < 0$,再讨论 $1 - \frac{1}{t_1 t_2}$.

(a) 若 $\frac{1}{2} < t_1 < t_2 \leqslant 1$,则 $1 - \frac{1}{t_1 t_2} < 0$,则 $S(t_1) > S(t_2)$.

(b) 若 $1 \leqslant t_1 \leqslant t_2$,则 $1 - \frac{1}{t_1 t_2} > 0$,则 $S(t_1) < S(t_2)$. 又

$$S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{1}{2}}\right) = \frac{5}{4}$$

故 $S(t)$ 在区间$\left[\frac{1}{2}, 1\right]$内是减函数,在区间$[1, +\infty)$内是增函数.

综上可知,$S(t)$ 的单调区间分为$(0,1]$及$[1, +\infty)$,且在区间$(0,1]$内是减函数,在区间$[1, +\infty)$内是增函数.

例 3　已知数列$\{a_n\}$满足:$a_1 = 1, a_2 = r(r > 0)$,数列$\{a_n a_{n+1}\}$公比为 $q(q > 0)$ 的等比数列,数列 $b_n = a_{2n-1} + a_{2n}$,设 $S_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$,求$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{S_n}$.

解　应对 q 进行全面讨论:

因$\{a_n a_{n+1}\}$为等比数列,则$\frac{a_{n+1}a_{n+2}}{a_n a_{n+1}} = q$,即$\frac{a_{n+2}}{a_n} = q$,又由 $b_n = a_{2n-1} + a_{2n}$, $b_{n+1} = a_{2n+1} + a_{2n+2}$,则

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{a_{2n+1} + a_{2n+2}}{a_{2n-1} + a_{2n}} = \frac{(a_{2n-1} + a_{2n})q}{a_{2n-1} + a_{2n}} = q$$

故$\{b_n\}$是首项为 $1 + r$,公比为 q 的等比数列.

情形 1:当 $q = 1$ 时,$S_n = n(1 + r)$,$\frac{1}{S_n} = \frac{1}{n(1 + r)}$,则$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{S_n} = 0$;

情形 2:当 $0 < q < 1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{S_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1 - q}{(1 + r)(1 - q^n)} = \frac{1 - q}{1 + r}$;

情形 3:当 $q > 1$ 时,因$\frac{1}{S_n} = \frac{1 - q}{(1 + r)(1 - q^n)} = \frac{\frac{1}{q^n} - \frac{1}{q^{n-1}}}{(1 + r)\left(\frac{1}{q^n} - 1\right)}$,则$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{S_n} = 0$.

综上可知,当 $0 < q < 1$ 时,$\frac{1}{S_n}$ 的极限为$\frac{1 - q}{1 + r}$;当 $q \geqslant 1$ 时,$\frac{1}{S_n}$ 的极限为 0.

2.2.2　求同思想(交集思想)

求同思想是指从问题所涉及的双方或多方事物之间探求共同点(共性),使问题在某个确定范围内得以解决的一种数学思想. 从集合的表示来看,设 $A = \{x \mid x$ 具有性质$P_1\}$, $B = \{x \mid x$ 具有性质$P_2\}$,则 $A \cap B = \{x \mid x$ 具有性质P_1 和 $P_2\}$. 探求同时具有性质 P_1 和 P_2 的对象,即求集合 $A \cap B$,所以求同思想也称交集思想. 如数学中求方程组或不等式组或混合组的解集、用待定系数法分解因式或求函数的解析式、用同一法证题、求曲线的交点、利用函数的图象求某些特殊方程的近似解等都是交集思想的体现.

例 1　设 a, b 是自然数,a, b 互质. $[a, b]$ 表示它们的最小公倍数,试证 $ab = [a, b]$.

证明　首先

$$a \mid [a,b],\ b \mid [a,b],\ (a,b)=1 \Rightarrow ab \mid [a,b] \qquad ①$$

其次，由最小公倍数一定整除它们的任一公倍数，得

$$[a,b] \mid ab \qquad ②$$

故由①，②知 $ab=[a,b]$.

类似地，欲证两数 $A=B$，可证(i)$A \leqslant B$，(ii)$A \geqslant B$；欲证集合 $A=B$，可证(i)$A \subseteq B$，(ii)$A \supseteq B$. 这是典型的交集思想的应用.

另外，在文字表述时，"和"、"且"等词反映的是交集思想，而"或"则反映并集思想，这些都需结合具体问题分析清楚.

2.2.3　互补思想(补集思想)

已知集合 A 是某个与之相关的全集 I 的子集，若直接求 A 困难或麻烦，可考虑先求 A 的补集 $\bar{A}$，再求 $A=\bar{\bar{A}}$. 这种在顺向思维受阻后改用逆向思维的思想，就是数学中的互补思想或补集思想. 中学数学中常用的割补法、反证法即是这种思想的具体体现.

例 1　已知集合 A 和 B 各有 12 个元素，$A \cap B$ 含 4 个元素，求同时满足：(Ⅰ)$C \subset A \cup B$ 且 C 有 3 个元素，(Ⅱ)$C \cap A \neq \varnothing$ 的集合 C 的个数.

分析　可由题设条件先求出属于 B 而不属于 A 的元素的个数，再分类讨论 $A \cup B$ 中只含有 A 中 1 个元素、2 个元素、3 个元素的集合 C 的个数，从而得出集合 C 的总个数：$C_{12}^1 \cdot C_8^2 + C_{12}^2 \cdot C_8^1 + C_{12}^3 = 1\,084$. 但若考虑不周密，分类不妥当很容易造成错误.

现在我们转换一个思维角度，先求出满足条件(Ⅰ)的集合个数 C_{20}^3，以此为全集，从中去掉满足(Ⅰ)但不满足(Ⅱ)的集合，即满足条件(Ⅱ)的集合的补集中有 C_8^3 个，其差 $C_{20}^3 - C_8^3 = 1\,084$(个)即为所求结果. 我们看到后一种采用"补集思想"做出的解答要比前一种方法简捷得多.

例 2　如果 $AC<0$ 且 $BC<0$，那么直线 $l: Ax+By+C=0$ 不经过的象限是________.

分析　由于在坐标平面中，直线经过哪些象限搞清了，不经过的象限也就自明了，并且由直线方程系数的性质，判断它在坐标平面中的位置比较方便.

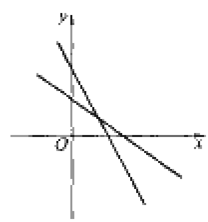


图 1

解　由 $B \neq 0$，直线方程可变为 $y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$，依 $BC<0$，故 $-\frac{C}{B}>0$，即直线在 y 轴上的截距为正数；再由 $AC<0$，$BC<0 \Rightarrow ABC^2>0 \Rightarrow AB>0$，则 $k_l<0$，由图 1 可知，满足上述两条件的直线只能经过第一、二、四象限，故它不经过第三象限.

注　用"补集思想"处理类似于"没有"、"不经过"，以及"至少"、"至多"一类的问题显得智慧、辩证而高效.

思考题

1. 甲、乙、丙三人共解出 100 道数学题，每人都解出了其中的 60 道题，将其中只有 1 人解出的题叫做难题，3 人都解出的题叫做容易题，试问：难题多还是容易题多?(多的比少的)多

几道题.

2. 设 a 是正数，$ax+y=2(x\geqslant 0,y\geqslant 0)$，记 $y+3x-\frac{1}{2}x^2$ 的最大值是 $M(a)$，试求：

(1) $M(a)$ 的表达式；

(2) $M(a)$ 的最小值.

3. 在半径为 1 的圆中，弦 $AB=\sqrt{2}$，C 为圆上一点，求 $\angle ACB$ 的度数.

4. 当 m 是什么整数时，关于 x 的一元二次方程 $mx^2-4x+4=0$ 与 $x^2-4mx+4m^2-4m-5=0$ 的根都是整数.

5. 若对二次函数 $f(x)=4x^2-2(p-2)x-2p^2-p+1$，在区间 $[-1,1]$ 内至少存在一点 c，使 $f(c)>0$，求实数 p 的取值范围.

思考题参考解答

1. 设 A,B,C 分别为甲、乙、丙三人各解出数学题的集合，则 $n(A\cup B\cup C)=100$，$n(A)=n(B)=n(C)=60$.

由基数公式得

$$n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)-n(A\cap B\cap C)=$$
$$n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cup B\cup C)=80$$

设 S 表示难题的个数，结合文氏图可知

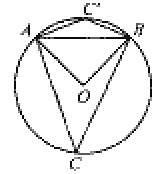
$$S=100-[n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)-$$
$$2n(A\cap B\cap C)]=100-80+n(A\cap B\cap C)$$

所以 $S-n(A\cap B\cap C)=20$，即难题比容易题多 20 道.

2. 将代数式 $y+3x-\frac{1}{2}x^2$ 表示为一个字母，由 $ax+y=2$ 解出 y 后代入消元，建立关于 x 的二次函数，逐步进行分类求 $M(a)$.

$$M(a)=\begin{cases}\frac{1}{2}(3-a)^2+2 & (0<a<1)\\ -\frac{2}{a^2}+\frac{6}{a} & (0\leqslant a\leqslant 2)\\ \frac{1}{2}(3-a)^2+2 & (2<a<3)\\ 2 & (a\geqslant 3)\end{cases}$$

3. 弦 AB 把圆分成两部分，点 C 在圆上的位置没有指明，因而要分 C 点在优弧上或劣弧上两种情况求解.



3 题图

如图，联结 OA,OB. 因 $OA=OB=1,AB=\sqrt{2}$，则

$$OA^2+OB^2=AB^2$$

即

$$\angle AOB=90^\circ$$

当点 C 在优弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上时，$\angle ACB=45^\circ$；

当点 C 在劣弧 $\overset{\frown}{AB}$ 上时，$\angle ACB=135^\circ$；

故 $\angle ACB=45^\circ$ 或 $\angle ACB=135^\circ$.

4. 本题涉及整数、一元二次方程及它的根的概念，因而应对 m 的取值范围进行讨论. 讨

论时,可以运用逐步缩小范围的方法.

根据题意,得

$$\begin{cases} m \neq 0 & ① \\ \Delta_1 = 16 - 16m \geqslant 0 & ② \\ \Delta_2 = 16m^2 - 4(4m^2 - 4m - 5) \geqslant 0 & ③ \\ m \text{ 为整数} & ④ \end{cases}$$

从而,$m = -1$,或 $m = 1$.

当 $m = -1$ 时,$mx^2 - 4x + 4 = 0$ 的根不是整数,不符合题意;

当 $m = 1$ 时,$mx^2 - 4x + 4 = 0$ 的两根为 $x_1 = x_2 = 2$;$x^2 - 4mx + 4m^2 - 4m - 5 = 0$ 的两根为 $x_1 = 5, x_2 = -1$.

故当 $m = 1$ 时,一元二次方程 $mx^2 - 4x + 4 = 0$ 与 $x^2 - 4mx + 4m^2 - 4m - 5 = 0$ 的根都是整数.

5. 因在 $[-1,1]$ 内至少存在一点 c,使 $f(c) > 0$ 的反面是对 $[-1,1]$ 中任一点 c,$f(c) \leqslant 0$,由此有

(补集法) 令

$$\begin{cases} f(-1) \leqslant 0 \\ f(1) \leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2p^2 + p + 1 \leqslant 0 \\ -2p^2 - 3p + 9 \leqslant 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p \leqslant -\dfrac{1}{2} \text{ 或 } p \geqslant 1 \\ p \leqslant -3 \text{ 或 } p \geqslant \dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$p \leqslant -3 \quad \text{或} \quad p \geqslant \frac{3}{2}$$

故符合题意的解是

$$-3 < p < \frac{3}{2}$$

另解(并集法):依题意,有 $f(-1) > 0$ 或 $f(1) > 0$,即 $2p^2 - p - 1 < 0$ 或 $2p^2 + 3p - 9 < 0$,即

$$-\frac{1}{2} < p < 1 \quad \text{或} \quad -3 < p < \frac{3}{2}$$

故
$$-3 < p < \frac{3}{2}$$

注:两种解法都涉及解不等式,但一是求交集,另一是求并集.

第三章　两大"支柱"思想

数学结论的真确性与推理的严谨性决定了数学发展的生长点和组织形态，从而确定了数学思想的两大支柱.关于两个集合间联系的对应思想，是数学发展的主要生长点；公理化与结构思想使我们能更好地认识集合元素间内在联系的组织形态，进而使数学大厦更好地确定.集合通过公理化而形成结构，数学正是赖此而成为更严谨的科学.

3.1　对应思想

"对应"是一个基本的数学概念.在远古时代，人类就已经知道用自己的手指或石子与货物(牛、羊等等)对应起来，进行计数.随着时间的推移，对应在数学中的作用越来越大，地位越来越重要.

对应是人的思维对两个集合间联系的把握.对应将各种类别、各种层次的对象联系起来，呈现出它们之间某些相似或相同的属性，使各种数学对象能够相互结合、转化和深入.中学数学中的各种表示、运算、函数及变换等等都是对应.人们运用这种对"对应"的认识来研究和解决数学问题即是对应思想的体现.对应思想的建立是人的认识能力的突出表现，它在中学的数学教学和解题中具有重要的地位.

在中学数学中，对应思想主要包括：映射思想、函数思想、变换思想、递归思想、数形结合思想等.

3.1.1　映射思想

映射是从一个集合到一个集合的单值对应.各种数学运算实质上都是映射.

例 1　设集合 $M=\{1,2,3,\cdots,1\,000\}$，现对 M 中的任一非空子集 X，令 a_X 是求 X 中最大数与最小数之和，那么所有这样的 a_X 的算术平均值是多少?

解　对 M 中的任一非空子集 $F=\{a_1,a_2,\cdots,a_i\}$(不妨设 $a_1<a_2<\cdots<a_i$)，与之对应的非空子集

$$F'=\{1\,001-a_1,1\,001-a_2,\cdots,1\,001-a_i\}$$

则

$$a_F=a_1+a_i$$

$$a_{F'}=(1\,001-a_1)+(1\,001+a_i)=2\,002-(a_1+a_i)$$

每一对这样的子集 F,F' 中最大数与最小数之和的算术平均值为 1 001.从而所有这样的 a_X 的算术平均值是 1 001.

例 2　对于 $\{1,2,3,\cdots,n\}$ 及其每一个非空子集，定义"交替和"如下：按照递减的顺序重新排列元素，然后从最大的数开始交替地减、加后继的数，例如 $\{1,2,4,6,9\}$ 排列成 $(9,6,4,2,1)$，交替和为 $9-6+4-2+1=6$，$\{5\}$ 的交替和就是 5.对 $n=7$，求所有交替和的总和为多少?

解 不妨规定空集中元素的交替和为0.将$\{1,2,3,\cdots,n\}$的2^n个子集分成两类:一类含n的有2^{n-1}个子集,另一类不含n的也有2^{n-1}个子集.将含n的子集$F=\{n,a_1,a_2,\cdots,a_m\}$与不含$n$的子集$F'=\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$建立对应关系,且其中一对中的两个子集的交替和之和为n,于是$\{1,2,3,\cdots,n\}$的所有元素的交替和$S=n\cdot 2^{n-1}$.故当$n=7$时,交替和为448.

例3 如图1所示,圆周上有$n(n\geqslant 6)$个点,每两点间作线段,若任何三条在圆内不共点,这些线段确定的顶点都在圆内的三角形的个数有多少?

解 对于圆周上的任意六个点A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6,每两点间作线段,这些线段确定的顶点都在圆内的三角形有且只有一个$\triangle DEF$,也即六边形$A_1A_2A_3A_4A_5A_6$与$\triangle DEF$是一一对应的,因此圆周上$n(n\geqslant 6)$个点能确定C_n^6个六边形,对应地确定C_n^6个顶点都在圆内的三角形.

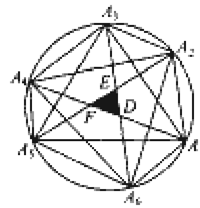


图1

3.1.2 函数思想

在中学数学中,把原像集合与像集合都是实数集或其子集的映射叫做函数(在多元的函数中原像集合为有序实数组成集合).

函数是数集之间的一种特殊对应,它是反映客观事物及其运动变化的一种重要形式,也是解决实际问题的有力工具.

函数思想的建立是数学从常量数学转入变量数学的枢纽,使数学能有效地揭示事物运动变化的规律,反映事物(集合)间的相互联系.它不仅使数学由研究状态进到研究过程,而且引起了传统的常量数学观点的更新.诸如方程、不等式、数列以及三角学等内容都可以统归到函数思想下进行研究.

如果把二元方程$F(x,y)=0$理解为隐函数,那么解析几何也处处运用函数思想.解析几何中的"参数法"(通过曲线的普通方程与参数方程互化来研究解决问题的方法),直角坐标与极坐标的互化,代数中的"换元法"等实质上都是复合函数思想的体现.

函数思想就是用联系、变化的观点,建立各变量间的依存(函数)关系,通过函数形式并利用函数的有关性质和方法达到解题目标的思想倾向.

函数思想也是一种解题观念,其运用范围并不局限于函数问题,它具有广泛的联系性与渗透性,常迁移到不等式、三角、数列、复数以及立体几何和解析几何等方面,运用函数思想解题,常可收到化难为易,化繁为简,化隐为显,甚至妙不胜收之效!

因此,函数是贯穿中学数学内容的一根红线,不仅是高中数学的中心,而且也是初中数学的一个基点.

(1)利用函数性质解题

例1 若$a,b,c\in\mathbf{R}$,求证:$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$.

证明 设$f(x)=x^2-(b+c)x+b^2+c^2-bc$.因$\Delta=(b+c)^2-4(b^2+c^2-bc)=-3(b-c)^2\leqslant 0$,又$f(x)$的二次项系数为1,则$x^2-(b+c)x+b^2+c^2-bc\geqslant 0$对一切实数$x$恒成立,故$f(a)=a^2-(b+c)a+b^2+c^2-bc\geqslant 0$,即$a^2+b^2+c^2\geqslant ab+bc+ca$.

例2 已知$3x^2+2y^2=2x$,求$x+y^2$的最小值.

解 因 $3x^2+2y^2=2x$,则 $y^2=x-\frac{3}{2}\cdot x^2$,又 $y^2\geqslant 0$,则 $0\leqslant x\leqslant \frac{2}{3}$. 从而

$$x+y^2=x+(x-\frac{3}{2}x^2)=-\frac{3}{2}(x-\frac{2}{3})^2+\frac{2}{3}$$

因 $0\leqslant x\leqslant \frac{2}{3}$,则当 $x=0$ 时,$x+y^2$ 取最小值为 0.

例 3 解方程:$3x(3+\sqrt{9x^2+1})+(2x+1)[3+\sqrt{(2x+1)^2+1}]=0$.

解 设 $f(t)=t(3+\sqrt{t^2+1})$,易知 $f(t)$ 是奇函数,且是 $\mathbf{R}$ 上的增函数. 设 $t_1=3x$,$t_2=2x+1$,则原方程即

$$f(t_1)+f(t_2)=0 \quad 即 \quad f(t_1)=f(-t_2)$$

故 $t_1=-t_2$,即 $3x=-(2x+1)$,解得 $x=-\frac{1}{5}$ 是原方程唯一实根.

例 4 设 $|x|<1$,$|y|<1$,$|z|<1$,求证:$xy+yz+zx+1>0$.

证明 设 $f(x)=xy+yz+1=(y+z)x+yz+1$,问题转化为证明 $f(x)>0$ 在 $(-1,1)$ 上恒成立.

当 $y+z=0$ 时,$f(x)=yz+1=-y^2+1>0$;

当 $y+z>0$ 时,$f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上递增,则 $f(-1)<f(x)<f(1)$;

当 $y+z<0$ 时,$f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上递减,则 $f(-1)>f(x)<f(1)$.

由 $f(1)=(y+1)(z+1)>0$ 及 $f(-1)=(y-1)(z-1)>0$ 知,$f(x)>0$ 恒成立,即 $xy+yz+zx+1>0$.

例 5 已知 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathbf{R}$,$x_1+x_2+\cdots+x_n\neq 0$,求证:$\frac{|x_1+x_2+\cdots+x_n|}{1+|x_1+x_2+\cdots+x_n|}<\frac{|x_1|}{1+|x_1|}+\frac{|x_2|}{1+|x_2|}+\cdots+\frac{|x_n|}{1+|x_n|}$.

证明 作函数 $f(x)=\frac{x}{1+x}$,知 $f(x)$ 在 $x\in\mathbf{R}^+$ 为增函数.

因
$$|x_1+x_2+\cdots+x_n|\leqslant|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|$$
则
$$f(|x_1+x_2+\cdots+x_n|)\leqslant f(|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|)$$
即
$$\frac{|x_1+x_2+\cdots+x_n|}{1+|x_1+x_2+\cdots+x_n|}\leqslant\frac{|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|}{1+|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|}=$$
$$\frac{|x_1|}{1+|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|}+\frac{|x_2|}{1+|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|}+\cdots+$$
$$\frac{|x_n|}{1+|x_1|+|x_2|+\cdots+|x_n|}<\frac{|x_1|}{1+|x_1|}+\frac{|x_2|}{1+|x_2|}+\cdots+\frac{|x_n|}{1+|x_n|}$$

原不等式得证.

例 6 已知 $a>0$,$b>0$,$a+b=1$,求证:$(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})\geqslant\frac{25}{4}$.

证明 $(a+\frac{1}{a})(b+\frac{1}{b})=2+ab+\frac{1}{ab}$.

作 $f(x)=x+\frac{1}{x}$,则 $f(x)$ 在 $x\in(0,\frac{1}{4}]$ 上为递减函数且 $ab\leqslant(\frac{a+b}{2})^2=\frac{1}{4}$,则

$$2+ab+\frac{1}{ab}=2+f(ab)\geqslant 2+f(\frac{1}{4})=2+4+\frac{1}{4}=\frac{25}{4}$$

故
$$\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(b+\frac{1}{b}\right)\geqslant\frac{25}{4}$$

例 7 已知 $x,y\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$，$a\in\mathbf{R}$ 且 $x^3+\sin x-2a=0$，$8y^3+\sin 2y+2a=0$，求 $\sin(x+2y)$的值.

解 由已知条件得
$$\begin{cases}x^3+\sin x-2a=0\\(-2y)^3+\sin(-2y)-2a=0\end{cases}$$
所以 x 和 $-2y$ 都是关于 t 的方程 $t^3+\sin t-2a=0$ 的实根. 设 $f(t)=t^3+\sin t-2a$，易知 $f(t)$是$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上的增函数，所以方程 $t^3+\sin t-2a=0$ 只有一个实数解. 由 $x,y\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$知 $x-2y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，所以要使 x，$-2y$ 都是方程 $t^3+\sin t-2a=0$ 在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上的实数解，故 $x=-2y$，即 $x+2y=0$，所以 $\sin(x+2y)=0$.

例 8 已知双曲线以两条坐标轴为对称轴，焦点在 y 轴上，它的实轴上为 $2\sin\theta\left(\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3}\right)$，又这双曲线上任意一点 $P(x,y)$到定点 $M(1,0)$的最短距离为$\frac{1}{\sin\theta}$，求该双曲线离心率的取值范围.

解 设双曲线方程为$\frac{y^2}{\sin^2\theta}-\frac{x^2}{b^2}=1$，则
$$|PM|^2=(x-1)^2+y^2=(x-1)^2+\sin^2\theta\left(1+\frac{x^2}{b^2}\right)=\left(1+\frac{\sin^2\theta}{b^2}\right)x^2-2x+1+\sin^2\theta$$
因为 $x\in\mathbf{R}$，所以
$$|PM|^2_{\min}=1+\sin^2\theta-\frac{b^2}{b^2+\sin^2\theta}$$
依题设有
$$1+\sin^2\theta-\frac{b^2}{b^2+\sin^2\theta}=\frac{1}{\sin^2\theta}\Rightarrow b^2=\frac{\sin^6\theta+\sin^4\theta-\sin^2\theta}{1-\sin^4\theta}$$
于是
$$e^2=\left(\frac{c}{a}\right)^2=\frac{b^2+\sin^2\theta}{\sin^2\theta}=\frac{\sin^2\theta}{1-\sin^4\theta}$$

由 $b^2>0$ 及 $\frac{\pi}{4}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{3}$，得$\frac{\sqrt{5}-1}{2}<\sin^2\theta\leqslant\frac{3}{4}$，令 $t=\sin^2\theta\left(t\in\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2},\frac{3}{4}\right]\right)$，则 $e^2=\frac{t}{1-t^2}=\frac{1}{\frac{1}{t}-t}$，易知在 $t\in\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2},\frac{3}{4}\right]$上，$f(t)=\frac{1}{\frac{1}{t}-t}$是增函数，故 $f\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)<e^2\leqslant f\left(\frac{3}{4}\right)$，即 $1<e^2\leqslant\frac{12}{7}$，所以 $1<e\leqslant\frac{2\sqrt{21}}{7}$为所求.

例 9 求方程$\frac{x}{2^x-1}+2x^2+\frac{1}{2}x-\frac{7}{2}=0$的所有实根之和.

解 作
$$f(x)=\frac{x}{2^x-1}+2x^2+\frac{1}{2}x-\frac{7}{2}=\frac{x(2^x+1)}{2(2^x-1)}+2x^2-\frac{7}{2}$$

因
$$f(-x)=-x\cdot\frac{2^{-x}+1}{2(2^{-x}-1)}+2x^2-\frac{7}{2}=x\cdot\frac{2^x+1}{2(2^x-1)}+2x^2-\frac{7}{2}=f(x)$$
知 $f(x)$ 为偶函数,所以原方程的实根关于原点对称,又 $f(x)=0$ 显然有实根(如 $f(1)=0$),所以原方程所有实根之和为 0.

例 10　求多项式 $(x^2+x-1)^9(2x+1)^4$ 展开式中 x 的奇次项系数之和.

解　作
$$f(x)=(x^2+x-1)^9(2x+1)^4$$
设
$$f(x)=(x^2+x-1)^9(2x+1)^4=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{22}x^{22}$$
令 $x=1$
$$f(1)=3^4=a_0+a_1+a_2+a_3+\cdots+a_{21}+a_{22} \quad ①$$
令 $x=-1$
$$f(-1)=-1=a_0-a_1+a_2-a_3+\cdots-a_{21}+a_{22} \quad ②$$
① - ②得
$$3^4+1=2(a_1+a_3+\cdots+a_{21})$$
所以 x 的奇次项系数之和为 41.

由函数的思想不难理解以下两个结论:

结论 1
$$a\geqslant f(x)\Leftrightarrow a\geqslant[f(x)]_{\max} \quad (3.1.1)$$
结论 2
$$a\leqslant f(x)\Leftrightarrow a\leqslant[f(x)]_{\max} \quad (3.1.2)$$

例 11　当实数 k 在什么范围内取值时,圆 $(x-1)^2+y^2=1$ 上任意一点 (x,y),能使不等式 $x+y+k\geqslant0$ 总成立?

解　因
$$(x-1)^2+y^2=1$$
可令
$$x=1+\cos\theta,\quad y=\sin\theta$$
则
$$x+y+k\geqslant0\Leftrightarrow k\geqslant-(1+\cos\theta+\sin\theta)$$
令
$$f(\theta)=-(\sin\theta+\cos\theta+1)=-\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})-1$$
又
$$[f(\theta)]_{\max}=\sqrt{2}-1$$
由结论(3.1.1)知,$k\geqslant\sqrt{2}-1$.

例 12　若不等式 $4\leqslant3\sin^2x-\cos^2x-4\cos x+a^2\leqslant20$ 对一切实数 x 都成立,求实数 a 的取值范围.

解　由
$$3\sin^2x-\cos^2x-4\cos x=-4\cos^2x-4\cos x+3=-4(\cos x+\frac{1}{2})^2+4$$

由题设知,不等式 $0\leqslant-4(\cos x+\frac{1}{2})^2+a^2\leqslant16$ 对一切实数 x 都成立 $\Leftrightarrow -a^2\leqslant-4(\cos x+\frac{1}{2})^2\leqslant16-a^2$ 对一切实数 x 都成立.

令 $f(x)=-4(\cos x+\frac{1}{2})^2$,则 $[f(x)]_{\max}=0$,$[f(x)]_{\min}=-9$.

由结论(3.1.1)知
$$16-a^2\geqslant0 \quad ①$$
由结论(3.1.2)知

$$-a^2 \leqslant -9 \quad ②$$

由①、②得 $9 \leqslant a^2 \leqslant 16$，所以 a 的取值范围是

$$-4 \leqslant a \leqslant -3 \quad 或 \quad 3 \leqslant a \leqslant 4$$

(2)利用函数图象解题

例 13 等差数列$\{a_n\}$的前 m 项和为 30，前 $2m$ 项和为 100，则它的前 $3m$ 项和为（　　）

(A)130　　(B)170　　(C)210　　(D)260

解 因$\{a_n\}$为等差数列，则$\frac{S_n}{n}$为 n 的一次函数，点 $B_n(n,\frac{S_n}{n})(n\in \mathbf{N})$共线．从而，$(m,\frac{30}{m})$，$(2m,\frac{100}{2m})$，$(3m,\frac{S_{3m}}{3m})$三点共线，即

$$\frac{\frac{100}{2m}-\frac{30}{m}}{2m-m}=\frac{\frac{S_{3m}}{3m}-\frac{100}{2m}}{3m-2m}$$

故 $S_{3m}=210$．故选(C)．

例 14 等差数列$\{a_n\}$中，$S_p=\frac{p}{q}$，$S_q=\frac{q}{p}(p\neq q)$，求证：$S_{p+q}=\frac{(p+q)^2}{pq}$．

分析 本例的常规解法是先求 a_1 和 d，再求 S_{p+q}，显然较繁．若用函数思想，由点 $B_n(n,\frac{S_n}{n})$共线，则可获简证．

证明 因$\{a_n\}$为等差数列，则$(p,\frac{S_p}{p})$，$(q,\frac{S_q}{q})$，$(p+q,\frac{S_{p+q}}{p+q})$三点共线，即$(p,\frac{1}{q})$，$(q,\frac{1}{p})$，$(p+q,\frac{S_{p+q}}{p+q})$三点共线，即

$$\frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}{q-p}=\frac{\frac{S_{p+q}}{p+q}-\frac{1}{q}}{(p+q)-p}$$

故

$$S_{p+q}=\frac{(p+q)^2}{pq}$$

例 15 若不等式 $x^2-\log_a x<0$ 对 $x\in(0,\frac{1}{2})$恒成立，求实数 a 的取值范围．

分析 本题从解不等式很难入手，若转化为函数 $y=x^2$ 与 $y=\log_a x$ 从图象入手比较容易解决．

解析 原不等式为 $x^2-\log_a x<0$，设 $y=x^2$，$y=\log_a x$，由 $0<x<\frac{1}{2}<1$，而 $\log_a x>x^2>0$，故 $0<a<1$，作出 $f(x)$在 $x\in(0,\frac{1}{2})$内的图象，如图 2 所示．由 $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{4}$，知 $A(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$，当 $y=\log_a x$ 的图象经过点 A 时$\frac{1}{4}=\log_a\frac{1}{2}$，解得 $a=\frac{1}{16}$．因当 $x\in(0,\frac{1}{2})$时 $\log_a x>x^2$，故 $y=\log_a x$ 的图象按如图虚线位置变化，从而$\frac{1}{16}\leqslant a<1$．

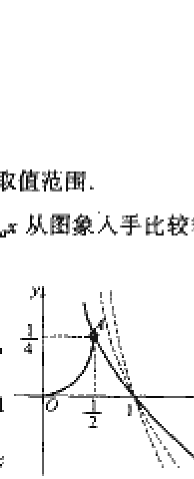


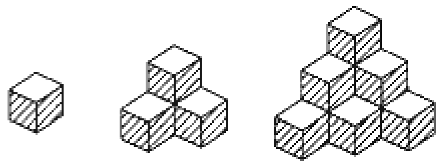
图 2

(3)运用函数思想探索规律

例 16 图 3 所示是棱长为 a 的小正方体摆放而成．按照这样的方法继续摆放，自上而下分别叫第一层、第二层…第 n 层，若第 n 层的小正方体的个数记为 s．解答下列问题：

(1)按照要求填表：

n	1	2	3	4	…
s	1	3	6		…



(a) (b) (c)

图 3

(2)写出当 $n=10$ 时，$s=$________.

解 先猜想存在一次关系，即设 $s=an+b$，把(1,1)，(2,3)分别代人解之，得所求关系式为 $s=2n-1$，但当 $n=3$ 时，s 计算结果为 5，不符. 故 s，n 关系的猜想调整为二次关系，即设 $s=an^2+bn+c$，把(1,1)，(2,3)，(3,6)分别代人解之，得所求关系式为 $s=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$，或 $s=\frac{n(n+1)}{2}$，易求得当 $n=4$ 时，$s=10$，代人 $s=\frac{n(n+1)}{2}$验证无误. 此时求 $n=10$ 时 s 的值已不是问题.

通过设函数关系式，不仅可以寻找到规律型探索题通项的规律，而且同样适用于数列问题通项的寻找.

例 17 古希腊数学家把数 1,3,6,10,15,21,…，叫做三角形数，它有一定的规律性，则第 24 个三角形数与第 22 个三角形的差为________.

解 引人自变量 n 和因变量 s，列表得

n	1	2	3	4	5	…
s	1	3	6	10	15	…

在猜想一次关系未获通过的情况下，调整为二次关系 $s=an^2+bn+c$，把(1,1)，(2,3)，(3,6)分别代人解之，所求得关系式为 $s=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n$，或化为 $s=\frac{n(n+1)}{2}$. 以(4,10)，(5,15)验证均获通过. 由此可求得第 24 个与第 22 个三角形数分别为 300，253，故这两个三角形个数的差为 47.

例 18 同室四人各写一张贺年卡，先集中起来，然后每人从中拿出一张别人的贺年卡，则四张贺年卡不同的分配方式有多少种？

解 现在我们用间接法，把所有分配方式分为：都拿到别人的贺卡即为 $f(4)$；只有 1 人拿到自己的贺卡即 $f(3)$；只有 2 个人拿到自己的贺卡即 $f(2)$；全部人都拿到自己的贺卡只有 1 种. 易知 $f(3)=2$ 和 $f(2)=1$，所以

$$A_4^4=f(4)+C_4^1f(3)+C_4^2f(2)+1$$

由此得

$$f(4)=A_4^4-4f(3)-6f(2)-1=9 \text{ 种}$$

注 这种做法看起来复杂,但对于同类数目更为复杂的问题就显出其独到之处了.

大家不妨把上面的问题改为 5 个或 6 个人,用函数的思想方法试一试.

例如 5 个人的情况:

$$A_5^5 = f(5) + C_5^1 f(4) + C_5^2 f(3) + C_5^3 f(2) + 1$$

其中 $$f(4) = 9,\quad f(3) = 2,\quad f(2) = 1$$

故 $$f(5) = A_5^5 - C_5^1 f(4) - C_5^2 f(3) - C_5^3 f(2) - 1 = 44 \text{ 种}$$

3.1.3 变换思想

变换是集合到它自身的一种特殊对应.

根据我们对"变换"的狭义的定义和广义的解释,中学数学中研究的一切对象都可以置于"变换"观点下加以考察.纵观中学数学中的主要变换,除几何变换外还有解析式的恒等变换(解析式的值恒定),方程、不等式的同解变换(解集不变)等,命题及命题形式的等价变换(真值恒等).解析几何中的坐标变换,作为几何变换的"点变换"的相对性概念当然也属于"变换".中学数学的解题活动,实质上都是在保持一定不变关系下的"变换"过程,它使问题向所要求的方向转化,直至获得解决.

所谓变换思想,就是运用"变换"观点处理数学对象的一种思维倾向.

(1)代数变换

代数变换中,常有解析式的恒等变换,方程、不等式的同解变换(形),数学结构的同构变换等等.

例 1 证明任何 6 个人的聚会,其中总会有 3 个人互相认识或有 3 个人都不认识.

分析 在平面上取定 6 个点 A,B,C,D,E,F(任三点不共线)分别代表这 6 个人,将 6 个点两两连线,共得 $C_6^2 = 15$ 条线.约定:两点连线涂以红色表示相对应代表的两人认识,两点连线涂以蓝色表示相对应代表的两人不认识.于是原问题等价于单色三角形问题:用红蓝两色涂边法去联结平面上任三点不共线的 6 个点,必然从中找到或者三边全红或者三边全蓝的三角形.

证明 从顶点 A 出发,由 A 发出的 5 条线中必有三条同色,不妨设 AB,AC,AD 同红,再看 B,C,D 三点两两连线的三边中,若有一边涂红,比如 BC 涂红,则得三边全红的 $\triangle ABC$,否则 $\triangle BCD$ 是三边全蓝的三角形.

例 2 求不定方程 $x_1 + x_2 + \cdots + x_m = n\ (n, m \in \mathbf{N})$ 的非负整数解的个数.

分析 设计模型:n 个不可辨别的球放入 m 个不同的盒子中.球的每一种放法对应着方程的一组解;反之,方程的每一组非负整数解对应着球在盒中的一种放法.

解 因为 n 个不可辨别的球放入 m 个不同的盒子中放法的总数为 C_{n+m-1}^n,所以方程的非负整数解的个数为 C_{n+m-1}^n.

例 3 任给 7 个实数,证明其中必有两个数 x,y 满足 $0 \leqslant \dfrac{x-y}{1+xy} \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

分析 建立区间 $(-\infty, +\infty)$ 到区间 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 的一一映射 $f: x \to \tan\alpha$,任给的 7 个实数一一对应于 $\left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$ 上的 7 个角弧度.问题转化为:必有两个角弧度 $\alpha_1, \alpha_2 \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$,使 $0 \leqslant \dfrac{\tan\alpha_1 - \tan\alpha_2}{1 + \tan\alpha_1 \cdot \tan\alpha_2} \leqslant \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

证明　将区间$(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$分成6等分：$(-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{3})$，$[-\frac{\pi}{3},-\frac{\pi}{6})$，$[-\frac{\pi}{6},0)$，$[0,\frac{\pi}{6})$，$[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3})$，$[\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2})$，由抽屉原则必有两个角弧度（不妨设$\alpha_1\geqslant\alpha_2$）落在同一小区间内，从而$0\leqslant\alpha_1-\alpha_2\leqslant\frac{\pi}{6}$，由正切函数的单调性：$0\leqslant(\alpha_1-\alpha_2)\leqslant\tan\frac{\pi}{6}$，所以

$$0\leqslant\frac{\tan\alpha_1-\tan\alpha_2}{1+\tan\alpha_1\cdot\tan\alpha_2}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$$

记$\tan\alpha_1$，$\tan\alpha_2$对应的实数分别为x，y，有$0\leqslant\frac{x-y}{1+xy}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$.

（2）几何变换

几何变换就是将图形看作点的集合，对于两个图形G与G'，如果它们之间存在一个一一对应关系，则称图形G与G'之间存在一个几何变换使图形G变为图形G'.

中学数学中常见的几何变换有：

合同变换——保持图形的形状与大小不变.合同变换中，又有平移变换、反射变换、旋转变换.

相似变换——只保持图形的形状不变.相似变换中的一特征情形，就是位似变换.

仿射变换——只保持平行性，结合性不变.（在坐标系中，两坐标轴角不一定是90°，两坐标轴长度单位可以不统一.）

例4　如图4，已知平面上三个半径相等的圆圆O_1，圆O_2，圆O_3两两相交于A,B,C,D,E,F.求证：弧$\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{CD}$，$\overset{\frown}{EF}$的和等于180°.

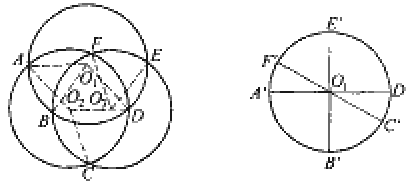


图4

证明　设这三个圆心与交点的连线如图4所示，易知AO_2DO_1为平行四边形.即知$DO_2\mathrel{\underline{\parallel}}AO_1$.

同理，$O_3E\mathrel{\underline{\parallel}}BO_1$，$O_3F\mathrel{\underline{\parallel}}CO_2$.

于是，可分别将圆O_2，圆O_3平移使之与圆O_1重合.

设$CD\xrightarrow{\text{平移}}C'D'$，$EF\xrightarrow{\text{平移}}E'F'$，则$A'$，$O_1$，$D'$共线，$B'$，$O_1$，$E'$共线，$C'$，$O_1$，$F'$共线.由此即知

$$\angle AO_1B+\angle CO_2D+\angle EO_3F=\angle AO_1B+\angle C'O_1D'+\angle E'O_1F'=180°$$

证毕.

例5　已知：点E和G分别是凸四边形$ABCD$的边AB，CD的中点，矩形$EFGH$满足顶点F，H分别在边BC，AD上.求证：四边形$ABCD$的面积是矩形$EFGH$的面积的两倍.

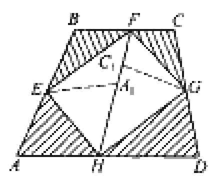


图5

分析　如图5，只要能证明沿矩形的边把四边形$ABCD$在矩形外面的部分（阴影部分）反射到矩形内部后，恰能填满矩形，既没有空隙又不相重叠就可以了.

证明　因为E是AB的中点，所以$EA=EB$，又$\angle FEH=90°$，所以

$$\angle AEH+\angle BEF=\angle FEH$$

于是将四边形 $ABCD$ 位于矩形外部的部分反射到其内部后，EB 与 EA 重合于 EA_1，同理，GC 与 GD 重合于 GC_1．又$\angle AHE+\angle DHG=\angle EHG$，所以 HA_1 与 HC_1 在一条直线上．

同理 FC_1 与 FA_1 也在一条直线上．

若 A_1 与 C_1 重合于一点，于是反射后恰好填满．

若 A_1 与 C_1 不重合于一点，则 A_1，C_1 都在直线 FH 上，从而也恰好填满．

所以命题得证．

例 6 如图 6，在任意凸四边形 $ABCD$ 中，求证：$AC\cdot BD\leqslant AB\cdot CD+AD\cdot BC$．

分析 考虑

$$AC\cdot BD\leqslant AC(BE+ED)=AB\cdot CD+AD\cdot BC$$

使得 $$AC\cdot BE=AB\cdot CD,\quad AC\cdot DE=BC\cdot AD$$

成立的这样的点 E 是否存在？由 $AC\cdot BE=AB\cdot CD$，得$\dfrac{BE}{AB}=\dfrac{CD}{AC}$，能否找到$\triangle ABE\backsim\triangle ACD$．

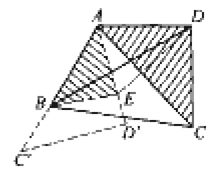


图 6

证明 以 A 为中心，先把$\triangle ACD$ 顺时针方向旋转$\angle BAC$ 得$\triangle AC'D'$，再以定比 $k=\dfrac{AB}{AC}$ 为位似比，变换成$\triangle ABE$，联结 ED，则$\triangle ABE\backsim\triangle ACD$，且$\triangle AED\backsim\triangle ABC$（两边对应成比例，夹角相等），则$\dfrac{BE}{AB}=\dfrac{DC}{AC}$，即

$$BE\cdot AC=DC\cdot AB$$

同理可得 $$DE\cdot AC=BC\cdot AD$$

两式相加得 $$AC(BE+DE)=AB\cdot CD+AD\cdot BC$$

又 $$BE+DE\geqslant BD$$

故 $$AC\cdot BD\leqslant AB\cdot CD+AD\cdot BC$$

当 E 在 BD 上时，$ABCD$ 是圆内接四边形，上式取等号．

例 7 如图 7，$\odot O_1$ 与$\odot O_2$ 外切于点 A，半径分别为 r_1 和 r_2，PB，PC 分别为$\odot O_1$，$\odot O_2$ 的切线，B，C 为切点，且 $PB:PC=r_1:r_2$，又 PA 交$\odot O_2$ 于点 E．求证：$\triangle PAB\backsim\triangle PEC$．

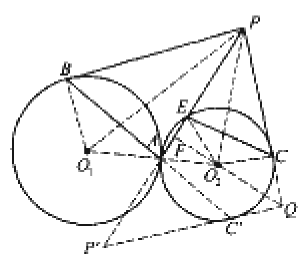


图 7

证法 1（相似变换） 联结 BO_1，PO_1，PO_2，EO_2，CO_2，注意到 O_1，A，O_2 三点共线，由 $PB:PC=r_1:r_2$，有 $\mathrm{Rt}\triangle PBO_1\backsim\mathrm{Rt}\triangle PCO_2$，从而 $PO_1:PO_2=O_1A:O_2A$，由角平分线性质定理的逆定理知$\angle APO_1=\angle O_2PA$．

又$\angle O_2AP=\angle O_2EA$，有$\angle O_1AP=\angle O_2EP$，从而$\triangle O_1AP\backsim\triangle O_2EP$，则 $PA:PE=r_1:r_2$，即 $PA:PE=PB:PC$．

而$\angle BPA=\angle CPE$，故$\triangle PAB\backsim\triangle PEC$．

证法 2（位似变换） 考虑以 A 为位似中心的变换，把$\odot O_1$ 变到$\odot O_2$，$\triangle PAB$ 变到$\triangle P'AC'$，则 $P'C'$切$\odot O_2$ 于 C'．由 $PB:P'C'=r_1:r_2=PB:PC$ 知 $P'C'=PC$．

延长 $P'C'$ 与 PC 的延长线相交于点 Q，由 $QC'=QC$，知$\triangle PQP'$ 为等腰三角形．

联结 QO_2 并延长交 AE 于 F，则 $QF \perp AE$，故 QF 平分 AE，则 $AP' = PE$. 可知 $\triangle PEC \cong \triangle P'AC \backsim \triangle PAB$.

例 8　如图 8，$AB // CD_2$，$AC // BD_1$，A 在 D_1D_2 上. 求证：$S^2_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD_1} \cdot S_{\triangle ACD_2}$.

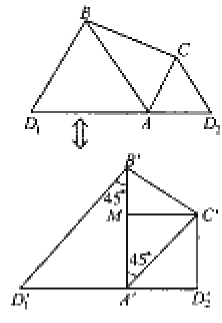


图 8

证明　因梯形是仿射不变形，所以题设中的两个梯形可由两个特殊梯形经仿射变换后得到. 设梯形 $C'B'A'D'_2$ 和 $C'B'D'_1A'$ 皆为直角梯形，且 $C'D'_2 = D'_2A' = MB' = 1$. 梯形 $A'D'_2C'B' \xrightarrow{仿射}$ 梯形 AD_2CB，梯形 $A'C'B'D'_1 \xrightarrow{仿射}$ 梯形 $ACBD_1$，则 $S_{\triangle A'B'C'} = \frac{1}{2}A'B' \cdot MC' = 1$，$S_{\triangle A'B'D'_1} = \frac{1}{2}A'B' \cdot A'D'_1 = 2$，$S_{\triangle A'C'D'_2} = \frac{1}{2}$，从而 $S^2_{\triangle A'B'C'} = S_{\triangle A'B'D'_1} \cdot S_{\triangle A'C'D'_2}$，故 $S^2_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD_1} \cdot S_{\triangle ACD_2}$.

(3)线性变换

这里的线性变换，实际上是指正比例代换，是一种特殊的仿射变换.

对椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$，作变换 $T:\begin{cases} x = ax' \\ y = by' \end{cases}$，则椭圆变成了单位圆 $x'^2 + y'^2 = 1$，可以验证，变换 T 下的不变性(量)有：

(i)点分线段所成的比是不变量. 如线段的中点变成对应线段的中点；

(ii)两平行直线仍变为两平行直线；

(iii)两相交(相切、相离)的曲线仍变为两相交(相切、相离)的曲线.

变换 T 把椭圆变为圆，根据圆的平几性质和上述不变性(量)，可巧妙地解决与椭圆有关的问题.

例 9　过点 $P(8,4)$ 作椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ 的两条切线，切点为 A，B，求直线 AB 的方程.

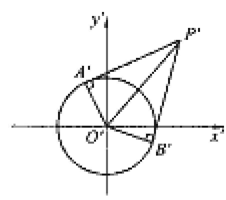


图 9

解　作变换 $\begin{cases} x = 4x' \\ y = 2y' \end{cases}$，则椭圆变为圆 $x'^2 + y'^2 = 1$，点 $P(8,4)$ 变为 $P'(2,2)$. 如图 9，由平几性质可知 $A'B'$ 是以 $O'P'$ 为直径的圆和单位圆的公共弦，上两圆方程 $(x'-1)^2 + (y'-1)^2 = 2$ 和 $x'^2 + y'^2 = 1$ 相减得到直线 $A'B'$ 的方程 $2x' + 2y' - 1 = 0$，由 $\begin{cases} x = 4x' \\ y = 2y' \end{cases}$ 得 AB 方程为 $x + 2y - 2 = 0$.

例 10　已知椭圆 $\frac{x^2}{24} + \frac{y^2}{16} = 1$，直线 $l: \frac{x}{12} + \frac{y}{8} = 1$. P 是 l 上一点，射线 OP 交椭圆于点 R，又点 Q 在 OP 上且满足 $|OQ| \cdot |OP| = |OR|^2$. 当点 P 在 l 上移动时，求点 Q 的轨迹方程.

(1995 年全国高考理科数学第 26 题)

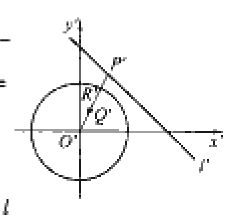


图 10

分析　作变换 $\begin{cases} x = 2\sqrt{6}x' \\ y = 4y' \end{cases}$，则椭圆变为圆 $x'^2 + y'^2 = 1$，直线 l

变为 l'.$\sqrt{6}x' + 3y' - 6 = 0$. 已知关系式化为 $\frac{|OQ|}{|OR|} = \frac{|OR|}{|OP|}$，此比值在变换下为不变量，则 $\frac{|O'Q'|}{|O'R'|} = \frac{|O'R'|}{|O'P'|}$. 又 $|O'R'| = 1$，则 $\frac{|O'P'|}{|O'Q'|} = \frac{1}{|O'Q'|^2}$. 如图 10，设 $Q'(x_0, y_0)$，$P'(x_p, y_p)$，$\frac{P'O'}{O'Q'} = \lambda = -\frac{1}{|O'Q'|^2} = -\frac{1}{x_0^2 + y_0^2}$，则 $0 = \frac{x_p + \lambda \cdot x_0}{1 + \lambda}$，$0 = \frac{y_p + \lambda \cdot y_0}{1 + \lambda}$，则 $x_p = -\lambda x_0 = \frac{x_0}{x_0^2 + y_0^2}$，$y_p = -\lambda y_0 = \frac{y_0}{x_0^2 + y_0^2}$，代入直线 l' 方程整理得 $6(x_0^2 + y_0^2) - \sqrt{6}x_0 - 3y_0 = 0(x_0^2 + y_0^2 \neq 0)$，由 $\begin{cases} x = 2\sqrt{6}x_0 \\ y = 4y_0 \end{cases}$，得 Q 点轨迹方程为 $2(x-1)^2 + 3(y-1)^2 = 5$（x, y 不同时为零）.

3.1.4 对称思想

对称思想的核心是对称变换.

广义地说，"对称变换"是一种在保持一定不变性下的变换，有限次地重复施行这一变换，可使对象回复到自身；一个集合在一定的对称变换下的不变性就叫做"对称性".[25]

几何中的轴（面）对称和中心对称是最直观的对称. 平面图形绕其内一定点旋转 $\frac{2\pi}{n}$（$n \in \mathbf{N}$）的变换，也是常见的对称变换. 代数中的对称有的可借助于几何直观来理解，如实数与其相反数的对称，复数与其共轭复数的对称；当然，也未必都要借助于几何直观，例如"对称多项式"（其中任意两个变元对换下的不变性），"轮换对称多项式"（其中各个变元轮换下的不变性）.

也可把函数的周期性看成"对称性"，因为周期函数的图象是无限延伸的曲线，在一定的平移下（平移若干最小正整周期）可重合于自身，从而表现出"整体不变性".

我们还可把两个命题间的"对偶关系"理解为对称. 因为互相对偶的命题间具有结构上的不变关系. 例如集合运算中的德·摩根律就有两种对称的形式：$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$ 和 $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$；在几何学中还有"平面对偶"和"空间对偶"的命题.

再有一种是问题间的对偶. 例如数学规划问题，即"在遵循一定的约束条件下使目标函数取最大（小）值"的问题，其对偶问题的构成法为：令原问题中的目标函数取定值作为约束条件（之一），而把原问题中的约束条件中的某个量作为目标函数，使这目标函数取最小（大）值. 例如若原问题为"已知矩形周长为 p，求使矩形面积 S 最大时的边长"，则其对偶问题是"已知矩形面积为 S，求使矩形周长 p 最小时的边长". 这样构成的互相对偶的问题，它们的解是相同的，它们也具有结构上的对称性.

对称思想可以说是数学中的一种美学思想. 这在平面解析几何内容中显得更为突出.[12],[16]

例 1 （Ⅰ）若椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ 的弦 CD 与长轴 A_1A_2 垂直，设直线 A_1C 与直线 A_2D 的交点为 P，则 P 点的轨迹为双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$.

（Ⅱ）反之，若双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ 的弦 CD 与实轴 A_1A_2 垂直，设直线 A_1C 与直线 A_2D 的交点为 P，则 P 点的轨迹为椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$.

证明　（Ⅰ）如图 11，设 C 的坐标为 (x_0, y_0)，则 D 的坐标为 $(x_0, -y_0)$，且

$$\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{-y_0^2}{x_0^2-a^2}=\frac{b^2}{a^2} \qquad ①$$

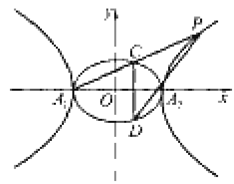


图 11

又直线 A_1C，A_2D 的方程分别为

$$\begin{cases} y=\dfrac{y_0}{x_0+a}(x+a) \\ y=\dfrac{-y_0}{x_0-a}(x-a) \end{cases}$$

两式相乘并把式①代入得 $y^2=\frac{b^2}{a^2}(x^2-a^2)$，即

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

同理可以证明（Ⅱ）.

例 2　（Ⅰ）椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两条相互垂直的切线的交点 P 的轨迹经过双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的焦点.

（Ⅱ）$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的两条相互垂直的切线的交点 P 的轨迹经过椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的焦点.

证明　（Ⅰ）$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的任意两条相互垂直的切线的交点 P 的坐标为 (u, v)，又设切线的斜率为 k，则切线方程为 $y-v=k(x-u)$，将其代入椭圆方程并化简得

$$(b^2+a^2k^2)x^2+2a^2(v-ku)kx+a^2(v-ku)^2-a^2b^2=0$$

由 $\Delta=[2a^2(v-ku)k]^2-4(b^2+a^2k^2)[a^2(v-ku)^2-a^2b^2]=0$

化简得　$(a^2-u^2)k^2+2uvk+b^2-v^2=0$

由题可知　$k_1k_2=\frac{b^2-v^2}{a^2-u^2}=1$

故　$u^2+v^2=a^2+b^2$

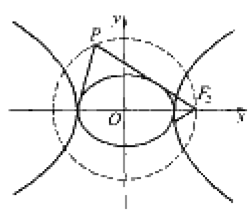


图 12

即切点 P 的轨迹为圆 $u^2+v^2=a^2+b^2$，显然经过双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的焦点.

（Ⅱ）由对称性可知，只要证明：过双曲线的焦点（不妨设右焦点 F_2）且倾斜角分别为 $\frac{\pi}{4}$ 和 $\frac{3\pi}{4}$ 的直线与椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 都相切.

于是，将 $y=-x+\sqrt{a^2+b^2}$ 代入椭圆方程并化简得

$$(b^2+a^2)x^2-2a^2\sqrt{a^2+b^2}\,x+a^4=0$$

即　$\Delta=4a^4(a^2+b^2)-4(a^2+b^2)a^4=0$

故直线 $y=-x+\sqrt{a^2+b^2}$ 与椭圆相切. 同理，直线 $y=x+\sqrt{a^2+b^2}$ 也与椭圆相切，即过双

曲线右焦点 F_2 且倾斜角分别为 45°和 135°的直线与椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$都相切.

例 3 线段 PQ 是过椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$长轴上定点 $M(m,0)(m\neq 0,m\neq \pm a)$的弦,$S$,$T$ 是椭圆长轴上的两个顶点,直线 SP,SQ 与直线 $l:x=\frac{a^2}{m}$交于 $A(x_A,y_A)$,$B(x_B,y_B)$两点,并且直线 PQ 的斜率 k 存在且不为零,则有 $y_A+y_B=-\frac{2b^2}{mk}$,$y_Ay_B=\frac{m^2b^2-a^2b^2}{m^2}$.

证明 如图 13(a),(b)(点 M 在椭圆外部).

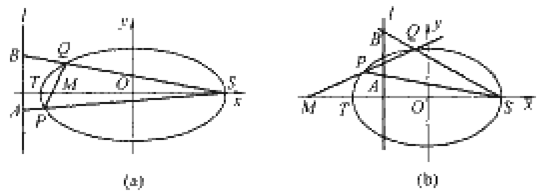


图 13

设 $P(x_P,y_P)$,$Q(x_Q,y_Q)$,直线 SP,SQ 的斜率为 k_{SP},k_{SQ},则

$$k_{SP}=\frac{y_P}{x_P-a},\quad k_{SQ}=\frac{y_Q}{x_Q-a}$$

设直线 PQ 的方程为:$x=Ky+m$,则 $K\neq 0$,且 $k=\frac{1}{K}$.

由
$$\begin{cases}x=Ky+m\\ b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2\end{cases}$$

得
$$(a^2+b^2K^2)y^2+2mb^2Ky+m^2b^2-a^2b^2=0$$

设
$$M=a^2+b^2K^2$$

由韦达定理
$$y_P+y_Q=-\frac{2mb^2K}{M}$$

$$y_Py_Q=\frac{m^2b^2-a^2b^2}{M}$$

因为点 P,Q 在直线 PQ 上,所以

$$x_P=Ky_P+m,\quad x_Q=Ky_Q+m$$

故
$$K_{SP}=\frac{y_P}{Ky_P+m-a}$$

$$K_{SQ}=\frac{y_Q}{Ky_Q+m-a}$$

$$K_{SP}+K_{SQ}=\frac{y_P}{Ky_P+m-a}+\frac{y_Q}{Ky_Q+m-a}=\frac{2Ky_Py_Q+(m-a)(y_P+y_Q)}{K^2y_Py_Q+K(m-a)(y_P+y_Q)+(m-a)^2}$$

$$K_{SP}K_{SQ}=\frac{y_Py_Q}{(Ky_P+m-a)(Ky_Q+m-a)}=\frac{y_Py_Q}{K^2y_Py_Q+K(m-a)(y_P+y_Q)+(m-a)^2}$$

将 y_P+y_Q，y_Py_Q 的值代入上面两个式子，得

$$K_{SP}+K_{SQ}=\frac{2Kb^2}{a(m-a)},\quad K_{SP}K_{SQ}=\frac{b^2(m^2-a^2)}{a^2(m-a)^2}$$

因为点 A 在直线 SP 上，点 B 在直线 SQ 上，所以

$$y_A=K_{SP}\frac{a^2-am}{m},\quad y_B=K_{SQ}\frac{a^2-am}{m}$$

所以

$$y_A+y_B=\frac{a^2-am}{m}(K_{SP}+K_{SQ})=\frac{a^2-am}{m}\cdot\frac{2Kb^2}{a(m-a)}=-\frac{2Kb^2}{m}=-\frac{2b^2}{mk}$$

$$y_Ay_B=\frac{a^2(m-a)^2}{m^2}\times K_{SP}K_{SQ}=\frac{a^2(m-a)^2}{m^2}\cdot\frac{b^2(m^2-a^2)}{a^2(m-a)^2}=\frac{m^2b^2-a^2b^2}{m^2}$$

注 (i)此例中，当 $m=\pm c$ 时，则 $y_A+y_B=\mp\frac{2b^2}{ck}$，$y_Ay_B=-\frac{b^4}{c^2}$.

(ii)当直线 PQ 的斜率不存在时，易证：$y_A+y_B=0$，$y_Ay_B=\frac{m^2b^2-a^2b^2}{m^2}$.

3.1.5 递归思想

这里所说的"递归"是一种具有确定方向和一定程序的变换，通过它把一般性问题逐步归结为同类的已知的特殊问题.(其含义比"递归函数论"中的"递归"更广泛，但比一般说的"化归"、"转换"狭窄.)

求数列通项常用的"递推法"，就是从初始项出发，利用"递推关系"(一般项与以前的项的关系)而求得一般结果.可以认为这是把一般性问题逐步归结为已知的特殊问题(直至初始问题)来求解.用数学归纳法证题也体现这种思想.又如三角函数表只列出 $0\sim\frac{1}{2}\pi$ 的角的函数值，求一般角的函数值是利用诱导公式将其归结为求$[0,\frac{\pi}{2}]$上的角的函数值的问题，这也是递归.

大量问题需要实施复杂问题向简单的转化，其中许多转化都是递归性的.例如，中学数学中解一元方程的方向是：一般方程→代数方程→有理方程→整式方程→二项方程，这就是一种递归.中学数学中常用的"降维法"即把多元问题转化为一元问题(如方程组的消元)，把空间问题转化为平面问题、平面问题转化为直线上的问题等，都体现递归思想.

中学数学中还采用一种典型的体现递归思想的定义方法，即"递归定义".例如"代数式"的定义，"初等函数"的定义，其实都是递归定义.就思想实质而言，利用公理系统"以释万名万谊，以推万理万法"，也是一种逻辑上的递归.

递推思想是递归思想的主要组成部分，递推思想虽然是在高中代数的数列这一章给出递推关系才明确出现，但在初中平面几何中却早已隐含，只不过没引人注意罢了.为了在教学中及早渗透这一思想，优化思维品质，我们要善于从图形各元素间的关系中进行归纳、推想、探索规律，使直观的问题具有抽象性，浅显的问题呈现出规律性.

平面几何中蕴含的递推思想主要体现在如下两个方面：

(1)揭示发现递推关系

平面几何虽然大量的问题呈现为演绎推理的证明题，但也涉及有关等差、等比数列的问

题，只不过教材是以特例出现的. 因此，这就要求我们认真钻研教材，善于发现问题，于无疑处生疑问，在平凡中见奇异，将其中蕴含的递推关系(规律)揭示、发现出来.

例 1 已知△ABC 的三边长分别为 a，b，c，三条中位线组成一个新的三角形，新三角形的三条中位线又组成一个三角形，以此类推，求第四次组成的三角形的周长. 如图 14 所示.

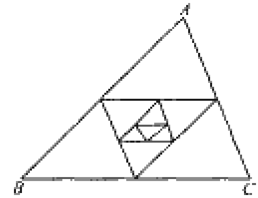


图 14

这个问题并不复杂，甚至一眼也可以看出答案来，然而只要认真观察分析，不难发现这个问题中隐含着递推的思想. 并可用字母并列表表示出一般规律来. 设第 i 次组成新三角形的周长为 $a_i(i=1,2,3,4)$，a_0 为△ABC 的周长，则有

第 i 次	1	2	3	4
周长 a_i	$\frac{1}{2}a_0$	$\frac{1}{4}a_0$	$\frac{1}{8}a_0$	$\frac{1}{16}a_0$

由上表可得递推关系式

$$a_i=\frac{1}{2}a_{i-1}\quad(i=1,2,3,4)$$

对于此题，我们还可以进一步发问：求第五次，第六次，乃至第 n 次组成的新三角形的周长是多少呢？这样不仅加深了问题的难度，而且更看清了问题的本质，上述递推关系的规律始终不变. 这实际上可看出$\{a_i\}$是一个公比为$\frac{1}{2}$的无穷递缩等比数列，一般学生显然不需介绍这个概念，但不难观察出 a_i 系数中指数的绝对值与 i 对应相等，即 $n\to 2^{-n}a_0$，这样可以知道任意一次所组成的新三角形周长与原三角形周长的关系.

例 2 在△ABC 中，$AB=30$ mm，$BC=24$ mm，$CA=27$ mm，$AE=EF=FB$，$EG\parallel FD\parallel BC$，$FM\parallel EN\parallel AC$，求图 15 中阴影部分三个三角形周长的和.

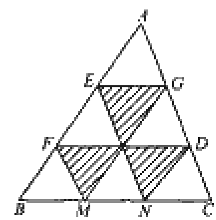


图 15

此例从题目的条件看，显然这三个阴影三角形的周长的和要用原三角形 ABC 的周长来表示. 若抛开具体数字，抽象出问题的实质就是当△ABC 各边的等分点为 2 个时，求所有尖朝下的小三角形周长之和与原三角形周长的关系. 此题我们可以继续思考，当各边的等分点由 1 顺次增加时，结论又如何呢？基于这个想法，我们不妨逐个计算一下，从数量关系的归纳中，能否推想出规律来. 设原三角形的周长为 l，所有尖朝下的小三角形的周长和为 a_i(i 为各边的等分点数，且 $i=1,2,3,\cdots$)，列表如下：

i	1	2	3	4	…	n
a_i	$\frac{1}{2}l$	$\frac{2}{2}l$	$\frac{3}{2}l$	$\frac{4}{2}l$	…	$\frac{n}{2}l$

从这个表中可看出$\{a_i\}$构成的(一个无穷等差数列，公差为$\frac{1}{2}l$)递推关系为 $a_i=a_{i-1}+\frac{1}{2}l$. 对于初中学生来说，不难看出 a_i 的系数中的分子与 i 对应相等，这样可以知道任意的各边等分点的数目，就可以知道该时的所有尖朝下的小三角形周长的和与原三角形周长的关系.

(2)适时引申、构作递推关系

中学各种几何问题的面孔大多为已知,求证结论明确且单一.如果根据不同的学习内容和阶段,寻找或设计一些可以引申、探索有关规律,特别是具有递推关系规律的问题,可以充分调动学生的学习积极性并且培养学生善于探索发现的思维品质.在中学各种几何中这样的机会也是很多的.

例 3　已知△ABC 中,$AB=AC$,$\angle A=36°$,BD 为角平分线.求证:$BC=\frac{\sqrt{5}-1}{2}AB$.如图 16 所示.

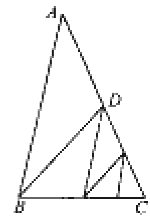


图 16

此例所给出的顶角为 36°(或腰与底的比为 $q=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$)的等腰三角形叫做黄金三角形.题目中所给出的△$ABC$,△$BDC$ 均是黄金三角形.由观察可知,我们可以在△ABC 内按黄金三角形大小的顺序作它的底角平分线,就可以得到一个新的黄金三角形,且可以无限地作下去.我们能否知道任意一次黄金三角形的底边与原三角形腰长的关系呢?设 a_i 是第 i 次所形成黄金三角形的底边长,则其腰长为 a_{i-1},而递推关系为 $a_i=\frac{\sqrt{5}-1}{2}a_{i-1}$.若原三角形的腰长为 l,那么 a_i 与 l 的关系可列表如下:

i	1	2	3	4	…	n
a_i	ql	q^2l	q^3l	q^4l	…	q^nl

其中 $q=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$.

这里,$\{a_i\}$同样也构成了一个等比数列,公比为 $q=\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$.对于初中学生虽然不懂得等比数列的概念,但从这个表中仍然可以归纳推想出 a_i 系数中的指数(即 q 的次数)与 i 对应相等.这样,对于任意一次所形成的黄金三角形,都可以知道它的底边与原三角形腰长的关系.

类似于上例,我们也可以对下述的几何中的传统题目进行引申,来构作递推关系:

①求当线段 AB 的内分点顺次增加时,线段的条数是多少?

②求当$\angle AOB$ 的内部的射线(端点为 O)顺次增加时,角的个数是多少?

③若在凹型折线 $ABECD$ 中,$AB\parallel DC$,则$\angle B+\angle C=\angle E$,当$\angle B$,$\angle E$,$\angle C$ 这样的角顺次增加时,所有左面的角和所有右面的角有何关系?

④若在凸型折线 $ABEDC$ 中,$AB\parallel CD$,则$\angle B+\angle E+\angle D=360°$.当$\angle B$,$\angle E$ 和$\angle D$ 这样的角无限增加时,这些角的和是多少?

⑤在△ABC 中,P_1 为 BC 的中点,P_2 为 AP_1 的中点,P_3 为 BP_2 的中点,P_4 为 AP_3 的中点,求 $S_{\triangle ABP_4}:S_{\triangle ABC}=$? 当如上法取 $P_i(i=1,2,3,\cdots)$时,$S_{\triangle ABP_i}:S_{\triangle ABC}=$?

3.1.6　数形结合思想

数与形是现实世界中客观事物的抽象和反映,是数学的基石."数"主要指实数、复数或代数对象及其关系,属于数学抽象思维范畴,是人的左脑思维的产物;"形"主要指几何图形,

属于形象思维范畴，是人的右脑思维的产物．数形结合使人充分运用左、右脑的思维功能，相互依存、彼此激发，全面、协调、深人发展人的思维能力．

数和形是数学中最基本的两个概念，也是数学发展进程中的两大支柱．自从笛卡尔把坐标和变量引人数学，就为数与形的结合与转化提供了可能，给数学提供了一个双向工具：几何概念可以用代数表示，几何目标可以通过代数来表达；反之，给代数语言以几何解释，从而直观地掌握这些抽象的语言的意义，并得到启发去探索新的结论．因此，可以说“数”和“形”是共存于同一个体中的事物的两个侧面，是相互联系的．这种数与形相互联系的思想就是数形结合的思想．它是数学中一种极其重要的思想．著名数学家华罗庚说得好：“数缺形时少直觉，形少数时难入微”．他还风趣地说：“数形结合百般好，隔裂分家万事非”，并亲切地教导我们不要“得意忘形”．教学中，抽象的数学事实只有与直观的图形结合起来，才能使学生学得更扎实，记得更清楚，牢固，从而达到看图说话的效果．中学数学知识中，用数轴上的点表示整数或分数，在数轴上表示不等式的解集，利用数轴确定一元一次不等式组的解集，数轴上的点与实数一一对应；平面内的点与有序实数对一一对应，把函数用图形来表示，借助图形，直观地分析函数的一些性质和特点；用图形表示数列，用方程表示曲线，复数用向量来表示等等内容，都体现了数形结合的思想．教学中对其加以揭示是非常必要的，而且要揭示清楚，使学生逐步理解，掌握这种思想，这对于提高数学教学在发展学生的逻辑思维和形象思维方向的效果和影响是十分重要的．[17]

数形结合思想，是通过数形间的对应与互助来研究问题并解决问题的思想．“形”中的若干量（如距离、角度、面积、体积等）在一定单位制中可分别对应若干确定的“数”，这种对应一般又可分解成多个映射．笛卡尔通过建立点与有序数组的对应实现了“位置的量化”，这是数形结合的一个根本点．后来三角学的崛起体现数与形的“战术性”结合，为数学开辟一个广阔的新天地．解析几何的建立是数与形的“战略性”结合的标志．数形结合思想的另一重要体现，是“向量”概念的建立．

数形结合不但使几何学由于代数化而获得新的面貌和新的发展，而且给代数（以及分析）提供几何模型，并借助于几何的成果得到进一步的发展．例如，虚数正是由于找到几何解释而在数学中站稳了脚跟，从而形成有关复数的新的数学分支．在中学数学中，研究函数性质往往借助于函数的图象，研究三角函数还借助于“单位圆”，研究不等关系可以借助于“数轴”，等等．这些都直接体现了数形结合的思想．

运用数形结合思想处理问题，就是在处理问题时，斟酌问题的具体情形，使图形性质问题借助于数量关系的推演而具体量化，或者使数量关系的问题借助于几何直观而形象化，将抽象的数学语言与直观的图形结合起来，将抽象思维与形象思维结合起来，实现抽象概念与具体形象、表象的联系和转化．

运用数形结合的思想解题，不仅能够有效地解决问题，而且能够使学生认识问题的本质，加深对数学知识的理解，提高学生的解题能力．解题经验告诉我们，当寻找解题思路发生困难的时候，不妨从数形结合的观点去探索；当解题过程的复杂运算使人望而生畏时，不妨从数形结合的观点去开辟新路；当需要检验结论的正确性时，不妨从数形结合的观点去验证，它常会给我们带来满意的效果．加强这方面的训练，对巩固基础，提高解题能力是重要的一环．因此，在习题教学中，对能与形联系的问题，教师要引导学生从数与形两个侧面对问题进行分析，由形想数，以数助形，利用数来研究形的各种性质．由数构形，充分利用形的直观

性来揭示数学问题的本质属性，根据形来探求解题思路或找到问题的结论，引导学生利用图形探路子，结合图形找式子．有意识地加强让学生利用“几何意义”解题，加强平面几何、解析几何及函数图象等知识的纵横沟通．使学生不断丰富和积累“数形结合”解题的经验，提高解题能力．

中学数学中，常用数形结合解答的问题主要有以下几类：

①与函数有关的问题，函数的图象及性质常常是解决问题的突破口．

②方程与不等式的解的问题，如果方程或不等式两边的表达式有明显的几何意义，或通过某种方式可以与图形建立联系，则可设法构造图形，将方程或不等式所表达的抽象数量关系转化为图形的位置或度量关系加以解决．

③与复数有关的问题，常考虑用复数及其运算的几何意义来解决．

④求最值的问题，通过图形架设与数量间的桥梁，常常凭借特殊位置，图形的性质等直观优势得到简捷解答．

⑤平面几何直接不易解决的问题，借助于坐标系，把图形的几何性质表示为图形中点的坐标之间的关系，特别是代数关系来加以解决．

数形结合常包括：以形助数、以数助形、数形互助等几个方面．

(1)以数助形

在平面几何中，涉及图形大小比较的问题，大多数都借助数的知识，化为数量关系进行研究，这就是一种以数助形的估法；把图形的位置关系转化为数量关系，如讨论直线与圆的位置转化为讨论圆心到直线的距离与半径的关系也是一种以数助形的做法；运用代数知识证明几何问题更是以数助形的好做法．

例1　如图17，E 是正方形 $ABCD$ 外接圆 AD 上任一点，求证：$EA+EC=\sqrt{2}EB$；$EA\cdot EC=EB^2-AB^2$．

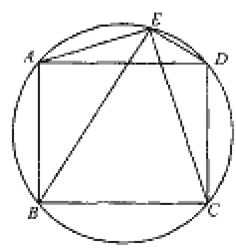


图17

分析　这是“形”的问题，但形中隐数，把它转化为“数”的问题来解决要简便得多．

略证　在△EAB 和△EBC 中，如图17，由余弦定理，得

$$AB^2=EA^2+EB^2-2EA\cdot EB\cos 45^\circ$$

$$BC^2=EC^2+EB^2-2EC\cdot EB\cos 45^\circ$$

由 $AB=BC$，得

$$EA^2-\sqrt{2}EB\cdot EA+EB^2-AB^2=0$$

$$EC^2-\sqrt{2}EB\cdot EC+EB^2-AB^2=0$$

故 EA、EC 是方程 $x^2-\sqrt{2}EB\cdot x+EB^2-AB^2=0$ 的两实根，由韦达定理，得

$$EA+EC=\sqrt{2}EB,\quad EA\cdot EC=EB^2-AB^2$$

(2)以形助数

例2　试求函数 $f(\theta)=\sqrt{3-2\cos\theta-2\sin\theta}+\sqrt{2+2\cos\theta}$ 的最小值．

分析　本题有一点难度，用一般方法虽然可解，但过程较繁琐．于是考虑能否将“数”转化为“形”？

解　$f(\theta)=\sqrt{(\cos\theta-1)^2+(\sin\theta-1)^2}+\sqrt{(\cos\theta+1)^2+\sin^2\theta}=X+Y$，则 $X=\sqrt{(\cos\theta-1)^2+(\sin\theta-1)^2}$ 为 $M(\cos\theta,\sin\theta)$ 到点 $P(1,1)$ 的距离，$Y=\sqrt{(\cos\theta+1)^2+\sin^2\theta}$

为点 M 到点 $Q(-1,0)$ 的距离.

而点 $M(\cos\theta,\sin\theta)$ 是单位圆上的动点,故 $f(\theta)$ 的最小值即为单位圆上的点 M 到两定点 P,Q 距离和的最小值.

如图 18 所示,当 M 为 PQ 与单位圆的交点时,$MP+MQ$ 有最小值,此时 $MP+MQ=PQ=\sqrt{1+2^2}=\sqrt{5}$,即 $f(\theta)$ 的最小值为 $\sqrt{5}$.

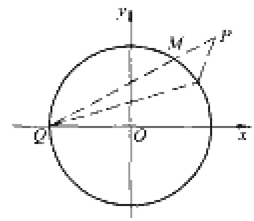


图 18

(3)数形互助

在常规解题中,有时将前述两种形式结合起来,既以数助形,又以形助数,进行数形互助. 这样的例子是很多的,这里就不举例了.

3.2 公理化与结构思想

3.2.1 公理化思想

数学被尊崇为严谨科学的典范,是由于它首先成功地贯彻公理化思想. 例如,欧几里德就是把亚里士多德总结的公理化思想萌芽应用到几何中,逐步完善并贯彻了公理化思想,把古代关于几何的经验知识条理化、系统化,形成了一个合乎逻辑的体系,写出了举世闻名的划时代著作《几何原本》.

(1)何谓公理化

所谓公理化,就是先列出一些不加定义的基本概念和不加证明的基本命题作为公理,然后在这个基础上,以推演规则为工具,把某一范围内(或系统)的新概念及真命题推演出来. 对于已给定的公理和推演规则,一方面我们希望从它能推出更多的新概念及真命题,最好能把某一范围内(或某系统内)的新概念及真命题全部推出来,而且最好还能使其作为出发点的公理为最少. 简言之,公理要最少,而推出的结论要最多. 同时,我们还要求从它不能推出我们所不要的东西,特别是逻辑矛盾. 从以上所述可以看出,一个公理系理是不是科学的,它的基础在逻辑上是否已奠定,那就要看它是否满足以下三条:

无矛盾性(协调性或一致性):即在一个公理系统中不能既推出命题 A,同时又能推出它的否定非 A. 无矛盾的要求是对公理系统的一个基本要求.

独立性:即在一个公理系统中被选定作为出发的一组公理,其中任何一个都不能由其他公理推出. 也就是公理之间不能有依从关系. 否则,被推出的公理就成为多余的,因为它实质上是一个定理. 由此可见,独立性是要求公理的数目减少到最低限度.

完备性:即在一个公理系统中,要求保证从公理组织推出该系统的全部真命题. 所以,公理不能过少,否则就推不出应该推出的命题.

以上三条是衡量一个公理系统科学性和严密性的重要标志,其中无矛盾性是最重要且是非有不可的. 因为,倘若一个公理系统内出现矛盾,那么这个公理系统就没有任何实际价值. 至于独立性,从理论上讲,公理是出发点,定理是推出的,所以公理和定理在整个公理系统中所处的地位不同,应该把公理和定理严格区分开来,从而也就导致了公理独立性问题的产生,这仅是问题的一个方面. 但另一方面,公理和定理也有相同的一面,即在一个公理系统中公理和定理都是本系统中的真命题. 因此,把定理作为公理不仅不会出现什么原则的错

误，而且从教学角度讲，根据学生的具体情况有时将定理看作公理来对待还可能有好处. 对完备性要求，本来数学家们就有各种看法，从而就有几种不同的定义，特别是当年仅 25 岁的奥地利数学家、数理逻辑学家哥德尔于 1931 年发表了他的著名论文"不完全性定理"(包括算术在内的任何一个协调公理系统都是不完全的. 具体地讲，包括算术在内的任何一个协调公理系统，其中任选一组真命题作为公理，总有该系统中的真命题不能由它们推出，若把此命题也作为公理，对扩大了的公理组同样存在不能被它们推出的真命题. 而且包括算术在内的任何一个公理系统，其协调性不可能由本系统的自身来证明，也就是说必须借外系统之组)后，数学家们对公理系统的完备性要求大大地放宽了，也就是说，能完备更好，即使不完备，同样也是数学科学的有利工具，有其重要价值.

(2)中学数学教材中的公理系统

中学数学知识系统，原则上也是按公理思想展开的，特别是平面几何，立体几何还明确列出公理. 整个中学数学教材，大体上是按照下面的逻辑结构，采用演绎方法展开的.

$$\left.\begin{array}{l}\text{原始概念的描述}\\ \text{定义的叙述}\\ \text{公理的叙述}\end{array}\right\}\Rightarrow\text{命题}\left\{\begin{array}{l}\text{定理—推论}\\ \text{公式}\end{array}\right.$$

各章节教材在具体展开时，为便于学生接受，一般都增添了便于理解教材内容的实例，采用图 19 所示的块状结构：

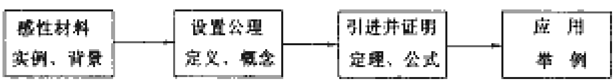


图 19

从全部教材的逻辑结构和具体内容看，总体上体现了公理化的基本思想，但就其公理系统而论，由于考虑到中学生接受能力和教材的精简，因而对公理独立性的要求不是那么严格，而且公理系统也不完备，有时还要借助于直观. 例如，平面几何教材，从它的逻辑结构和具体内容来看，基本上沿用了欧氏的不完善的公理系统. 它首先选定一批基本元素和一批关系(包括基本关系)作为基本概念，采用少数公理，然后以此为出发点，用形式逻辑方法定义有关概念，推导一系列定理，把有关的几何知识贯穿起来. 其中公理之间是相容(不矛盾)的，但所选取的公理既过剩又不足，是不独立和不完备的. 平面几何中共引进几何公理 16 条，等量公理 5 条，不等量公理 6 条. 在 16 条几何公理中，有 11 条新增公理，5 条强化了的公理. "两点之间，线段最短"、"同位角相等，则两直线平行"等都是新增的公理；而"经过直线外一点，有且只有一条直线和这条直线平行"是强化了平行公理. 教材的这种处理方案，虽然从公理系统来说是不够严格的，有悖于公理的完备性和独立性. 但是，这样做能减少初学者的困难，便于学生接受，从教学论的角度看是有积极作用的.

(3)公理化思想的作用和意义

公理化思想的作用与意义可从如下三方面来看.

有利于概括整理数学知识并提高认知水平. 由于公理化思想可以揭示一个数学系统或分支的内在规律性，从而使它系统化、逻辑化，有利于人们学习和掌握；又由于公理系统是一个逻辑系统，所以对培养学生的逻辑思维能力和演绎推理能力都有其重要意义；公理化思想的贯彻，可以使学习者了解数学各科的各个系统中的原始概念与公理(在代数中运算律也当

为公理)在"同系列知识"中的逻辑顺序,从而理清有关数学知识在总的知识系统中的地位,防止"循环论证"等逻辑错误,同时使他们能借助公理化思想去求得新知并提高认知水平.

促进新理论创立. 由于对公理化思想逻辑特征的研究,发现了很多新的数学分支和新的数学成果.例如,对欧氏几何公理系统第五公设的"审查"发现了非欧几何;对公理协调性的研究,希尔伯特等数学家和逻辑家创立了《元数学或证明论》;对形式系统与其相适应的模型之间关系的研究,使抽象代数与数理逻辑相结合产生了一个新的边缘学科——《模型论》;对非标准模型的研究产生了非标准分析等;又如,20 世纪初公理集合论的出现,不仅避开了康托朴素集合论中的悖论,而且使一些长期以来尚未解决的"老大难"问题有的得到了解决,有的虽未彻底解决,但已取得了很大的进展,最突出的例子就是 20 世纪 60 年代柯恩对连续系统假设及选择公理所获得的重要结果.由于现代公理化思想与现代数理逻辑结成"伴侣",从而对数学向综合化、机械化方向的发展起到了推动的作用.

对其他科学表述有示范作用. 由于数学公理化思想表述数学理论的简捷性、条件性和结构的和谐性,从而为其他科学理论的表述起到了示范作用.其他科学纷纷效法建立自己的公理化系统.例如,17 世纪牛顿从少数几条公理(牛顿三定律)出发,用逻辑推理把力学定律逐个推演出来,写出了《自然哲学的数学原理》,被认为是经典力学的奠基著作,在科学史上与欧几里德的《几何原本》相媲美,18 世纪拉格朗日的《解析力学》,19 世纪克劳修斯的《热的机械运动理论》以及相对论、伦理学都使用了公理化思想,特别是 20 世纪 40 年代理论力学的运用公理化思想是最突出的例子.

最后,我们顺便指出,我们既要肯定公理化思想对中学数学的指导作用,用其基本思想把握中学数学的结构体系;也要辩证地看到公理系统的严格性不是绝对的,要从教育对象出发全面考虑公理化思想的恰当运用.只有这样,才能在研究和使用中学数学教材的过程中,发挥公理化思想的积极作用.

3.2.2 演绎思想

演绎是由一般到特殊的逻辑推理方式.数学知识的应用过程就是演绎思想的体现过程.应用演绎方式还有助于建立新理论,证明新结论,如归纳猜测结论常用数学归纳法加以证明.演绎思想能培养、训练学生逻辑思维的严谨性和对结论的确信性,提高准确表达能力.

演绎思想在数学证明中占据重要的地位.用已知的假设、定义、公理及前面已知定理,按推理规律导出结论的过程,即判断命题为真的过程,叫做证明.

一般地,证明是由论题、论据、论证三部分组成.

(1)论题:指需要判定真实性的那个命题

例如,如果等腰三角形底边上的垂线和两腰所在的直线相交,那么等腰三角形的顶点到这两个交点的距离相等.

如果用 A 表示命题的条件,B 表示命题的结论,那么论题的一般模式为:若 A 则 B,或记作 $A\Rightarrow B$,其中⇒表示"从左边推出右边"读作"推出".

(2)论据:指被用以作为推理依据的理由

命题证明依据规则是定义,公理,前此定理(包括已证定理、推论、公式、性质、法则等),证明题要求"言出有据".

关于论据,必须满足:①论据必须真实;②论据的真实性不能依赖论题的真实性.

(3)论证：就是证明全过程

这个过程是指从论据推出论题的过程．它表明了论据与论题间的必然逻辑联系．论证可由一串推理构成．

证明中的论题给出了要证明什么；证明中的论据给出用什么来证明的；证明中的论证给出是怎样证明的．

论题、论据、论证可看作证明中的三要素．

证明时要求论题真实，论据确凿，论证严密．

证明的表达方式：在证明的具体表述时基本上都采用"三段论"方式．

例如，大前提：等腰三角形顶角平分线(M)是底边上的高(P)；

前提：$AH(S)$是等腰$\triangle ABC$中顶角A的平分线(M)；

结论：$AH(S)$是等腰$\triangle ABC$中底边BC上的高(P)．

在证明问题过程中三段论采用简化形式，可由前面事项$\Rightarrow$后面事项，以简化书写格式．

3.2.3　归纳思想

研究一般性问题时，先研究几个简单的、个别的、特殊的情况，从中归纳，发现一般的规律或性质．这种从特殊到一般的思维倾向称为归纳思想．数学知识的发生过程就是归纳思想的应用过程．解题应用这种思想方法，不仅能发现现成给定问题的解题规律，而且能在实践基础上发现新的客观规律，提出新的命题．

例1　由$1+3=4=2^2$，$1+3+5=9=3^2$，$1+3+5+7=16=4^2$，$1+3+5+7+9=25=5^2$，…，于是，我们可归纳得：从1开始的连续n个奇数的和，就是奇数个数的平方．

由于对$2n-1=n^2-(n-1)^2$，令$n=1,2,\cdots$，将所得式相加整理便可证明上述归纳得的结论是正确的，因而我们便可有这个一般结论：从1开始的连续n个奇数的和等于n^2．

例2　由$15^2=225$，$14\cdot16=224$，$13\cdot17=221$，$12\cdot18=216$，$11\cdot19=209$，$24\times26=624$，$63\cdot67=4\ 221$，$88\cdot82=7\ 216$，…，于是，我们可归纳得：个位数的和为10，十位数相同的两个两位数相乘，所得的积的末两位是这两个两位数的个位数相乘的数，所得的积的末两位前面的数是两位数的十位数乘以比十位数大1的数的积．

由于当$1\leqslant a,b\leqslant9$，且a,b均为自然数时，有

$$(10a+b)\cdot[10a+(10-b)]=100a(a+1)+b(10-b)$$

这便证明了上述归纳得的结论也是正确的，因而我们便有这个一般结论：(略)．运用这个结论我们可速算这一类特殊的两个两位数的乘积．

例3　由$6=3+3$，$8=3+5$，$10=5+5=3+7$，$12=5+7$，$14=7+7=3+11$，$16=3+13=5+11$，…，德国数学家哥德巴赫归纳得：任何大于4的偶数都可表示为两个奇质数之和．

此例就是著名的哥德巴赫猜想．为了证明这个猜想，两百多年来，世界各国数学家投入了大量的精力，取得了一系列成果，直到1973年，我国数学家陈景润证明了"任何充分大的偶数都是一个素(质)数及一个不超过两个素数的乘积之和"，在国际上被称为"陈氏定理"．尽管如上猜想还没有完全被证明，还不能作为我们运用的结论，但在证明的探索过程中，发现了许多定理，大大推动了数论研究及其发展．

3.2.4　类比思想

类比思想就是由已知两个(类)事物具有某些相似性质，从而推断它们在其他性质上也

可能相似的推理思想(由特殊到特殊).类比推理实际上是一种猜测,经过严格证明才能成为确定的论断.数学中许多定理、公式和法则都是用类比推理提出的.解题中为寻找问题线索,往往借助于类比方法,如解立几题时与平几题类比,解数的问题时与相关的形的问题类比,解数列题中有限与无限的类比等.

(1)用类比思想解题

例 1 已知$\frac{\sqrt{5}b-c}{5a}=1$,求证:$b^2\geqslant 4ac$.

证明 由结论类比根的判别式,原式可变为$5a-\sqrt{5}b+c=0$.令$x=\sqrt{5}$后,可变为一个二次方程$ax^2+bx+c=0$,而此方程有一个实根为$\sqrt{5}$,故判别式为非负数,即$b^2-4ac\geqslant 0$.

例 2 函数$f(x)$对于任何$x\in\mathbf{R}^+$,恒有$f(x_1\cdot x_2)=f(x_1)+f(x_2)$,若$f(16)=4$,求$f(4)$.

解 从给出的抽象函数的条件着手进行类比,其形式正是对数函数具有的性质:

$$\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y\,(x,y\in\mathbf{R}^+)$$

若设$f(x)=\log_2 x$,则满足$f(16)=\log_2 16=4$.

因此,$f(4)=\log_2 4=2$.

例 3 已知周长为 16 的$\triangle ABC$的边BC长为 6,求BC边上的中线AO的最小值.

解 此题的三角形顶点A不固定,中线长不易表示,但从$|AB|+|AC|=10$,$|BC|=6$这一题设条件,类比椭圆的属性,不难想到点A在以B,C两点为焦点,焦距为 6,长轴长为 10 的椭圆上(去掉长轴的两个端点).

这个椭圆的方程为$\begin{cases}x=5\cos\theta\\y=4\sin\theta\end{cases}$($\theta$为参数).$BC$边的中线

$$|AO|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{25\cos^2\theta+16\sin^2\theta}=\sqrt{16+\cos^2\theta}\geqslant\sqrt{16}=4$$

即当$\triangle ABC$为等腰三角形时,BC边上的中线AO的最小值为 4.

(2)用类比思想获得结论

中学数学中的许多结论都可由类比发现而获得,如分式的一些性质可类比分数的性质,立体几何中的一些结论可类比平面几何中的结论,等而发现获得,下面再看一例:

例 4 平面解析几何中的定比分点公式为

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\quad y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$$

这个结论是描述线段P_1P_2的定比$\frac{\overrightarrow{P_1P}}{\overrightarrow{PP_2}}=\lambda$(其中$P_1(x_1,y_1)$,$P_2(x_2,y_2)$)、分点$P(x,y)$与线段的端点$P_1$、$P_2$的关系的.它有如下一系列的类比结论,这些结论也有着广泛的应用.

结论 1 如图 20,Ox为坐标轴正方向,角的始边到终边按逆时针方向,设$\angle xOA=\alpha$,$\angle xOB=\beta$,$(0<\alpha,\beta<\pi)$,$\frac{\angle AOP}{\angle POB}=\lambda$,则

$$\angle POx=\frac{\alpha+\lambda_1\beta}{1+\lambda}\tag{3.2.1}$$

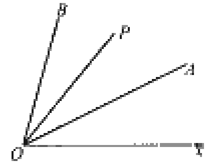


图 20

证明 因$\frac{\angle AOP}{\angle POB}=\lambda$,则

$$\angle POx=\angle xOA+\lambda\angle POB,\quad \angle POx=\angle xOB-\angle POB$$

即

$$\angle POB=\angle xOB-\angle POx$$

故
$$\angle POx=\frac{\alpha+\lambda\beta}{1+\lambda}$$

特别地，当 OP 平分$\angle AOB$ 时，有$\angle POx=\frac{\alpha+\beta}{2}$.

结论 2　设数列$\{a_n\}$是等差数列，a_p,a_m,a_n 是数列中三项且有$\lambda=\frac{p-m}{m-n}$，则
$$a_m=\frac{a_p+\lambda a_n}{1+\lambda}\quad(\lambda\neq-1)\tag{3.2.2}$$

特别地，当 $\lambda=1$ 时，(3.2.2)即为等差中项公式.

此结论的正确性证明较易(略).

结论 3　设 P 为线段AB 上一点，$\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}}=\lambda$，$AA_1/\!/BB_1/\!/PP_1$ 为一组平行线，截直线 l 于 A_1,B_1,P_1，设 $AA_1=a$，$BB_1=b$，$PP_1=x$，则：

(Ⅰ)当 A_1,B_1 在直线 AB 同侧(或有一点在 AB 上)时，有
$$x=\frac{a+\lambda b}{1+\lambda}\tag{3.2.3}$$

(Ⅱ)当 A_1 与 B_1 在直线 AB 异侧时，有
$$x=\frac{a-\lambda b}{1+\lambda}\tag{3.2.3'}$$

证明　(Ⅰ)如图 21(a)，联结 A_1B 交 PP_1 于 Q，则
$$\frac{AA_1}{PQ}=\frac{AB}{PB}=\frac{AP+PB}{PB}=\lambda+1$$

从而
$$PQ=\frac{AA_1}{1+\lambda}$$

又 $QP_1/\!/BB_1$，有
$$\frac{BB_1}{QP_1}=\frac{A_1B_1}{A_1P_1}=\frac{AB}{AP}=\frac{AP+PB}{AP}=1+\frac{1}{\lambda}$$

即
$$QP_1=\frac{\lambda BB_1}{1+\lambda}$$

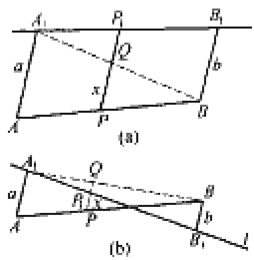


图 21

于是
$$x=PQ+QP_1=\frac{AA_1}{1+\lambda}+\frac{\lambda BB_1}{1+\lambda}=\frac{a+\lambda b}{1+\lambda}$$

(Ⅱ)如图 21(b)，联结 A_1B 交 PP_1 的延长线于 Q 类似于(Ⅰ)即证.(证略)

特别地，当 $\lambda=1$ 时，(3.2.3)即为梯形的中位线长公式；当 a,b 中有一个为 0 时，(3.2.3)即为三角形的中位线长公式.

结论 4　凸四边形 $ABCD$ 中，M 为 CD 边上一点，若$\frac{MD}{MC}=\lambda$，则
$$S_{\triangle ABM}=\frac{S_{\triangle ABD}+\lambda S_{\triangle ABC}}{1+\lambda}\tag{3.2.4}$$

证明　如图 22，过 D,M,C 分别作AB 的垂直线DD'，MM'，CC'；D',M',C' 均为垂足.

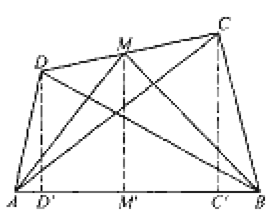


图 22

在梯形 $CDD'C'$ 中，由$\frac{DM}{MC}=\lambda$，有 $MM'=\frac{DD'+\lambda CC'}{1+\lambda}$，从而

$$S_{\triangle ABM}=\frac{1}{2}MM'\cdot AB=\frac{\frac{1}{2}DD'\cdot AB+\frac{1}{2}CC'\cdot AB\cdot\lambda}{1+\lambda}=\frac{S_{\triangle ABD}+\lambda S_{\triangle ABC}}{1+\lambda}$$

特别地，当 $\lambda=1$ 时，$S_{\triangle ABM}=\frac{1}{2}(S_{\triangle ABD}+S_{\triangle ABC})$.

结论 5 设台体(棱台和圆台)的上、下底面面积分别为 S_1，S_2，与上、下底面距离之比为 λ 的一平行于底面的截面面积为 S，则

$$\sqrt{S}=\frac{\sqrt{S_1}+\lambda\sqrt{S_2}}{1+\lambda} \qquad (3.2.5)$$

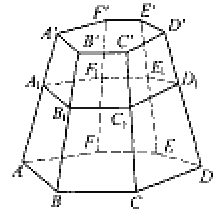


图 23

证明 我们以棱台为例证明之，如图 23.

由截面 A_1C_1 // 底面 AC // 底面 $A'C'$，知 A_1B_1 // AB // $A'B'$. 由截面与上、下底面距离之比为 λ，則知 $\frac{A'A_1}{A_1A}=\lambda$. 则

$$A_1B_1=\frac{A'B'+\lambda AB}{1+\lambda}$$

又截面多边形 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ ∽ 底面多边形 $ABCDEF$ ∽ 底面多边形 $A'B'C'D'E'F'$，则

$$A_1B_1:A'B':AB=\sqrt{S}:\sqrt{S_1}:\sqrt{S_2}$$

从而

$$\sqrt{S}=\frac{A_1B_1}{A'B'}\sqrt{S_1}=\frac{\frac{A'B'+\lambda AB}{1+\lambda}}{A'B'}\sqrt{S_1}=\frac{1+\lambda\cdot\frac{AB}{A'B'}}{1+\lambda}\cdot\sqrt{S_1}=\frac{1+\lambda\cdot\frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1}}}{1+\lambda}\cdot\sqrt{S_1}=\frac{\sqrt{S_1}+\lambda\sqrt{S_2}}{1+\lambda}$$

特别地，当截面为中截面时，有

$$\sqrt{S}=\frac{\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}}{2}$$

3.2.5 结构思想

公理化思想的现代发展系统地建立了“结构思想”. 也就是说，结构思想把形式公理思想推向了一个更高的层次.

(1)何谓结构思想

皮亚杰认为，“全部数学都可以按照结构的建构来考虑”. 所谓结构思想，就是从整个数学全局出发，不仅要在整个大范围内分析、研究每一门数学结构，而且还要分析、研究各个数学分支之间结构的本质差异及其内在的相互联系. 从现代系统方法论观点看，数学结构思想是把整个数学作为大系统，而将每一门数学或每一个数学分支作为这个大系统的一个子系统，从而将这个大系统按结构的特征分成若干子系统. 在此基础上，不仅要进一步探讨各个子系统的结构特征，而且还要探讨子系统结构之间的内在联系及其本质差异. 至于建立每一个子系统或每一门数学的结构的具体方法乃是形式公理方法.

在“数学是研究形式结构的科学”的思想指导下，法国的布尔巴基学派把主攻目标放在“用结构的观点和方法将整个数学从内在结构上加以彻底改造”上，以集合论为基础，首先建立了以三个结构为母结构的结构层次网如图 24 所示.

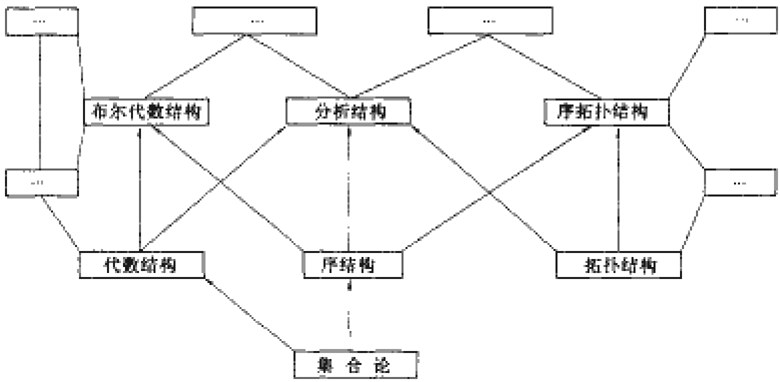


图 24

这三个母结构:代数结构(即由离散性)的对象、代数运算及其公理组所构成的结构系统(如群、环、体、线性空间等)、序结构(即由对象集,"顺序"关系及其公理组所构成的结构系统.如全序集有关于"$\leqslant$"的自然数集,半序集有关于包含关系的集合的幂集等)、拓扑结构(即指能够描述极限的那种结构).

用结构思想作为统一数学各分支的思想基础,每一结构都由相应的公理系统确定.

(2)中学数学中的关系结构思想

关系结构思想是现代数学思想的基础之一."关系"在近世代数中是一个重要而基本的概念,它反映了集合与集合,元素与元素之间的关系,其定义是:设 A 与 B 是两个集合,$A\times B=\{(a,b)\mid\forall a\in A,\forall b\in B\}$ 的任何一个子集 P 称为 A 与 B 之间的一个关系,如果 $(a,b)\in A\times B$,当 $(a,b)\in P$,则称 a 与 b 有关系 P.记作 aPb.当 $(a,b)\notin P$,则称 a 与 b 无关系 P,记作 $a\bar{P}b$.例如,设 $A=\{直线\ l\}$,$B=\{平面\ \alpha\}$,$A\times B$ 的一个子集 $P=\{(l,\alpha)\mid l\in A,\alpha\in B,且\ l\perp\alpha\}$,则 P 是 A 与 B 之间的一个关系,即中学数学中直线与平面垂直关系.

若 $A=B$,则称为 A 的元素之间的关系,也称为 A 的关系.例如,设 $\mathbf{R}$ 为实数集,$\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 的子集 $P=\{(a,b)\mid a\in\mathbf{R},b\in\mathbf{R},且\ a-b<0\}$,则 P 为 $\mathbf{R}$ 的一个关系,这个关系就是中学数学中的"小于"关系,即若 $(a,b)\in P$,则 $a<b$,若 $(a,b)\notin P$,则 a 不小于 b,记作 $a\geqslant b$.

(i)等价关系.

对于关系问题,在中学数学中只注意研究上有某种关系的事物的性质,而不研究这些关系本身的性质.例如,对于相似三角形知道其对应角相等、对应边成比例,而很少研究或没研究三角形相似所具有的性质:a.反身性:即 $\triangle ABC\backsim\triangle ABC$;b.对称性:若 $\triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C_1$,则 $\triangle A_1B_1C_1\backsim\triangle ABC$;c.传递性:若 $\triangle ABC\backsim\triangle A_1B_1C_1$,$\triangle A_1B_1C_1\backsim\triangle A_2B_2C_2$,则 $\triangle ABC\backsim\triangle A_2B_2C_2$.具有这种性质的关系就是我们要介绍的等价关系.

定义:集合 A 的关系 P 称为 A 的等价关系,如果 P 具有下列性质:

a.反身性:$\forall a\in A$,aPa;

b.对称性:$\forall a,b\in A$,若 aPb,则 bPa;

c.传递性:$\forall a,b,c\in A$,若 aPb,bPc,则 aPc.

实数相等,直线的平行,模 n 的同余关系等都是等价关系;实数的大于关系、整数的整

除关系等都不是等价关系.

利用元素之间的等价关系,有一个重要的作用,它可以把一个集合中的元素进行分类,此类称为等价类,然后在每一个等价类中讨论问题,从而解决了整个问题.这样分类也是我们研究事物的一个行之有效的思想,这种思想在现代数学中也占有重要的地位.

例 18 求能使 2^n-1 被 7 整除的所有正整数 n,并证明对任意正整数 n,2^n+7 不能被 7 整除.

分析 可利用模 3 的同余关系将正整数 n 分类来论证.

设 $n=3k(k\in\mathbf{N})$,则 $2^n-1=2^{3k}-1=(8-1)(8^{k-1}+8^{k-2}+\cdots+1)$,从而当 $n\in\mathbf{Z}_0=\{3k\mid k\in\mathbf{N}\}$时 $7\mid(2n-1)$.

当 $n\in\mathbf{Z}_1=\{3k+1\mid k\in\mathbf{N}\}$时,有

$$2^n-1=2^{3k+1}-1=2\cdot2^{3k}-1=2(7+1)^k-1$$

其中$(7+1)^k$ 被 7 除余 1,从而此时 2^n-1 被 7 除 1.

当 $n\in\mathbf{Z}_2=\{3k+2\mid k\in\mathbf{N}\}$时,有

$$2^n-1=2^{3k+2}-1=4\cdot2^{3k}-1=4(7+1)^k-1$$

由此知 2^n-1 被 7 除 3.

故当且仅当 $n\in\mathbf{Z}_0$ 时,$7\mid(2^n-1)$.

于是 $2^n+1=(2^n-1)+2$ 用 7 来除时,所有可能的余数为 2,3,5.故对于 $\forall n\in\mathbf{N}$,$7\nmid(2^n+1)$.

(ii)顺序关系.

顺序关系是不等式的理论基础,而不等式是中学数学(初、高中均有)的重要内容之一.

定义:集合 A 的关系 P 称为 A 的顺序关系,如果 P 具有下列性质:

a.无反身性:$\forall a\in A$,$a\bar{P}a$;

b.无对称性:$\forall a,b\in A$,若 aPb,则 $b\bar{P}a$;

c.传递性:$\forall a,b,c\in A$,若 aPb,bPc,则 aPc.

这个顺序关系是严格顺序关系,如实数集 $\mathbf{R}$ 的"$<$"关系是 $\mathbf{R}$ 的严格顺序关系.

中学数学中还有非严格顺序关系,在上述定义中,只须将(b)改为"$\forall a,b\in A$,若 aPb,bPa,则 $a=b$"即可.例如中学数学中实数集 $\mathbf{R}$ 的"$\leqslant$"关系,集合的包含"$\subseteq$"关系等都是非严格顺序关系.

最后还需要指出:"大小关系"与"顺序关系"不能混淆,否则将产生概念上的错误.如复数不能定义大小关系,就误认为复数不可定义顺序关系.

(iii)运算关系.

在中学数学中,运算虽是重要内容之一,但未指出运算是一个特殊映射.运算的对象仅是数,多项式或其他一些初等函数,并未推广运算的对象可以是任意元素.

定义:A,B,C 是非空集合,一个由 $A\times B$ 到 C 的映射,称为 $A\times B$ 到 C 的代数运算,记作"$\circ$",即

$$\circ:(a,b)\in A\times B,(a,b)\to C=a\circ b\in C$$

例如,$A=\{$所有整数$\}$,$B=\{$不等于零的整数$\}$,$C=\{$有理数$\}$,若$\circ:(a,b)\to\frac{a}{b}=a\circ b\in C$,则$\circ$是 $A\times B$ 到 C 的一个代数运算,也就是普通的除法.

当 $A=B=C$ 时，$A\times A\to A$ 的代数运算○称为 A 对于○来说是封闭的，即○是 A 的代数运算.

例如，设 $A=B=C=\mathbf{Z}^{+}$（正整数集合），○：$(a,b)\to a+b=a\cdot b\in\mathbf{Z}^{+}$，则"＋"是 $\mathbf{Z}^{+}$ 的代数运算，也就是普通的加法. 而普通减法"－"不是 $\mathbf{Z}^{+}$ 的代数运算.

由上可知，代数运算不能离开运算对象所在的集合. 因此，在一个集合中，引进一个或几个代数运算，就构成了带有不同运算的集合，从而构成不同的代数系统. 这就是现代数学的基本思想之一——代数结构思想. 由上述各例知，在中学数学中，这种结构思想也是普遍存在的. 中学数学里有各种不同的数集及几何中的向量集（包括复数的向量表示），所引进的不同代数运算与其适合的不同算律，这就进一步构成了在近世代数中所研究的主要对象：群，环、域及高等代数中研究的主要对象向量空间的具体模型. 例如，$\{\mathbf{Z};+\}$ 为整数加群，$\{\mathbf{Z};+\cdot\}$ 为整数环，$\{\mathbf{Q};+\cdot\}$ 为有理数域，$\{\mathbf{R};+\cdot\}$ 为实数域，以及在几何中的三维向量空间，二维向量空间.

（iv）同构关系.

抽象代数是现代数学的基础课程之一，抽象代数的基本思想：它的理论，研究的不是集合的元素本身的含义，而是研究如何定义代数运算及其所定义的代数运算的性质. 因此，同构关系是代数学里的一个重要关系. "同构"一词在中学数学里虽未提及，但它的思想在中学数学中也是存在的，而且有应用.

定义 设"○"是集合 A 的代数运算，"$\overline{○}$"是集合 $\overline{A}$ 的代数运算，如果 A 到 $\overline{A}$ 存在一一映射 φ，且满足下列条件：$\forall a,b\in A,\bar{a},\bar{b}\in\overline{A}$，若 $a\xrightarrow{\varphi}\bar{a}$，$b\xrightarrow{\varphi}\bar{b}$，有 $a○b\to\bar{a}\,\overline{○}\,\bar{b}$，则称 φ 是 $A\to\overline{A}$ 的同构映射；对于代数运算○与$\overline{○}$来说，A 与 $\overline{A}$ 同构.

由上知，同构是"保持运算的一一映射". 例如，指数运算法则与对数运算法则在结构上是一致，这种一致性的实质是："幂运算"是从$[\mathbf{R};+]$到$[\mathbf{R}^{+};\cdot]$的同构；反之，"取对数运算"是从$[\mathbf{R}^{+};\cdot]$到$[\mathbf{R};+]$的同构. 又例如，我们在探讨等差数列与等比数列性质的对偶性时，其实质是：函数 $f(x)=e^{x}$ 从$[\mathbf{R};+]$到$[\mathbf{R}^{+};\cdot]$的同构，即数列 $\{a_n\}$ 有一个关于加法的性质 $a_n=a_{n-1}+d$，那么，由 $f(a_n)=f(a_{n-1}+d)=f(a_{n-1})\cdot f(d)$ 就得到 $\{b_n\}$ 的一个关于乘法 $b_n=b_{n-1}\cdot q$，其中 $q=f(d)$，反之也一样.

显然，数轴上的点集与实数集可以是为同构映射，坐标平面上的点集与有序实数对 (a,b) 可建立同构映射.

广而言之，作为数学方法论提出的"关系映射反演原则"，也正是依据同构思想而确立的.

把"同构"的条件削弱些，可得"同态"关系（保持运算的映射）. 依据同态思想，可以把握某些元素根本不同的两个系统之间在形式上的深刻一致性. 这正是数学模拟方法的思想依据. 在一定意义上可以说数形结合思想也正是着眼于数的集合与形（点）的集合间的同态.

综上可知，结构思想与对应思想的结合，形成了"同构"和"同态"思想.

以上我们简介了中学数学中的四类关系结构思想，其实还有一种很重要的映射关系结构思想，由于教材中已有明确定义，并以它为基础，研究了函数的一般概念及各种初等函数，读者对它有较多了解，因而就不多陈述了.

最后，我们还说明一点，中学数学中的结构思想是普遍的. 例如，集合的"交"、"并"，命题

的“与”、“或”等，满足交换律、结合律、重复律和吸收律，可用“格”的概念来概括，这也是中学数学涉及的一种代数结构. 又如实数概念，它既具有代数结构又具有顺序结构和拓扑结构.

3.2.6 极限思想

为了从一般性的高度揭示“极限”的实质，现代数学用“领域”来建立“极限”概念，从而把极限概念与“拓扑结构”联系起来，因而在中学数学中占有重要地位的极限思想，实质上也是一种“结构思想”. 但从中学数学教学角度看，则应着重从直观上考察无穷运动，从思维与想象的结合中加以辩证地理解.[25]

在中学数学中，圆的周长与面积，曲线的切线与渐近线等概念的建立都有赖于极限思想. 在许多问题的研究中，有时需要把点看成半径为 O 的圆或长短半轴均为 O 的椭圆(即“点圆”或“点椭圆”)，把线段看成面积为 O 的三角形等等，其实也都运用着极限思想；至于把直线看成半径无穷大的圆(曲率处处为 O 的曲线)，把平行线看成相交于无穷远的二直线，把定曲线的长度无限小的“弦”看成与所对的“弧”重合等等，更是辩证地运用有限与无限之间，“曲”与“直”之间矛盾转化的思想，而这矛盾转化的思想在数学中即体现为极限思想. 以上这种对极限思想的朴素的、直观的然而又是辩证的理解与运用，是中学数学教学的基本要求.

从历史上看，极限概念曾长期停留在直观的水平上. 直到 18 世纪，当微积分在各应用领域里凯歌行进的年代，极限思想仍然只是作为未从哲学母体中分化出来的笼统的直观的数学概念. 这就是说，正如“人们远在知道什么是辩证法以前，就已经在辩证地思考了”一样，在严格的极限定义出现以前，人们已经形成并运用极限思想了. 这种“从有限中认识无限，从近似中认识精确，从量变中认识质变”的思想，古代学者阿基米德、刘徽、祖冲之等已经运用到相当纯熟的地步. 因此，即使在引进极限定义以前，在数学教学中渗透极限思想不仅是完全必要的而且是可行的.

函数的极限可以理解为实数集上的一种“趋限运算”. 函数的定义域，既可以看成是一个“共时态”的“点集”，也可以从中确定一个“过程”(“点列”)从而“历时态”地研究其趋势，把握其终极“结果”. Wallis 在《无穷的算术》中提出函数极限的算术概念：它是被函数逼近的数，使得这个数和函数之间的差能小于任一指定的数，并且当过程无限继续下去时，差最终将消失. 他的话虽然是不严密的，但却包含了正确的思想.

用 $\varepsilon - N$ 语言描述数列极限和用 $\varepsilon - \delta$ 语言描述函数极限，正是上述思想的精确化.

极限思想在中学数学解题中有着广泛应用.

例 1 (2002 年高考题)函数 $y=1-\dfrac{1}{x-1}$ 的图象是图 25 中所示的(　　)

解 $x\neq 1$，当 $x>1$ 且 $x\to 1$ 时，$\dfrac{1}{x-1}\to+\infty$，$y=1-\dfrac{1}{x-1}\to-\infty$；当 $x<1$ 且 $x\to 1$ 时，$\dfrac{1}{x-1}\to-\infty$，$y=1-\dfrac{1}{x-1}\to+\infty$. 故选(B).

例 2 抛物线 $y=ax^2$ 与过其焦点 F 的直线 l 交于两点 P,Q；F 分线段 PQ 为两线段，其长分别为 p,q，则 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}$ 等于(　　)

(A) $2a$　　(B) $\dfrac{1}{2a}$　　(C) $4a$　　(D) $\dfrac{4}{a}$

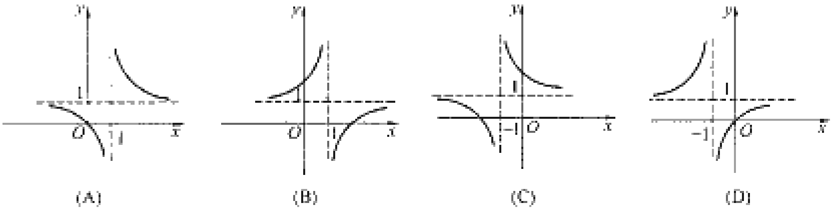


图 25

解　首先题目提供的第一个信息就是所求的结果是一个常数;第二个信息就是说直线 l 是经过点 F 任意运动的.

有了这两条我们就可以让点 P(或点 Q)运动到顶点 O,当然此时的点 Q(或点 P)就是"无穷远方",此时 $q\to\infty$,即 $\frac{1}{q}\to 0$(或 $p\to\infty$,$\frac{1}{p}\to 0$).于是 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{1/4a}+0=4a$.故选(C).

例 3　若四面体的一条棱长为 x,其余的棱长都是 1,它的体积为 $F(x)$,则 $F(x)$ 在其定义域上(　　)

(A)是增函数,但无最大值　　(B)是增函数,且有最大值

(C)不是增函数,但有最大值　　(D)不是增函数且无最大值

解　将两个边长都为 1 的正三角形一条边重合,一个三角形不动,另一个三角形由重合位置逐渐张开,当张开到两三角形垂直位置时体积最大,再继续张开则体积逐渐减少.故选 C.当两三角形趋向重合时,$F(x)\to 0$,故值域为 $(0,\frac{1}{8})$.

例 4　已知 $R>0$,$r>0$,$R\neq r$,比较 $\frac{1}{2}(R+r)$,$\sqrt{\frac{1}{2}(R^2+r^2)}$,$\sqrt[3]{\frac{1}{2}(R^3+r^3)}$ 的大小.

解　当 $r\to 0$ 时,有

$$\frac{1}{2}(R+r)\to\frac{1}{2}R,\quad\sqrt{\frac{1}{2}(R^2+r^2)}\to\frac{R}{\sqrt{2}},\quad\sqrt[3]{\frac{1}{2}(R^3+r^3)}\to\frac{R}{\sqrt[3]{2}}$$

由 $\frac{R}{2}<\frac{R}{\sqrt{2}}<\frac{R}{\sqrt[3]{2}}$,得

$$\frac{1}{2}(R+r)<\sqrt{\frac{1}{2}(R^2+r^2)}<\sqrt[3]{\frac{1}{2}(R^3+r^3)}$$

例 5　求离心离 $e=\frac{2}{\sqrt{5}}$,过点(1,0)且与直线 $L:2x-y+3=0$ 相切于点 $(-\frac{2}{3},\frac{5}{3})$,长轴平行于 y 轴的椭圆的方程.

解　把点 $(-\frac{2}{3},\frac{5}{3})$ 看作离心率 $e=\frac{2}{\sqrt{5}}$ 的椭圆系 $(x+\frac{2}{3})^2+\frac{1}{5}(y-\frac{5}{3})^2=0$ 的极限状态("点椭圆"),则与直线 $L:2x-y+3=0$ 相切于该点的椭圆系即为过直线 L 与"点椭圆"的公共点的椭圆系,其方程为

$$(x+\frac{2}{3})^2+\frac{1}{5}(y-\frac{5}{3})^2+\lambda(2x-y+3)=0$$

又由于所求的椭圆过点(1,0),代入上式,得 $\lambda=-\frac{2}{3}$.因此,所求椭圆方程为 $x^2+\frac{y^2}{5}=1$.

例 6 已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，且对于任意自然数 n，总有 $a_{n+1}=\frac{a_n}{a_n-2}$，是否存在实数 a,b，使得 $a_n=a-b(-\frac{2}{3})^n$ 对于任意自然数 n 恒成立？若存在，给出证明；若不存在，说明理由.

解 如果这样的 a,b 存在的话，则由 $a_n=a-b(-\frac{2}{3})^n$，可得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$

对 $a_{n+1}=\frac{a_n}{a_n-2}$两边取极限，得 $a=\frac{a}{a-2}$，解得 $a=0$ 或 $a=3$.

若 $a=0$，则数列$\{a_n\}$应该是以 1 为首项，以 $-\frac{2}{3}$ 为公比的等比数列，显然，不可能对任意的正整数 n 都满足 $a_{n+1}=\frac{a_n}{a_n-2}$；若 $a=3$，将 $a_1=1$ 代入 $a_n=a-b(-\frac{2}{3})^n$，可求得 $b=-3$，此时，$a_n=3+3\times(-\frac{2}{3})^n$，验证 a_2 即可得出矛盾.

所以，这样的实数 a,b 不存在.

例 7 （2000 年全国高考题）（Ⅰ）已知数列$\{c_n\}$，其中 $c_n=2^n+3^n$，且数列$\{c_{n+1}-pc_n\}$为等比数列，求常数 p；

（Ⅱ）已知数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$是公比不相等的两个等比数列，$c_n=a_n+b_n$，证明：数列$\{c_n\}$不是等比数列.

解 （Ⅰ）设$\{c_{n+1}-pc_n\}$的公比为 q，则

$$q=\frac{c_{n+2}-pc_{n+1}}{c_{n+1}-pc_n}=\frac{2^{n+2}+3^{n+2}-p(2^{n+1}+3^{n+1})}{2^{n+1}+3^{n+1}-p(2^n+3^n)}=$$

$$\frac{2^{n+1}(2-p)+3^{n+1}(3-p)}{2^n(2-p)+3^n(3-p)}=\frac{2\cdot(\frac{2}{3})^n\cdot(2-p)+3(3-p)}{(\frac{2}{3})^n\cdot(2-p)+(3-p)}$$

对上式两端取极限：

当 $p=3$ 时

$$q=\lim_{n\to\infty}2=2$$

当 $p\neq3$ 时
$$q=\lim_{n\to\infty}\frac{0+3(3-p)}{0+(3-p)}=3$$

此时
$$c_{n+2}-pc_{n+1}=3(c_{n+1}-pc_n)$$

即
$$2^{n+2}+3^{n+2}-p(2^{n+1}+3^{n+1})=3(2^{n+1}+3^{n+1})-3p(2^n+3^n)$$

整理得
$$2^{n+2}-p\cdot2^{n+1}=3\cdot2^{n+1}-3p\cdot2^n$$

即 $4-2p=6-3p$，得 $p=2$. 故常数 $p=2$ 或 $p=3$.

（Ⅱ）假设数列$\{c_n\}$是等比数列. 设$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$的公比分别为 $p,q,r(p\neq q)$.

因 $c_n=a_n+b_n$，则

$$r=\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{a_{n+1}+b_{n+1}}{a_n+b_n}=\frac{a_1p^n+b_1q^n}{a_1p^{n-1}+b_1q^{n-1}}=\frac{a_1(\frac{p}{q})^n+b_1}{\frac{a_1}{p}(\frac{p}{q})^n+\frac{b_1}{q}}$$

两边取极限：

若$|p|=|q|$,又$p\neq q$,则$p=-q$,$\frac{p}{q}=-1$,此时左边极限 r,右边极限不存在,矛盾;

若$|p|\neq|q|$,不妨设$\left|\frac{p}{q}\right|<1$,则

$$r=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1\cdot\left(\frac{p}{q}\right)^n+b_1}{\frac{a_1}{p}\cdot\left(\frac{p}{q}\right)^n+\frac{b_1}{q}}=\lim_{n\to\infty}\frac{b_1}{\left(\frac{b_1}{q}\right)}=q$$

此时 $$a_n=c_n-b_n=c_1r^{n-1}-b_1q^{n-1}=c_1q^{n-1}-b_1q^{n-1}=(c_1-b_1)q^{n-1}$$

表明数列$\{a_n\}$的公比$p=q$,这与题设矛盾.故假设不成立,即数列$\{c_n\}$不是等比数列.

3.2.7　模型思想

模型思想是中学数学中的一种极为重要而又极为普遍的思想.

数学模型是实际问题的简化和抽象.数学模型,广义地说,一切数学概念、公式、数学理论体系关系结构,如波利亚在《怎样解题》一书所说的"早已解决的问题"、"辅助问题"、"可资模仿的正式模式"等都可称为数学模型.

模型思想就是借助于数学模型来处理各类问题(包括数学学习和实际应用方面的问题).模型思想的学习与掌握,运用与深化,一般是按模型模仿——模型转换——模型构建的主线进行和发展的.构建数学模型是一项有意义而富有挑战性的工作,构建一个好的模型与证明深刻的定理一样富有重大意义.模型思想的领悟与运用,我们在《数学建模导引》中介绍了大量的例子.在这里,就不举例说明了.

上面,我们简介了公理化与结构思想的主要特征、意义以及在中学数学中的体现.由于公理化思想重视逻辑思维及结构思想重视形式特征,因而这两种基本思想常运用于"回顾"性的"总结",对"探索"性的"展望"作用要欠缺一些.尽管如此,它们在整个数学发展史上所起的重大推动作用却是盖世的.大家都公认,欧氏几何的出现,开辟了几何理化思想的新时代,而且使公理化思想波及到其他科学领域,这是数学发展史的第一个里程碑.如果说,解析几何的发明,为空间形式与数量关系之间架起了一座可以互通的桥梁;微积分的发明,把人类的抽象思维形式引进到无穷小分析领域;集合论的出现,为整个数学找到了一个统一的理论基础分别是数学发展史的第二、三、四个里程碑,那么,结构思想的提出,它不仅把公理化思想方法推向了一个更高的阶段,从而为数学方法论揭示了新的一页,而且为发现新的交叉学科和边缘学科创造条件.这可以说它是数学发展史上的第五个里程碑.

思考题

1.若$x_i=\frac{i}{101}$,求和$T=\sum\limits_{i=0}^{101}\frac{x_i^3}{3x_i^2-3x_i+1}$.

2.已知2^{130}以 1 开头,$S=\{2^n\mid n=1,2,3,\cdots,130\}$,则 S 中有多少个数以 4 开头?

3.若函数$f(x)=\log_2|ax-1|$的图象对称轴为$x=2$,求非零实数 a 的值.

4.若函数$f(x+1)$过点$(-1,1)$,求$f(4-x)$必过点________.

5.在边长为 a 的正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中,求异面直线BC_1和 AC 的距离.

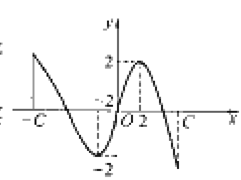
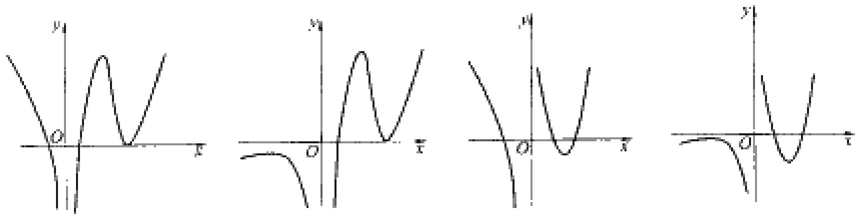


图 26

6. 设函数 $f(x)$ 在定义域内可导，$y=f(x)$ 的图象如图 26 所示，则导函数 $y=f'(x)$ 的图象可能为(　　).



(a)　　(b)　　(c)　　(d)

7. 求方程 $x^6-6x^4-x^3+12x^2-8=0$ 的实数根.

8. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，已知 $a_3=12$，$S_{12}>0$，$S_{13}<0$.

(Ⅰ)求公差 d 的取值范围；

(Ⅱ)指出 $S_1,S_2,\cdots,S_{12}$ 中哪一个值最大，并说明理由.

9. 解不等式 $(x^2-4x+6)^3+2x^2-10x\geqslant x^3-12$.

10. $\triangle ABC$ 是正三角形，$\triangle A_1B_1C_1$ 的边 A_1B_1，B_1C_1，C_1A_1 交 $\triangle ABC$ 各边分别于 C_2,C_3；A_2,A_3；B_2,B_3，已知 $A_3C_3=C_2B_3=B_2A_3$，且 $C_2C_3^2+B_2B_3^2=A_2A_3^2$. 求证：$A_1B_1\perp A_1C_1$.

11. 设 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心，L,M,N 分别是 BC,CA,AB 边的中点. D,E,F 分别是三条高的垂足，P,Q,R 分别是 HA,HB,HC 的中点. 试证：L,M,N,D,E,F,P,Q,R 九点共圆(九点圆定理).

12. (2002 年高考题)已知 $0<x<y<a<1$，则有(　　).

(A) $\log_a(xy)<0$　　(B) $0<\log_a(xy)<1$

(C) $1<\log_a(xy)<2$　　(D) $\log_a(xy)>2$

13. 已知有向线段 PQ 的起点 P 和终点 Q 的坐标分别是 $P(-1,1)$ 和 $Q(2,2)$，若直线 $l:x+my+m=0$ 与线段 PQ 的延长线相交，求 m 的取值范围.

思考题参考解答

1. 设 $f(x)=\dfrac{x^3}{3x^2-3x+1}$，则 $f(x)=\dfrac{x^3}{x^3+(1-x)^3}$，所以

$$f(x_i)+f(1-x_i)=\frac{x_i^3}{x_i^3+(1-x_i)^3}+\frac{(1-x_i)^3}{(1-x_i)^3+x_i^3}=1$$

从而所求 $T=51$.

2. 将 $1,2,\cdots,9$ 分成四个集合 $A'=\{1\}$，$B'=\{2,3\}$，$C'=\{4\}$，$D'=\{5,6,7,8,9\}$. 由 $2^{130}\approx10^{0.301\times130}=10^{39.13}$，则 2^{130} 为 40 位数，记 x 的首位为 $T(x)$，则

$$A=\{x\mid T(x)\in A'\},\quad B=\{x\mid T(x)\in B'\}$$
$$C=\{x\mid T(x)\in C'\},\quad D=\{x\mid T(x)\in D'\}$$

(i)若 $T(x)\in A$，则 $T(2x)\in B$；

(ii)若 $T(x)\in B$，则 $T(2x)\in C\cup D$；

(iii)若 $T(x)\in C$，则 $T(2x)\in D$；

(iv)若 $T(x)\in D$，则 $T(2x)\in A$.

又因 $T(2^{130})=1\in A$，则每个 $T(x)\in A$ 唯一对应于一个 $T(2x)\in B$，反之也成立. 故 $\text{card } A=\text{card } B$.

同理若 $T(x)\in A$，则 $T(\frac{x}{2})\in D$，反之也成立，故 $\text{card } A=\text{card } D$，即 $\text{card } A=\text{card } B=\text{card } D$，而 2^{130}为 40 位数且每次只有进位才会出现首位为 1，则 $\text{card } A=\text{card } B=\text{card } D=39$，从而 $\text{card } C=130-3\times 39=13$，故以 4 开头的数有 13 个.

3. 解法 1　（变换思想）

图象变换：$\log_2|x|\xrightarrow{\text{右平移 }1}\log_2|x-1|\xrightarrow{\text{伸缩 }1/a}\log_2|ax-1|$，对称轴变换：$x=0\xrightarrow{\text{右平移 }1}x=1\xrightarrow{\text{伸缩 }1/a}x=\frac{1}{a}$.

由对称轴为 $x=\frac{1}{a}$，得 $a=\frac{1}{2}$.

解法 2　（对称思想）

由 $f(x)$关于 $x=2$ 对称，知 $f(x+2)=f(-x+2)$恒成立，则$|a(x+2)-1|=|a(2-x)-1|$恒成立，即$|(2a-1)-ax|=|(2a-1)+ax|$恒成立. 又 $a\neq 0$，则 $2a-1=0$，即 $a=\frac{1}{2}$.

解法 3　（对应思想）

由 $y=\log_2|t|$的对称轴为 $t=0$，令 $t=ax-1$，由整体对应思想知 $y=\log_2|ax-1|$的对称轴应在 $ax-1=0$ 处取得，即对称轴为 $x=\frac{1}{a}$，则 $a=\frac{1}{2}$.

4. 解法 1　（变换思想）

图象变换：$f(x+1)\xrightarrow{\text{右平移 }1}f(x)\xrightarrow{\text{关于 }y\text{ 轴对称}}f(-x)\xrightarrow{\text{右平移 }4}f(4-x)$；

点变换：$(-1,1)\xrightarrow{\text{右平移 }1}(0,1)\xrightarrow{\text{关于 }y\text{ 轴对称}}(0,1)\xrightarrow{\text{右平移 }4}(4,1)$.

所以 $f(4-x)$必过点$(4,1)$.

解法 2　（对应思想）

因 $f(x+1)$过点$(-1,1)$，则 $f(-1+1)=1$，即 $f(0)=1$. 由对应思想知：当 $4-x=0$，$y=1$，即 $x=4$ 时，$y=1$. 所以 $f(4-x)$必过点$(4,1)$.

5. 设 P 是 BC_1 上动点，如图 27 所示，作 $PE\perp BC$，垂足为 E，$EF\perp AC$，垂足为 F，联结 PF，由三垂线定理得 $PF\perp AC$.

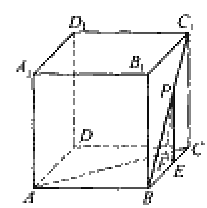


图 27

设 $PE=x$，则 $BE=x$，$EC=a-x$，$EF=\frac{\sqrt{2}}{2}(a-x)$，于是 $PF^2=x^2+\frac{1}{2}(a-x)^2=\frac{3}{2}x^2-ax+\frac{a^2}{2}=\frac{3}{2}(x-\frac{a}{3})^2+\frac{a^2}{3}$，所以当 $x=\frac{a}{3}$时，PF 的最小值为$\frac{\sqrt{3}}{3}a$，即为异面直线 AC 和 BC_1 的距离.

6. 由导函数的图象研究导函数的性质，主要是考查可导函数与其导函数的关系及其几何意义.

由 $y=f(x)$的图象可知，$y=f(x)$有一个极大值点和一个极小值点，设为 $x_1<x_2$，则 $f'(x)=0$ 有两根 x_1，x_2.

当 $x<0$ 时，$y=f(x)$递减，则 $f'(x)<0$，排除 A，C；

当 $0<x<x_1$ 时，$y=f(x)$递增，则 $f'(x)>0$；

当 $x_1<x<x_2$ 时，$y=f(x)$递减，则 $f'(x)<0$；

当 $x>x_2$ 时，$y=f(x)$递减，则 $f'(x)>0$，排除 B.

故正确答案为 D.

7. 把原方程化为 $x^6-6x^4+12x^2-8=x^3$，即$(x^2-2)^3=x^3$. 作 $f(x)=x^3$，则原方程为 $f(x^2-2)=f(x)$.

又 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上为递增函数，则 $x^2-2=x$，即 $x^2-x-2=0$，得 $x_1=-1$，$x_2=2$.

原方程的实根为 $x=-1$ 或 $x=2$.

8. (Ⅰ)易得 $-\frac{24}{7}<d<-3$(过程略).

(Ⅱ)(用函数思想解答)$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{d}{2}n^2+(a_1-\frac{d}{2})n$，因 $a_1=12-2d$，则 $S_n=\frac{d}{2}n^2+(12-\frac{5d}{2})n$，考察二次函数 $y=\frac{d}{2}x^2+(12-\frac{5}{2}d)x$，又 $d<0$，$-\frac{b}{2a}=\frac{5}{2}-\frac{12}{d}$，则当 $x=\frac{5}{2}-\frac{12}{d}$时，函数有最大值.

因 $-\frac{24}{7}<d<-3$，则 $6<\frac{5}{2}-\frac{12}{d}<6\frac{1}{2}$. 故当 $n=6$ 时，S_n 有最大值. 即在 $S_1,S_2,\cdots,S_{12}$ 中 S_6 最大.

注：若$\{a_n\}$为等差数列，$d<(>)0$，则当$|n-(\frac{1}{2}-\frac{a_1}{d})|$取最小值时，$S_n$ 取最大(小)值.

9. 原不等式可化为

$$(x^2-4x+6)^3+2(x^2-4x+6)\geqslant x^3+2x$$

令 $f(x)=x^3+2x$，则 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上为递增函数，且原不等式为 $f(x^2-4x+6)\geqslant f(x)$，则 $x^2-4x+6\geqslant x$，即 $x^2-5x+6\geqslant 0$，即 $x\leqslant 2$ 或 $x\geqslant 3$. 原不等式的解为$\{x\mid x\leqslant 2$ 或 $x\geqslant 3\}$.

10. 要证 $A_1B_1\perp A_1C_1$，只须证$\angle B_1A_1C_1=90°$. 而已知 $C_2C_3^2+B_2B_3^2=A_2A_3^2$，酷似勾股定理的关系式，但 C_2C_3，B_2B_3，A_2A_3 并不是一个三角形的三条边，不妨设法平移线段 C_2C_3，B_2B_3，A_2A_3 成为一个三角形. 这时，所成的三角形的最大角将是直角. 只须证$\angle B_1A_1C_1$ 等于这个直角就可以了.

如图 28，过 A_2 作 C_3C_2 的平行线交过 C_2 所作 C_3A_2 的平行线于点 O，则 $A_2OC_2C_3$ 是平行四边形，故

$$A_2O=C_3C_2,\quad OC_2=A_2C_3=B_3C_2$$

又因为$\angle OC_2B_3=\angle C=90°$，所以，$\triangle OB_3C_2$ 是正三角形. 从而

$$\angle OB_3C_2=60°=\angle B\Rightarrow OB_3/\!/A_2B_2$$

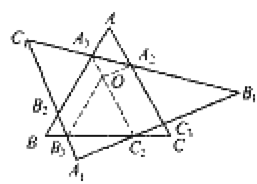


图 28

且
$$OB_3=C_2B_3=A_3B_2$$

因此，$OB_3B_2A_3$ 是平行四边形. 故 $OA_3/\!/B_3B_2$，且 $OA_3=B_3B_2$，因为

$$(C_2C_3)^2+(B_2B_3)^2=(A_2A_3)^2$$

则
$$(OA_2)^2+(OA_3)^2=(A_2A_3)^2$$

由勾股定理逆定理得$\angle A_2OA_3=90°$. 由已证 $OA_3/\!/B_3B_2$，即 $OA_3/\!/A_1C_1$，$A_2O/\!/C_3C_2$，即 $A_2O/\!/B_1A_1$，所以$\angle C_1A_1B_1=90°$. 故 $A_1B_1\perp A_1C_1$.

11. 由于 P,Q,R 分别是 HA,HB,HC 的中点，故以 H 为位似中心，位似比 2 的位似变换

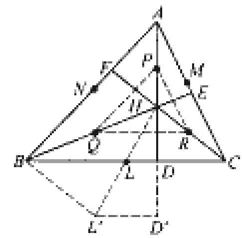


图 29

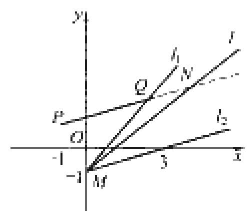


图 30

把⊙PQR 变成⊙ABC. 因此, 要证 L,M,N,D,E,F 在⊙PQR 上, 只要证明这些点在上述位似变换下的像点均在⊙ABC 上即可.

如图 29, 作 $H\xrightarrow{C(D)}D'$, $H\xrightarrow{C(L)}L'$, 而 D', L' 在⊙ABC 上. 同理 E,M,F,N 的像点也在⊙ABC 上, 再由上述位似变换之逆即证得结论成立.

12. 当 $x\to a$ 时, 由题意 $y\to a$, 此时 $xy\to a^2$, $\log_a(xy)\to 2$, 故可排除 A, B; 当 $y\to 0$ 时, 由题意 $x\to 0$, 此时 $xy\to 0$, 又 $0<a<1$, 则 $\log_a(xy)\to+\infty$, 故答案应选 D.

13. 若 $m=0$, 则直线 $l: x=0$ 与线段 PQ 相交, 不合题意. 故 $m\neq 0$, 此时 l 的方程为 $y=-\frac{1}{m}x-1$. 易知直线 l 恒过定点 $M(0,-1)$.

不妨先考虑直线 l 的极限情形: 由于直线 l 必须与有向线段 PQ 的延长线相交, 如图 30, l 的斜率必须小于 M, Q 两点所在直线 l_1 的斜率 $k_1=\frac{3}{2}$; 当 l 离开 l_1 的位置绕点 M 顺时针旋转时, 则 l 与 PQ 的延长线的交点 N 逐渐远离 Q 点, 当交点 N 与 Q 的距离趋向无穷大时, l 逐渐趋向 l_2($l_2 /\!/ PQ$), 这时 l 的斜率趋向 PQ 的斜率 $k_2=\frac{1}{3}$, 故 l 应夹在 l_1 与 l_2 之间, 则 $k_2<-\frac{1}{m}<k_1$, 即 $\frac{1}{3}<-\frac{1}{m}<\frac{3}{2}$, 故 $-3<m<-\frac{2}{3}$ 为所求.

第四章　两大“主梁”思想

数学的科学地位和与哲学的源远流长关系决定了数学的精神与价值，从而确立了数学思想的两大主梁.

数学思想是深层次的数学知识，是贯穿数学知识的红线，因此，数学思想也可以说是数学大厦内在的框架结构，基本数学思想也可以是中学数学的内在框架结构．两大“基石”、两大“支柱”、两大“主梁”构成了中学数学的内在框架结构.

4.1　系统与统计思想(一)

4.1.1　系统思想

系统思想作为一种崭新的科学思想，是在20世纪50年代出现的．但是，它的思想萌芽早在远古就已产生．亚里士多德就曾认识到，对于一个系统而言，“整体大于各局部的总和”．我国中医也早就把人看作是各种器官相互联系、相互作用的整体，即是一个系统．一副中药由许多味药组成，它们分别处于“君”、“臣”、“佐”、“使”的地位，各司其职，相互配合，组成一个整体，产生治疗疾病的作用，一副中药也被看作一个系统.

尽管古代已经有了系统思想萌芽，但毕竟是一种朴素的、模糊的、经验形态的东西．15世纪以后，科学逐渐走上了专业分工研究的道路，常把对象肢解为孤立的部分去研究．这种研究思想方法，虽然比以前将哲学与自然科学混在一起研究时，取得了对事物的较深入的认识，但却使得这种机械的，形而上学的认识方法，统治了人们的思想，妨碍了认识的进一步发展.

美籍奥地利生物学家贝塔朗菲，在20世纪20年代就认识到“当时流行的机械论方法，忽视或者否定生命现象中本质的东西，他在生物学中提倡有机组织的概念，强调把生物作为一个整体或系统来考虑．”(贝塔朗菲著,《一般系统论》,社会科学文献出版社)．随后，他提出了一般系统论.

系统的主要特性在于它的整体性、结构性、有序性、动态性、目的性及系统与环境的适应性．从整体与局部、局部与局部、整体与外部环境的相互联系及动态变化中考察对象，以获得正确的认识及处理问题的最优方案.

一个系统的性质，结构和功能是由简单到复杂，由低级向高级的方向发展的，表现为有序结构，有序是系统的基本属性．在证明不等式时，常因变元多而无序，给证明带来一定的困难．如果给变元假定一个大小顺序而不影响命题成立的话，就能使问题由一般情形化归为特殊情形，并由此发现规律并找到证题途径.

例1　设 x,y,z 为非负实数，且 $x+y+z=1$，求证：$xy+yz+zx-2xyz\leqslant\frac{7}{27}$.

简析　本题出现三个变元，设法减元是证题的突破口.

证明 由对称性,不妨设 $x\geqslant y\geqslant z$,令 $x+y=\frac{1}{2}+t$,则 $z=\frac{1}{2}-t$. 由 $x+y\geqslant 2z$,$x+y\leqslant 1$,知 $\frac{1}{6}\leqslant t\leqslant\frac{1}{2}$,则

$$\begin{aligned}xy+yz+zx-2xyz&=(x+y)z+xy(1-2z)=\frac{1}{4}-t^2+xy\cdot 2t\leqslant\\&\frac{1}{4}-t^2+2t\left(\frac{x+y}{2}\right)^2=\frac{1}{4}-t^2+\frac{t}{2}\left(\frac{1}{2}+t\right)^2=\\&\frac{1}{4}\cdot 2t\left(\frac{1}{2}-t\right)^2+\frac{1}{4}\leqslant\frac{1}{4}\left[\frac{2t+\left(\frac{1}{2}-t\right)+\left(\frac{1}{2}-t\right)}{3}\right]^3+\frac{1}{4}=\frac{7}{27}\end{aligned}$$

当且仅当 $2t=\frac{1}{2}-t$,即 $t=\frac{1}{6}$时上式取"=".

注:换元后,设 $x\geqslant y\geqslant z$,得出 t 的范围是证题的关键.

例 2 设 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,求证:$abc\geqslant(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)$.

证明 求证式关于 a,b,c 对称,不妨设 $a\geqslant b\geqslant c>0$,若 $a\geqslant b+c$,则 $b+c-a\leqslant 0$,$c+a-b>0$,$a+b-c>0$,不等式成立;若 $a<b+c$,则根据均值不等式有

$$a=\frac{(a+c-b)+(a+b-c)}{2}\geqslant\sqrt{(c+a-b)(a+b-c)}$$

同理
$$b\geqslant\sqrt{(b+c-a)(a+b-c)},\quad c\geqslant\sqrt{(c+a-b)(b+c-a)}$$

以上三式相乘即得所证不等式.

静止是相对的,运动是绝对的. 任何系统都处在不断发展变化的动态过程中,动态性是系统的另一特征. 数学是研究客观世界的数量关系和空间形式的科学,因此用运动的观点处理数学问题是必然要求,用函数法证明不等式就是这一原理的具体表现.

例 3 设 $0<x,y,z<1$,证明:$x(1-y)+y(1-z)+z(1-x)<1$.(第 15 届全俄数学奥林匹克九年级试题)

分析 不等式化为 $x(1-y)+y(1-z)+z(1-x)-1<0$,把 x 看成未知数,用函数观点考虑.

证明 设 $f(x)=(1-y-z)x+y(1-z)+z-1$,当 $1-y-z=0$ 时,$f(x)=(1-z)(y-1)<0$;当 $1-y-z\neq 0$ 时,一次函数是$(0,1)$上的单调函数. 因

$$f(0)=(1-z)(y-1)<0$$

$$f(1)=1-y-z+(1-z)(y-1)=-yz<0$$

则
$$(1-y-z)x+y(1-z)+z-1<0$$

即
$$x(1-y)+y(1-z)+z(1-x)<1$$

中学数学中蕴含的系统思想主要组成部分有整体思想、分解组合思想、运动变化思想、最优化思想等.

4.1.2 整体思想

整体思想就是始终把所考察的对象作为一个整体来对待,而且这个整体是各要素按一定的规律组成的有机统一体. 整体的性质与规律只存在于组成系统的各要素的相互联系、相互作用之中,一个系统的功能不仅与其组成的要素有关,而且与这些要素的相互配合关系有关. 系统的功能不等于各要素功能的机械的总和,由各要素的配合可以产生新的功能——联

合功能.由于系统的动态性,整体也是相对的.

运用整体思想处理问题,就是运用整体的集合性、非加和性、相对性、多维性或统一性(从不同侧面、不同角度的整体处理、代入、消元、变形等)等特性处理问题.

例1 已知 $f(x)=a\sin^5 x+bx^3+cx+8$(a,b,c 为常数),$f(2)=10$,求 $f(-2)$ 的值.

解 设 $a\sin^5 x+bx^3+cx=g(x)$,则 $f(x)=g(x)+8$ 且 $g(-x)=-g(x)$.

由 $f(2)=g(2)+8=10$,得 $g(2)=2$,故

$$f(-2)=g(-2)+8=-g(2)+8=-2+8=6$$

例2 已知 $\cos(\alpha+\beta)=\frac{4}{5}$,$\cos(\alpha-\beta)=-\frac{4}{5}$,$\frac{3\pi}{2}<\alpha+\beta<2\pi$,$\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\pi$,求 $\cos 2\alpha$ 与 $\cos 2\beta$ 的值.

解 因 $\frac{3\pi}{2}<\alpha+\beta<2\pi$,$\cos(\alpha+\beta)=\frac{4}{5}$,则 $\sin(\alpha+\beta)=-\frac{3}{5}$.

又 $\frac{\pi}{2}<\alpha-\beta<\pi$,$\cos(\alpha-\beta)=-\frac{4}{5}$,则 $\sin(\alpha-\beta)=\frac{3}{5}$.从而

$$\cos 2\alpha=\cos[(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)]=\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=-\frac{7}{25}$$

同理
$$\cos 2\beta=\cos[(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)]=-1$$

例3 已知 $\sin\alpha+3\cos\alpha=2$,求 $\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$ 的值.

解 设 $\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=k$,结合已知可得 $\sin\alpha=\frac{1+k}{2-k}$,$\cos\alpha=\frac{1-k}{2-k}(k\neq 2)$,则 $\left(\frac{1+k}{2-k}\right)^2+\left(\frac{1-k}{2-k}\right)^2=1$,整理得 $k^2+4k-2=0$,解得 $k=-2\pm\sqrt{6}$,故 $\frac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}=-2\pm\sqrt{6}$.

例4 已知△ABC 的三个内角 A,B,C 满足 $A+C=2B$,且 $\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos C}=-\frac{\sqrt{2}}{\cos B}$,求 $\cos\frac{A-C}{2}$ 的值.

解 一般思路为:$\cos\frac{A-C}{2}=\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{A}{2}\sin\frac{C}{2}$,再由题设求出 $\cos\frac{A}{2}$,$\sin\frac{A}{2}$,$\cos\frac{C}{2}$,$\sin\frac{C}{2}$ 的值,对于此题给出的条件,这种化整为零的思想是不可取的,因它的工作量大,且极易出错.若将 $\frac{A-C}{2}$ 看作一个整体,由已知条件化出 $\frac{A-C}{2}$ 的三角函数是另一思路.下面沿这一思路求解试一试.

因 $A+C=2B$,则 $B=60°$,进而得 $\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos C}=-2\sqrt{2}$,即 $\cos A+\cos C=-2\sqrt{2}\cos A\cos C$,得

$$2\cos\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2}=-\sqrt{2}[\cos(A+C)+\cos(A-C)]$$

又 $A+C=120°$,则 $\cos\frac{A-C}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt{2}\cos(A-C)$,得 $4\sqrt{2}\cos^2\frac{A-C}{2}+2\cos\frac{A-C}{2}-3\sqrt{2}=0$,解得 $\cos\frac{A-C}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

例 5　x,y,z 均为非负数,且满足关系式:$x=y+z-1=4-y-2z$,求 $u=2x^2-2y-z$ 的最值.

解　若将 x 与 y 表示为关于 z 的式子,并代入 u 得关于 z 的二次函数,只能求得最小值,求不出最大值,思维受阻.若将 $x+y+z$ 作为整体设元结合题设等式,可获如下解法.

设 $x+y+z=k$,结合原条件,有整体

$$\begin{cases} x-y-z=-1 \\ x+y+2z=4 \\ x+y+z=k \end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases} x=\dfrac{k-1}{2} \\ y=\dfrac{3k-7}{2} \\ z=4-k \end{cases}$$

代入 u 可得 $u=\dfrac{1}{2}(k-3)^2-1$. x,y,z 均为非负数,则 $\begin{cases} \dfrac{k-1}{2}\geqslant 0 \\ \dfrac{3k-7}{2}\geqslant 0 \\ 4-k\geqslant 0 \end{cases}$,解之得 $\dfrac{7}{3}\leqslant k\leqslant 4$.

当 $k=3\in\left[\dfrac{7}{3},4\right]$,即 $x=y=z=1$ 时,$u_{最小}=-1$;

当 $k=4$,即 $x=\dfrac{3}{2}$,$y=\dfrac{5}{2}$,$z=0$ 时,$u_{最大}=-\dfrac{1}{2}$.

例 6　求包含在正整数 m 与 $n(m<n)$ 之间的分母为 3 的所有不同既约分数之和.

解　由于这样的所有分数是

$$m+\frac{1}{3},m+\frac{2}{3},m+\frac{4}{3},m+\frac{5}{3},\cdots,n-\frac{2}{3},n-\frac{1}{3}$$

它既非等差数列,又非等比数列,当然不好求和,但我们看到包含正整数 m 与 n 之间的可约分分数为 $m,m+1,\cdots,n-1,n$.

它的各项和容易求出为

$$S_1=\frac{(m+n)(n-m+1)}{2}$$

这两类分数统一在整体

$$m,m+\frac{1}{3},m+\frac{2}{3},m+1,m+\frac{4}{3},m+\frac{5}{3},\cdots,n-\frac{2}{3},n-\frac{1}{3},n$$

之中,而这整体分数为等差数列,各项和为

$$S_2=\frac{(m+n)(3n-3m+1)}{2}$$

所以所求分数之和为

$$S=S_2-S_1=n^3-m^2$$

例 7　设复数 z 满足等式 $|z-i|=1$,且 $z\neq 0$,$z\neq 2i$,又复数 w 使得 $\dfrac{w}{w-2i}\cdot\dfrac{z-2i}{z}$ 为实数,问复数 w 在复平面内所对应的点是什么图形?并说明理由.

分析 本题若设 z 与 w 的代数式或三角式都不易求解.若根据题设条件,联想 $z\in\mathbf{R}\Leftrightarrow z=\bar{z}$,进行整体变形,可打开突破口,促使问题获解.

解 由题设知

$$\frac{w}{2-2i}\cdot\frac{z-2i}{z}=\frac{\bar{w}}{\bar{w}+2i}\cdot\frac{\bar{z}+2i}{\bar{z}}$$

即

$$\frac{w(\bar{w}+2i)}{\bar{w}(w-2i)}=\frac{z(\bar{z}+2i)}{\bar{z}(z-2i)}$$

比较上式两边知 $w=z$,代入 $|z-i|=1$,得 $|w-i|=1(w\neq0,w\neq2i)$,故复数 w 在复平面上的对应点的集合是以(0,1)为圆心,半径为1的圆(除去(0,0)和(0,2)两点).

4.1.3 分解组合思想

分解组合思想就是在处理问题时,从思维的角度,将待处理的问题的条件分解组合起来,分拆迭加起来,从统一的角度,用整体的观点来考虑如何达到目标.这可使我们更为透彻更有条理地了解问题中所包含的各种信息,这对于比较自然,比较有把握地获得问题的处理途径或方案无疑大有好处.

在很多情形中,一个问题的处理从思维上讲离不开"分"与"合"的相互配事、相互转化.因而,掌握"分"与"合"的时机和尺度是灵活运用分解组合思想的关键.

平面几何内容在证明"一条弧所对的圆周角等于它所对的圆心角的一半"这条定理时,运用的就是分解组合思想.

如图1所示,分三种情形讨论,组合而获证.

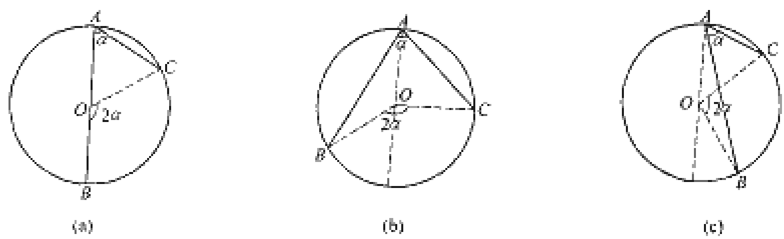


图1

当圆心 O 在角 α 的一条边上时,如图1(a)所示,容易证明(略);当圆心 O 在角 α 内部时,由图1(b)的和组合($\angle BOD+\angle DOC=2\alpha$);当圆心 O 在角 α 外部时,由图1(c)的差组合($\angle DOC-\angle BOC=2\alpha$).

课本中的定理:"弦切角的度数等于它所夹的弧的度数的一半",也是利用分解组合思想证明的.

例1 一个六位数6个数字都不相同,最左边一位数字是1,表示为 $1abcde$(其中 a,b,c,d,e 分别为各数位上的数字),将它乘以3后为 $abcde1$,求这个六位数.

在处理这个问题时,由于所求六位数中含有 a,b,c,d,e 5个未知数,虽然可采用列竖式推理的方法逐次求出 e,d,c,b,a,但比较运用分解组合思想来求解还是逊色了.注意到这所求的五个数字在两个数中都是按 $abcde$ 的顺序排列,所挪动的只是1的位置.有此特殊关系,不妨把这五位数设为 x(即 $abcde$ 为 x),则所求六位数为 $100\,000+x$,依题意,有

$$3(100\ 000+x)=10x+1$$

解得 $x=42\ 857$,故所求的六位数为 142 857.

例 2　分解因式 $x^3+ax^2+bx^2+cx^2+abx+bcx+acx+abc$.

在处理这个问题时,为便于分组后可提取公因式,运用分解组合思想可有如下分组方案:

解法 1　原式 $=(ax^2+abx+acx+abc)+(x^3+bx^2+cx^2+bcx)=\cdots=(x+b)(x+c)(x+a)$

解法 2　原式 $=(bx^2+abx+bcx+abc)+(x^3+ax^2+cx^2+acx)=\cdots=(x+b)(x+a)(x+c)$

解法 3　原式 $=(cx^2+acx+bcx+abc)+(x^3+ax^2+bx^2+abx)=\cdots=(x+b)(x+a)(x+c)$

解法 4　原式 $=(x^3+ax^2)+(bx^2+abx)+(cx^2+acx)+(bcx+abc)+=\cdots=(x+a)(x+b)(x+c)$

……

例 3　不用三角知识证明:三角形的边长分别是 a,b,c.

(Ⅰ)若 $\angle A=60°$,则 $S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}[a^2-(b-c)^2]$;

(Ⅱ)若 $\angle A=120°$,则 $S_{\triangle ABC}=\frac{\sqrt{3}}{12}[a^2-(b-c)^2]$.

按题设要求,须采取一定的措施才能给出证明.运用分解组合思想可得如下证法.

证明　若 $\angle A=60°$,则 $\angle B+\angle C=120°$,于是可用六个这样的三角形按图 2(a)那样组合成一个六角形的花环,它的外廓是边长为 a 的正六边形,其里面是边长为 $b-c$(设 $b>c$)的正六边形,则由

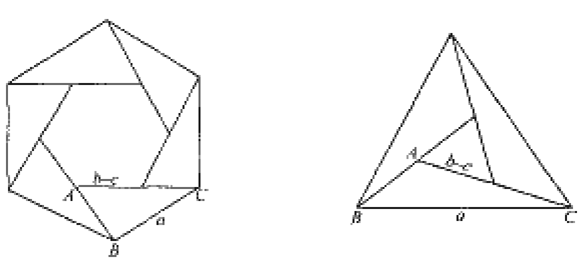
$$6S_{\triangle ABC}=S_{外正六边形}-S_{内正六边形}=\frac{3}{2}\sqrt{3}[a^2-(b-c)^2]$$

即证.

若 $\angle A=120°$,则 $\angle B+\angle C=60°$,于是可用三个这样的 $\triangle ABC$ 按图 2(b)那样组合成一个三角形花环,它的外廓是边长为 a 的正三角形,其内是边长为 $b-c$ 的正三角形,则由

$$3S_{\triangle ABC}=S_{外三角形}-S_{内三角形}=\frac{\sqrt{3}}{4}[a^2-(b-c)^2]$$

即证.



(a)　　(b)

图 2

例 4 如图 3,过锐角$\triangle ABC$的顶点作此三角形外接圆的三条直线 AD, BE, CF,求证:

$$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABF}+S_{\triangle BCD}+S_{\triangle CAE}$$

此题若从各个部分分别去证其相等,则难以奏效.若运用分解组合思想处理,则可简捷获证.

证明 如图 3 所示,三条直径分$\triangle ABC$为六个小三角形,记为奇数 1,3,5,7,9,11;三条直径分$\triangle ABF$,$\triangle BCD$,$\triangle CAE$ 各为两个小三角形,这六个小三角形记为偶数 2,4,6,8,10,12.

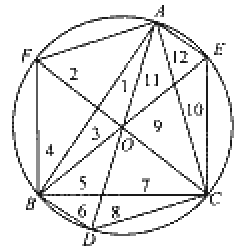


图 3

由 $OC=OF$,有

$$S_{\triangle 1}+S_{\triangle 2}=S_{\triangle 9}+S_{\triangle 11}$$

同理

$$S_{\triangle 3}+S_{\triangle 4}=S_{\triangle 5}+S_{\triangle 7}$$

$$S_{\triangle 5}+S_{\triangle 6}=S_{\triangle 1}+S_{\triangle 3}$$

$$S_{\triangle 7}+S_{\triangle 8}=S_{\triangle 9}+S_{\triangle 11}$$

$$S_{\triangle 9}+S_{\triangle 10}=S_{\triangle 5}+S_{\triangle 7}$$

$$S_{\triangle 11}+S_{\triangle 12}=S_{\triangle 1}+S_{\triangle 3}$$

将上述六个等式两边分别相加,整理化简得

$$S_{\triangle 1}+S_{\triangle 3}+S_{\triangle 5}+S_{\triangle 7}+S_{\triangle 9}+S_{\triangle 11}=S_{\triangle 2}+S_{\triangle 4}+S_{\triangle 6}+S_{\triangle 8}+S_{\triangle 10}+S_{\triangle 12}$$

故

$$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABF}+S_{\triangle BCD}+S_{\triangle CAE}$$

4.1.4 运动变化思想

任何一个系统都不是静止不变的,各要素之间的稳定联系是动态的,或者说系统的稳定是相对的,是动态的稳定.系统依靠动态保存自身、发展自身、保持与环境的适应.所以,看待一个系统,应该运用运动变化的眼光去看.

(1)通过运动变化,加深对事物性质的认识

通常所说的某个事物的性质,其实质可以看成是在某种约束下的运动群的不变量.例如,在研究圆的这一章的教材时,开始就从点动成线这个角度给出圆的定义,圆是点运动得到的,直线与圆、圆与圆的位置关系,也是它们相对运动的结果.教科书充分利用圆与运动联系密切的特点,利用平移、对称、旋转等变换手段,在运动中考察圆的性质.学习时,可以充分利用教材提供的素材,通过观察、操演,使学习者眼中的图形动起来,变活.例如,学圆周角、圆心角、弦切角这些与圆有关的角的概念时,首先让我们看到它们是角与圆的相对位置关系不同产生的;其次,当圆心角的顶点移动,变到顶点在圆上时,得圆周角,再使角绕顶点旋转,转到一边与圆相切时得到弦切角.由于它们之间有这样的关系,所以它们有类似的性质——角的度量与所对(或夹)的弧的度量关系(运动不变量),也可以由此找到证明这些性质的方法.

又例如,在相交弦定理、切割线定理、割线定理的学习中,可以演示过一点的两条直线与圆相交的情形,可以得到不论交角怎样变化,点对于圆的幂不变(不变量).这种变化中的不变量反映了图形的性质,是几何研究的重要内容.

再例如,在学习棱柱的时候,我们可先考虑如下的定义:"一个多边形沿着某一确定的方向(与多边形不共面)平移,它的初始位置、终止位置以及它的周界线在平移中得到的面所围

成的几何体叫棱柱."定义就是一种约束,在这一约束下,可以做各种不同的运动.然后改变多边形的边数,可以得到三棱柱、四棱柱、五棱柱等;改变运动的方向,可以得到直棱柱及各种斜棱柱;改变运动的距离,可以得到不同的侧棱长,在运动中不变的东西就是棱柱的性质.通过这样的多种运动,学习者对棱柱的性质认识的更加深刻.

数学运动的过程往往也是运动变化的过程.将平面问题推广到空间,常常可以通过运动来实现.如将一个角沿着垂直于角在平面的方向运动,角的顶点的运动轨迹是一条直线.这样,对于角的一些性质也能推广到二面角中.如角平分线上任意一点到角的两边距离相等,相应于二面角的平分面上任意一点到二面角的两个面等距离,等等.

当研究的事物运动时,一旦突破约束,就会发生质的变化.如果有意识地让它突破某一约束而运动,则可研究此事物与彼事物之间的关联,研究它们的共同特点与不同性质.如学习圆柱时,若改变前面直棱柱的一个约束条件:将多边形换成圆,其他约束条件下不变,那么所得到的几何体就不是棱柱而是圆柱了.它的有些性质改变了(如侧面变成了曲面),有些性质却没有改变(平行于底面的截面与底面全等).如将多边形换成一般的平面封闭图形,就可以得到广义的柱体.通过这样有意识的运动变化,学习者对于一般柱体的性质就认识得更深刻了.

当运动突破约束发生质变之前,总有一个量变的过程.研究这个从量变到质变的过程,往往是研究两个不同事物的好时机.如实系数二次方程 $ax^2+bc+c=0(a\neq0)$,当 $a=0$ 时,方程发生了突变,成了一次方程($b\neq0$),有一个实根,当 a 在逐渐趋向于 0 的过程中,原二次方程的两个根也在逐渐变化(为确定起见,不妨设 $a>0$, $b>0$),一个根 $x_1=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\to-\infty$;另一个根 $x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{2c}{-b-\sqrt{b^2-4ac}}\to-\frac{c}{b}$.

一个根消失于无穷远处,而另一个根变成了一次方程 $bx+c=0$ 的根.

例 1　A, B 分别是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的左、右顶点,F 是右焦点,P 是椭圆上与 A, B 不同的一点,直线 AB, BP 分别与椭圆的右准线相交于 M, N,则 $\angle MFN$ 等于(　　).

(A)60°　　(B)75°　　(C)90°　　(D)120°

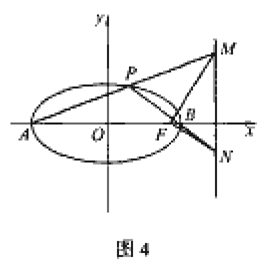


图 4

分析　解本题的一般想法是,先设 P 点坐标(x_0,y_0),然后分别表示出直线 AP, BP 的方程,与右准线 $x=\frac{a^2}{c}$ 联立,求出 M, N 的坐标(含 x_0, y_0),从而求出 FM, FN 的斜率,再利用(x_0,y_0)适合椭圆方程,求出$\angle MFN$ 的大小,如图 4 所示.

由于 P 点是椭圆上不同于 A, B 的任点,而且答案提供了一个重要的信息:$\angle MFN$ 的大小不因 P 点的位置变化而改变,因此可取 P 点为特殊点(如短轴端点),还可以取特殊椭圆 $\frac{x^2}{4}+y^2=1$ 等来计算.

进一步,既然 P 点是椭圆上除 A, B 外的任一点,当 P 趋近于 B 的过程中,$\angle MFN$ 的大小应不会改变.现考虑这一过程:$P\to B$ 时,M 点趋近于 x 轴,N 点向下运动直至无穷远处,可见,$\angle MFN=90°$,应选 C.

换一个角度考虑,让椭圆的两个焦点逐渐靠近,它们一旦重合时,椭圆就突变成圆,椭圆

的右准线到右方无穷远处，这时 FM 就与 AP 平行，FN 与 BP 平行，所以$\angle MFN=\angle APB=90°$，如图 5 所示.

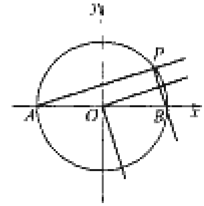


图 5

例 2 已知 $a>0,a\neq 1$，试求使方程 $\log_a(x-ak)=\log_a(x^2-a^2)$ 有解时 k 的取值范围.

分析 本题的要求是对所给方程中的参数 k 进行讨论，因此可构造出函数的图象，在运动中加以研究，这样，会使思路更加简捷清晰.

解 根据对数函数的性质，有$\begin{cases}x-ak=-\sqrt{x^2-a^2}>0\\ x^2-a^2>0\end{cases}$，设 $y_1=x-ak$，$y_2=\sqrt{x^2-a^2}$，如图 6，y_1 是斜率为 1，在 x 轴上截距为 ak 的平行直线族，y_2 是渐近线为 $y=\pm x$ 的等轴双曲线在 x 轴上方的部分.依题意，要使 y_1 与 y_2 的图象有交点，须 $ak<-a$ 或 $0<ak<a\Rightarrow k<-1$ 或 $0<k<1$，所以当 $k\in(-\infty,-1)\cup(0,1)$时，方程有解.

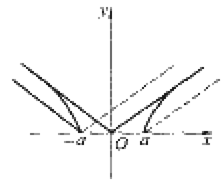


图 6

(2)养成在运动变化中探索问题的习惯

学习数学，重要的在于探索，运动往往是探索的手段.因此，在探索问题时，要有意识地运用运动变化思想，逐渐养成在运动中探索问题的习惯.

例 3 已知直角△ABC 中，$\angle B=90°$，D 是 BC 中点，$\angle DAC=\alpha$.求证：$\sin\alpha\leqslant=\dfrac{1}{3}$.

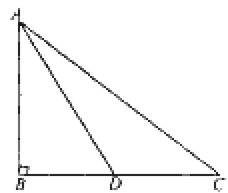


图 7

分析 如图 7，由于 α 必为锐角，因此，为证 $\sin\alpha\leqslant\dfrac{1}{3}$，只需探求 α 的最大值.为此，可以设计如下几种运动方式：

①固定 BC 边，让 A 点在过 B 且垂直于 BC 的直线 l 上运动，问题变为在 l 上找一点 A，使它所对定线段 DC 的张角最大，进一步考虑，对线段 DC 张定角的动点轨迹是以 DC 为弦的弓形弧.可见，当 α 最大时，A 点应是过 D，C 且与 l 相切的圆与 l 的切点.由圆幂定理，$AB^2=BD\cdot BC$ 从而求得 $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$.

②固定 AB 边.设 $AB=1$，$BD=DC=x$，则 $\tan\alpha=\tan(\angle CAB-\angle DAB)=\dfrac{2x-x}{1+2x^2}$，于是问题变为求上述函数的最大值.

③固定 AC 边.设 AC 中点为 O，因为 $OD\perp BC$，所以 D 点在以 OC 为直径的圆周上.显然，当 AD 与此圆相切时，α 最大(设 OC 中点为 E，当 α 最大时，$ED\perp AD$，$\sin\alpha=\dfrac{DE}{AE}=\dfrac{1}{3}$).

教学实践也告诉我们，在利用运动变化思想处理问题时，常常要考虑以下几点：

(i)在运动变化中，究竟哪些量改变了，怎样改变？哪些量没有改变？

(ii)当两个量之间存在一个对应关系时，经常要研究当一个量变化时另一个量的对应变化.

(iii)有时在一个问题中，常先固定一个(或 n 个)，让另一个(或 n 个)运动变化，找到规律再推广.

(iv)有些特殊情况是由一般情况通过运动变化得到的极端情况，有一个从量变到质变

的过程,在这一过程中有些性质没有改变.

(3)关注运动变化中的不变量与不变性

含有某种变化过程的数学问题,变化过程中的"不变性"或"不变量"对问题的解决往往起着举足轻重的作用.[4]

在一种变化过程中,某个数量为不变量(性).如角、距离、面积、体积、时间、速度和问题的答案等.

例 8 等差数列$\{a_n\}$的前 m 项和为 30,前 $2m$ 项和为 100,则它前 $3m$ 项和为( ).

(A)130 (B)170 (C)210 (D)260

(1996 全国高考理科数学第 12 题)

解 选择支启示,对任意变化的自然数 m,该数列前 $3m$ 项和是与 m 无关的不变量.取 $m=1$,则 $s_1=a_1=30$, $s_2=a_1+a_2=100$,则 $a_2=70$, $a_3=2a_2-a_1=110$,从而 $s_3=a_1+a_2+a_3=210$.故选 C.

例 9 F_1, F_2 是椭圆的两个焦点,Q 是椭圆上的动点,从一焦点向$\triangle F_1QF_2$ 的顶点 Q 的外角平分线引垂线,垂足为 P,则点 P 的轨迹是( ).

(A)圆 (B)椭圆 (C)抛物线 (D)双曲线

解 题中未直接给出动点 P 的几何条件,故应寻找与点 P 有关的不变量(性).如图 8,设直线 F_1P 和 F_2Q 交于 M,则 P 为线段 F_1M 中点,则

$$|OP|=\frac{1}{2}|F_2M|=\frac{1}{2}(|QM|+|QF_2|)=\frac{1}{2}(|QF_1|+|QF_2|)$$

为定长,由此不变量知 P 点轨迹是圆.故选 B.

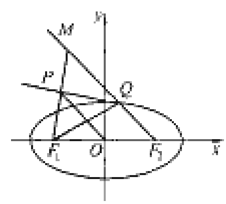


图 8

在一种变化过程中,某些数量的关系为不变量(性),如隐含的恒等式等.

例 10 设实系数二次函数 $f(x)=x^2+ax+b$,求$|f(1)|$, $|f(2)|$, $|f(3)|$中最大数的最小值.

解 设$|f(1)|$, $|f(2)|$, $|f(3)|$中的最大数为 M,即$|f(1)|\leqslant M$, $|f(2)|\leqslant M$, $|f(3)|\leqslant M$.

因 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$的关系隐含着一个不变量 $f(1)-2f(2)+f(3)=2$,所以

$$2=|f(1)-2f(2)+f(3)|\leqslant|f(1)|+|f(2)|+|f(2)|+|f(3)|\leqslant 4M$$

从而 $M\geqslant\frac{1}{2}$,等号当$|f(1)|=|f(2)|=|f(3)|$,且 $f(1)$、$-f(2)$, $f(3)$同号,即 $f(1)=-f(2)=f(3)$, $1+a+b=-4-2a-b=9+3a+b$, $a=-4$, $b=7/2$ 时成立,故 M 最小值为 $1/2$.

许多运动变化的图形中往往隐含着某种位置的不变性(量).如动曲线恒过定点,动点恒在定直线上,或结构不变性等.

例 11 试求直线 $kx+y+k-1=0(k\neq0)$与曲线$\frac{x^2}{k^2}+y^2=1$ 的交点个数为( ).

(A)0 (B)1 (C)2 (D)不确定

解 通过解方程组讨论交点个数较繁.注意到不论 k 怎样变化,动直线 $kx+y+k-1=$

0恒过定点$(-1,1)$，且$\frac{(-1)^2}{k^2}+1^2=\frac{1+k^2}{k^2}>1$，则点$(-1,1)$在椭圆$\frac{x^2}{k^2}+y^2=1$外部，从而直线与椭圆交点个数不确定. 故选 D.

例 12 已知抛物线 $y^2=2px$ 及定点 $A(a,b)$，$B(-a,0)(ab\neq 0, b^2\neq 2pa)$. M 是抛物线上的点，设直线 AM，BM 与抛物线的另一交点分别为 M_1，M_2，求证：当 M 点在抛物线上变动时（只要 M_1，M_2 存在且不重合），直线 M_1M_2 恒过一定点，并求出这个定点的坐标.

解 设 $M(\frac{y_0^2}{2p},y_0)$、$M_1(\frac{y_1^2}{2p},y_1)$、$M_2(\frac{y_2^2}{2p},y_2)$. 由 M_1，M，A 共线得

$$\frac{y_1-y_0}{(y_1^2/2p)-(y_0^2/2p)}=\frac{y_0-b}{(y_0^2/2p)-a}$$

化简为
$$y_1y_0=b(y_1+y_0)-2pa \quad ①$$

如图 9，因 M，M_2，B 共线和 M_1，M，A 共线的本质属性一样（前两点在抛物线上，第三点在抛物线外），则由它们共线所得式子的形式结构具有不变性. 故 M，M_2，B 共性，由①得

$$y_0y_2=0\cdot(y_0+y_2)-2p(-a)$$

$$y_0y_2=2pa \quad ②$$

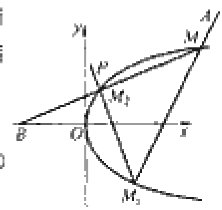


图 9

设 $P(x,y)$ 是直线 M_1M_2 上任一点，即 M_1，M_2，P 共线. 由①得

$$y_1y_2=y(y_1+y_2)-2px \quad ③$$

由①、②、③消去 y_1，y_2 即得

$$2p(y_0^2-by_0)x+b(2pa-y_0^2)y+2pa(by_0-2pa)=0$$

这是点 P 应满足的以 y_0 为参数的直线系方程，另方面它又可写成

$$y_0^2(2px-by)+y_0\cdot 2pb(a-x)+2pa(by-2pa)=0$$

为观察是否有不依赖于 y_0 的定点恒满足直线系方程，令上式各项系数为 0.

$$\begin{cases}2px-by=0\\a-x=0\\by-2pa=0\end{cases}\quad \text{解得}\quad \begin{cases}x=a\\y=\frac{2pa}{b}\end{cases}$$

故直线 M_1M_2 恒过定点$(a,2pa/b)$.

4.1.5 最优化思想

最优化思想是把整个系统分成不同的等级和层次，在系统运动中协调整体与局部的关系，使部分的功能和目标服从于系统总体的最佳目标，从而使系统达到最优. 这为人们寻求处理多因素复杂问题的方案，提供了理论根据和方法.

利用美的启示，来认识美的结构、发掘美的因素、追求美的形式、发挥美的潜意识的作用而处理问题是最优化思想的重要内容.

数学美是一种科学美，体现在具有数学倾向的美的因素、美的形式、美的内容、美的方法等各个方面. 美的因素丰富多彩，美的内容含义深刻：统一、简单、对称、相似、和谐、奇异，且简单、对称、相似均为和谐的特殊表现，和谐与统一是寓简单、对称、相似于奇异之中.

例 1 三角形的三内角平分线长的连乘积小于三条边长的连乘积，试证明之.

分析 设三角形三条边长分别为 a，b，c，所对的角的角平分线长对应为 t_a，t_b，t_c. 题目

是要证明 $t_at_bt_c < abc$. 无论对 a,b,c 来说，还是对 t_a,t_b,t_c 来说，其地位都是对称的. 因而在运用最优化思想处理这个问题时，可以设想在证明推导时出现的一些中间过程也可能是对称的. 但要证 $t_at_bt_c < abc$，一般不可能有 $t_a < a, t_b < b, t_c < c$ 同时成立，故可试探是否有 $t_a^2 < bc, t_b^2 < ac, t_c^2 < ab$ 之类对称的不等式，又 ab, ac, bc 可以看作面积式，故可从面积出发研究.

由
$$\frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}t_a\cdot c\cdot\sin\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}t_a\cdot b\cdot\sin\frac{A}{2}$$

有
$$bc\cos\frac{A}{2} = \frac{1}{2}t_a(b+c)$$

从而
$$t_a = \frac{2bc}{b+c}\cdot\cos\frac{A}{2} < \frac{2bc}{b+c} \leqslant \frac{2bc}{2\sqrt{bc}} = \sqrt{bc}$$

同理
$$t_b < \sqrt{ac},\quad t_c < \sqrt{ab}$$

故
$$t_a\cdot t_b\cdot t_c < \sqrt{bc}\cdot\sqrt{ac}\cdot\sqrt{ab} = abc$$

要组成一个功能最优的系统，不仅要看单个的要素性能是否优良，更要注意所选择的要素的配合是否协调，如果配合不当，各要素之间的功能还会相互抵消. 评价一个要素性能是否优良，不能孤立地去看，要把要素置于系统之中去考察. 孤立地看来质量较好的要素，放在一个特定的系统之中，可能与其他要素不相"匹配"，影响整体功能的发挥，那么这个要素相对于这个系统而言，就不能算作优良的. 宁愿把这样的要素换掉，牺牲局部，优化整体. 在研究一个系统各要素之间的关系时，不能看成一因一果的因果链，应该多向地看成互为因果的因果网络，这样才便于从优化角度组织好系统，使系统发挥最优的功能.

例如，对于教材中的引言，有经验的教师都认为这是编者处理教学内容的最优化编排的一个方面，而无经验的教师则认为引言可有可无，认为这些内容学生不可能在学习的开始阶段就完全弄懂，后面的教学还要进一步讲解的，因此，主张把引言课的时间留给后面各章教学用. 实际上，引言课中介绍的这些内容，不仅是后面学习的基础，更重要的是使学生在学习这门课之前，对它的概貌有些认识，这对于学生的学习是非常有用的，可以使学生在良好的心态下开始学习. 许多学校的经验表明，在引言课中虽然花去了一些教学时间，但一开始就使这门课吸引了学生，学生学习的主动性、积极性提高，结果使后面的学习更顺利，进度加快，引言花点时间是值得的. 当然，要上好引言课最重要的是让学生积极参与，要学生动手、动脑，自己提问题，讨论问题. 只有参与，才能在活动中对引言所介绍的知识有所体会，产生兴趣.

4.2　系统与统计思想(二)

4.2.1　统计思想

统计是认识系统的重要方式之一，也是认识社会与自然界的重要手段.

在生产、生活的一个高度"信息化"的现代社会中，"统计"占有重要的地位. 现在，不只每一个生产部门需要统计，就是每一个学科也都有自己的统计学. 如搞医学的有医学统计，搞教育的有教育方面的统计，搞商业的有商业统计，等等. 事实上，不仅一个从事研究工作的需要统计，就是一个普通劳动者也需要具备统计知识. 例如，在工厂普遍实行全面质量管理的

今天，工人就要运用质量控制图等统计工具，在生产过程中控制产品的质量.当然，统计的广泛应用，与产品质量的激烈竞争有关，也与迅速处理数据计算的电子计算、电子计算机的出现及其计算功能的日益提高有着密切的关系.

在中学数学教材中，专辟了几章介绍统计初步知识.要求学生了解总体、个体、样本、样本容量等概念，能够指出研究对象的总体、个体和样本；理解众数、中位数的意义，掌握它们的求法；理解平均数的意义，了解总体平均数和样本平均数的意义，掌握平均数的计算公式；理解加权平均数的概念，掌握它的计算公式；会用样本平均数估计总体平均数；了解样本方差、总体方差、样本标准差的意义，会计算(可使用计算器)样本方差和样本标准差，会根据同类问题的两组样本数据方差或样本标准差比较这两组样本数据的波动情况；理解频数、频率的概念，了解频率分布的意义和作用，掌握整理数据的步骤和方法，会对数据进行合理的分组，引出样本频率分布表，画出频率分布直方图；会用科学计算器计算样本平均数与标准差；通过实习作业、训练，能初步掌握搜集、整理和分析数据的方法，培养解决实际问题的能力；学会运用样本估计总体的数理统计的基本思想，培养用数学的意识、踏实细致的作风和实事求是的科学态度.

由上可知，"统计初步"的学习可以为进一步学习概率统计打下一个初步基础.因为，学生今后进一步学习数理统计，是在概率的基础上进行的.这时总体与随机变量相对应，总体平均数、总体方差分别与随机变量的数学期望，随机变量的方差相对应，总体的分布规律与随机变量的概率密度函数相对应等等.

所谓统计思想，就是要掌握一些数理处理的方法，能用统计的初步知识解决一些实际问题.统计思想是人们认识社会和自然界的优秀的科学思想之一，具有很大的理论价值、应用价值和教育价值.选择样本估计总体，既是人们认识有限总体或无限总体的有效的科学思想之一，也是统计思想的精髓，更是"统计初步"内容的核心.

中学数学中所蕴含的统计思想主要包括有随机思想、统计调查思想、假设检验思想、量化思想等.

4.2.2 随机思想

我们知道，人类社会和自然界存在三类现象：确定性现象、模糊现象、随机现象.

什么是随机现象呢？我们常听人们谈论过偶然性，偶然性就是随机性中的一种情形.详细一点说，在一定的条件下，可能出现的结果不止一个，究竟出现哪一个事先无法知道，但在大量重复的条件下，总能呈现出某种规律性——统计规律.例如，目前我国男士流行的服装，质料各异，款式多样，抽样几家大型衣店，作一番认真分析，从诸多的服装中就不难发现，男士服装的基本款式，以西装、夹克和中山装三种款式较多，其他一些式样，不是这三种的变化型，就是它们的组合型.

随机现象普遍存在，要认识它的规律，就要以统计为工具，应用随机思想，通过大量重复观测，得出数据，并加以科学整理，经过统计分析，则会呈现出它的规律性来，来刻画随机现象.具体地说，就是从总体中随机抽取一些个体作为样本，用样本的数字特征去估计总体的相应数字特征(即用样本的平均数、方差、标准差去估计总体的平均数、方差和标准差)，用样本的频率分布去估计总体的频率分布.

例 2 为了考察教育程序、教育结构同农民人均收入的关系，国家统计局于 1989 年进行

统计分析.从全国农户(这是有限量很大的总体)随机抽取67 000户(作为样本)进行调查,由该样本测出不同教育程度的人均收入的统计数据如下表(单位:元):

文盲户	小学户	初中户	高中户	中等职教户
422.84	524.96	616.30	639.84	740.90

样本为我们认识总体提供了信息:①农民收入随着受教育程度提高而增加;②受职业教育的农户收入高于受同等普通高中教育农户的收入.这种信息产生了很好的社会效益:促进各级政府下决心办好教育,实施九年义务教育就是一项重大举措;大力发展职业教育,由于职业教育的兴起,教育广大家长和学生,不再去挤过高考独木桥.因为职业技术是帮助农村致富,优化从业人员素质的有效途径.从统计看此例,充分运用了随机思想.

4.2.3 统计调查思想

对统计来说,调查是先导,统计数据都源于调查,通称统计调查.统计调查是整个统计工作的最基础的环节,也是统计资料搜集的基本方式.统计资料的质量应要求达到:准确性、及时性和完整性.具体采取哪种统计调查,应视所解决问题的性质而定.如果对有限总体所有个体都进行调查,就需全面调查.如全国人口普查就属全面调查.全面调查在万不得已时进行,一般常采用非全面调查:即对调查对象总体(尤其是无限总体)的部分个体进行调查.非全面调查常有如下几种:

(1)抽样调查.从调查对象总体中抽取部分个体作为样本进行调查和实验研究等,考察所抽样本的数字特征,去估计.推算总体的相应数字特征,然后对总体作出可靠性结论,如前面提到的农民人均收入同教育程度的关系,就属于随机抽样调查,简称抽样调查.这种调查的基本思想,就是遵循随机原则,即从总体中抽取部分个体作样本,每个个体被抽的机会均等.还须注意的是,抽样调查会产生误差,但可以事先计算并加以控制.

(2)重点调查.从总体中选择部分重点个体进行调查,通过调查重点个体也可反映被调查总体的基本情况.

(3)典型调查.根据调查目的和要求,在对被调查总体作全面分析的基础上,有意识地选择有代表性的个体进行深入的调查.

4.2.4 假设检验思想

众所周知,在当今的信息社会里,在市场经济的条件下,产品的质量就是它的生命线.为了确保产品的质量,我们固然可以对产品进行质量检验.但是,无论全数检验,还是抽样检验,都只能"事后剔除"不符合质量标准的产品.然而,对那些被检验出的次品的处理,只能是或者返修,或者降价出售,或者报废,这毕竟是资源的一种浪费.那么,怎样有效地避免这种浪费呢?

20世纪30年代,贝尔电话实验室的谢瓦特博士在其研究工作中,首次提出了用在生产过程中对质量的"事前控制"来代替传统的"事后检验"的思想——假设检验思想.

在生产过程中,即使利用同一台机器设备,采用同一生产工艺,严格地说也不可能生产出两个完全相同的产品.这就像世界上没有两个人是一模一样的一样.通过分析,发现造成产品质量差异的内在原因大致可分成两类:一类是某些确定性因素所致;另一类是各种偶然

因素所致. 一般说来,对于确定性因素一旦确准,就可以加以改变和控制,但对一些不确定性的所谓随机因素是很难改变和控制的.

由中心极限定理,在大量随机因素综合作用下,产品的质量指标 X 是近似服从以 $a=E(X)$为均值,以 $\sigma=\sqrt{D(X)}$为标准差的正态分布,即 $X\backsim N(a,\sigma^2)$,由正态分布的性质知,当生产处于正常状态下,产品的质量指标 X 满足

$$P\{a-3\sigma\leqslant X\leqslant a+3\sigma\}=99.73\%$$

即在正常生产的状态下,产品的某一质量指标 X 落入区间$[a-3\sigma,a+3\sigma]$内几乎是必然的,而 X 落入区间$[a-3\sigma,a+3\sigma]$之外的几乎不会发生. 如果这不会发生的事件竟然发生了,那么,就可以断定生产线必处于异常状态,即生产线必有客观故障,应立即采取相应的措施排除故障,使之恢复正常生产状态,以避免造成成堆的次品. 这就是假设检验思想的基本精神.

运用假设检验思想,来达到控制产品质量的各种不同目的,可选择各种类型的控制图,以适应社会激烈竞争的需要.

控制产品质量是这样,进行社会管理也是这样,把握自己的人生更是这样. 假设检验思想的灵活运用,是运用统计思想解决实际问题的典范.

4.2.5 量化思想

现代科技表明,只有当它成功地运用数学时才算达到真正完善的地步. 一说统计,必然是数量上的统计. 我们的研究分为定性和定量,它们是相辅相成的两个方面. 定量是定性的深化和精确化,统计的结论要用数据说明,规律要从数据中发现,要运用数理统计理论作定量分析、推断,才能有把握承认结论的可靠性.

统计初步中把平均数、方差、标准差和频率作为随机现象量化重点介绍,这是统计量化的基础. 因而在教学中应指明:各种特征数字说明什么? 怎样运用? 这是剖析量化思想的极好时机. 学习者应充分理解它,而不是孤立地停留在单纯的数字计算上,否则将有损于量化思想的渗透,甚至造成学生学了统计知识,仍不能正确解释统计中的一些数据:如某单位举办一个大奖赛,当一位选手参赛后,评委亮分,然后去掉一个最高分和最低分,得这位选手的得分结果. 学了平均数的一些学生,仍不理解为什么要去掉一个最高分和最低分.

最后,我们还须指出的是,定量分析是量化思想的核心. 定量分析的准确运用是统计思想的重要科学特征.

4.3 化归与辩证思想(一)

4.3.1 化归思想

在对问题作细致观察的基础上,展开丰富的联想,以求唤起对有关旧知识的回忆,开启思维的大门,顺利地借助旧知识、旧经验来处理面临的新问题,这种思想我们称之为"化归思想".

中学代数、几何都是从研究简单数式、简单图形开始,复杂数式、复杂图形的研究都是通过转化、归结为简单数式、简单图形而获得解决的. 例如,三角形是多边形中最简单的一种,

研究了三角形以后，再研究多边形，而多边形的问题可以通过添加辅助线转化为三角形的问题，由于三角形的问题是已经解决的，从而多边形的问题得以解决，这就是一种典型的化归思想的运用．

在具体解题中也常这样处理．例如，已知$\angle AOB$求与$\angle AOB$的两边都相切的圆的圆心的轨迹．在中学几何中介绍过几种简单的点的轨迹，如与定点的距离等于定长的点的轨迹；到角的两边距离相等的点的轨迹；与两个定点距离相等的点的轨迹等等．而与角的两边都相切的圆的圆心轨迹是个新问题．通过分析可以发现，与角的两边相切的圆，圆心到角的两边距离一定相等，因此这个新的点的轨迹就化归为已知的点的轨迹问题了．

化归思想的实质是通过事物内部的联系和矛盾运动，在转化中实现问题的规范化（熟悉或易于处理），即将待处理问题变为（转化）为规范问题，从而使原问题得到解决．简言之，所谓化归就是问题的规范化、模式化．又例如，学生学了一元二次方程，已知掌握了求根公式和韦达定理等．因此，一元二次方程就是一个数学模式，而将双二次方程$ax^4+bx^2+c=0(a\neq 0)$通过换元化归为一元二次方程的过程，就是将该问题模式化．化归思想包含三个要素：化归的对象、化归的目标和化归的方式方法．在此例中，双二次方程是化归的对象，一元二次方程是化归的目标，换元是实施化归的方法．实施化归的关键是实现问题的规范化、模式化，实施化归的方式方法也各种各样，如设想化归、映射化归、构造化归、整体化归、数形互化等等．在这里，我们从思维的角度，重点介绍化归思想的四种形式：即纵向化归、横向化归、同向化归、逆向化归．

4.3.2　纵向化归

纵向化归是把面临的新问题，通过减元（消元）、降格（或降维、降价）等加工手段化归为已经解决了的问题，或是化归为熟悉的、简单的、具体的问题来处理．最后通过对新问题的解决而将原问题圆满解决．

例 1　求下述方程组的所有实数解

$$\begin{cases}x+y+z=3 & ①\\ x^2+y^2+z^2=3 & ②\\ x^3+y^3+z^3=3 & ③\end{cases}$$

分析　由题设，满足③的x,y,z必须满足①、②，因而解此方程组首先化归为解由①，②组成的方程组，此时又可化归为解二元方程组，不妨设x,y为未知元，于是得解法：

由①，②可得

$$x+y=3-z \quad ④$$

$$x^2+y^2=3-z^2 \quad ⑤$$

由④，⑤有

$$xy=\frac{1}{2}[(x+y)^2-(x^2+y^2)]=z^2-3z+3 \quad ⑥$$

由④，⑥知，x,y是一元二次方程

$$t^2-(3-z)t+z^2-3z+3=0$$

的两根，而$x,y\in\mathbf{R}$，当且仅当

$$\Delta=(3-z)^2-4(z^2-3z+3)\geqslant 0$$

则$(z-1)^2\leqslant 0$，即$z=1$．故$x=y=1$．

可见①,②只有实数解 $x=y=z=1$,它也适合③,故原方程组的唯一实数解为 $x=y=z=1$.

例 2 设 $f(x)=\lg(x+\sqrt{1+x^2})+x^5+ax^3+x^2+bx-8$,若 $f(2)=4.627$,求 $f(-2)$的值.

解 $f(x)$为奇数$\Leftrightarrow f(-x)=-f(x)$;$f(x)$为偶函数$\Leftrightarrow f(-x)=f(x)$. 注意到题中$f(x)$本身不具有奇偶性,因而不能直接利用上面的奇偶函数的性质. 但是通过仔细观察,$f(x)$中含有奇函数的"成分",故可化归到奇函数处理.

设 $F(x)=f(x)-x^2+8=\lg(x+\sqrt{1+x^2})+x^5+ax^3+bx$,则易知$F(x)$为奇函数,故 $F(-2)=-F(2)$,即 $f(-2)-(-2)^2+8=-[f(2)-2^2+8]$,由此解得:$f(-2)=-f(2)-8=-12.627$.

例 3 已知 $x_i\in\mathbf{R}(i=1,2,\cdots,n,n\geqslant 2)$,满足$\sum\limits_{i=1}^{n}|x_i|=1$,$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=0$.

求证:$\left|\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{x_i}{i}\right|\leqslant\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2n}$.

分析 根据问题右边的特征,自然会联想到把不等式左边绝对值中的加项拆开,使问题获证.

证明 根据题意令 $a_i=|x_i|+x_i$,$b_i=|x_i|-x_i$. 则 $a_i\geqslant 0$,$b_i\geqslant 0$ 且

$$\sum_{i=1}^{n}a_i=\sum_{i=1}^{n}b_i=1,\quad a_i-b_i=2x_i\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

所以

$$\frac{1}{n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{n}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{i}\leqslant\sum_{i=1}^{n}a_i=1$$

同理

$$\frac{1}{n}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{i}\leqslant 1$$

所以

$$2\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{i}\right|=\left|\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i}{i}-\frac{b_i}{i}\right)\right|=\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{i}-\sum_{i=1}^{n}\frac{b_i}{i}\right|\leqslant 1-\frac{1}{n}$$

故

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{i}\right|\leqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{2n}$$

4.3.3 横向化归

横向化归就是通过对命题的有关量进行转换,各学科知识间的转换,等价变换命题,运用同构变换等手段将生疏、复杂、困难的问题转化为熟悉、简单、容易的问题来处理.

例 1 解关于实数 x 的方程

$$x^4-6x^3-2(a-3)x^2+2(3a+4)x+2a+a^2=0$$

其中 $a\in\mathbf{R}$.

分析 如果直接解关于 x 的四次方程,这是较困难的,但转换 x 与 a 的地位形式,把原方程看作关于 a 的二次方程,则可得如下简解.

解 原方程可变为关于 a 的二次方程

$$a^2-2(x^2-3x-1)a+(x^4-6x^3+6x^2+8x)=0$$

方程左边利用十字相乘法分解得

$$(a-x^2+2x+2)(a-x^2+4x)=0$$

从而化归为两个关于 x 的二次方程

$$x^2-2x-2-a=0,\quad x^2-4x-a=0$$

解上述两个方程得，当 $a>-3$ 时，原方程有四个实根

$$x_{1,2}=2\pm\sqrt{a+4},\quad x_{3,4}=1\pm\sqrt{3+a}$$

当 $-4\leqslant a\leqslant -3$ 时，原方程有两个实根

$$x_{5,6}=2\pm\sqrt{a+4}$$

当 $a<-4$ 时，原方程无实根.

例 2 在 Rt$\triangle ABC$，$\angle ACB$ 为直角，$CD\perp AB$ 于 D，$\triangle ADC$ 和$\triangle CDB$ 的内心 O_1 与 O_2 的连线交 CD 于 K. 求证：$\dfrac{1}{BC}+\dfrac{1}{AC}=\dfrac{1}{CK}$.

分析 此题虽可用平面几何知识直接推证，但不如化归为解析几何问题而简单推证：

以 D 为原点，AB 所在直线为 x 轴建立直角坐标系，设 $C(0,1)$，$B(m,0)$，则$A(-\dfrac{1}{m},0)$，$\odot O_2$ 的半径 $r_2=\dfrac{1}{2}(1+m-\sqrt{1+m^2})$，$\odot O_1$ 的半径 $r_1=\dfrac{r_2}{m}$，于是 $O_2(r_2,r_2)$，$O_1(-\dfrac{r_2}{m},\dfrac{r_2}{m})$，$O_1O_2$ 的方程为

$$(1-m)x+(1+m)y=1+m-\sqrt{1+m^2}$$

则
$$K(0,1-\frac{\sqrt{1+m^2}}{1+m})$$

即
$$CK=\frac{\sqrt{1+m^2}}{1+m},\quad BC=\sqrt{1+m^2},\quad AC=\frac{\sqrt{1+m}}{m}$$

故
$$\frac{1}{BC}+\frac{1}{AC}=\frac{1}{CK}$$

4.3.4 同向化归

同向化归就是把面临的新问题进行命题分割或命题分解，化归为某一(或几)个可简捷处理的子问题，通过解决这一(或几)个子问题，从而也就解决了所有子问题；或在推演中，进行同理推导、同解变形化简等等. 这种化归就是在同一层次上"平行"转化.

我们在组合思想运用的介绍中，证明"一条弧所对的圆周角等于它所对的圆心角的一半"这条定理时，就用到了命题分割，把证明分割为 3 种情形，并将这些不同的情形归结为其中的一种情形.

例 1 设 $A=\{x\mid 1<x<3\}$，又设 B 是关于 x 的不等式组$\begin{cases}x^2-2x+a\leqslant 0 & ①\\ x^2-2bx+5\leqslant 0 & ②\end{cases}$的解集，且 $A\subseteq B$. 试确定 a，b 的取值范围.

分析 若记 $f(x)=x^2-2x+a$，B_1 为不等式①的解集；记 $g(x)=x^2-2bx+5$，B_2 为不等式②的解集，则 $B=B_1\cap B_2$，于是 $A\subseteq B=B_1\cap B_2\Leftrightarrow A\subseteq B_1$ 且 $A\subseteq B_2$(这是关键一步，同向化归思想的运用).

结合图形(略),则

$$\begin{cases}f(1)\leqslant 0\\ f(3)\leqslant 0\end{cases} \text{且} \begin{cases}g(1)\leqslant 0\\ g(3)\leqslant 0\end{cases} \Leftrightarrow a\leqslant -3 \text{ 且 } b\geqslant 3$$

在上例中,这样化归,避免了求 $B_1\cap B_2$ 之苦,否则,即需分类讨论.有较大的工作量且极易出错.可谓捷径!经济!

在中学几何教材中,把勾股定理放在相似形中,用相似三角形证明勾股定理,所添的辅助线是直角三角形斜边上的高线.怎样想到添这条辅助线的?编者没有写出,教参也没有说明,学生觉得像"从帽子里跑出一只兔子".如果运用同向化归思想,则有如下新证法:

设在 Rt△ABC 中,$\angle C=90°$,利用相似三角形把要求证的非等积式 $BC^2+AC^2=AB^2$ 可化归为等积式

$$BC^2=AB^2-AC=(AB+AC)\cdot(AB-AC)$$

又可进一步化归为等比式

$$\frac{BC}{AB-AC}=\frac{AB+AC}{BC}$$

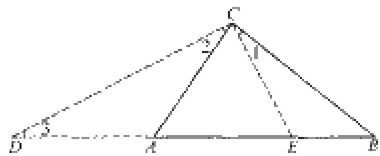


图 10

由等比式去找对应的相似三角形,很自然就要作出 $AB+AC$,$AB-AC$,这是非常容易作到的.如图 10,延长 BA 到 D,使 $AD=AC$;在 AB 上截取 $AE=AC$,联结 DC,CE.

在△CDE 中,因 $DA=AC=AE$,有 $\angle DCE=90°$.又 $\angle ACB=90°$,知 $\angle 1=\angle 2$.

由 $AD=AC$,$\angle 2=\angle 3$,有 $\angle 1=\angle 3$.而 $\angle CBE=\angle CBD$,从而△BDC∽△BCE,则 $\frac{BC}{EB}=\frac{BD}{BC}$,即

$$\frac{BC}{AB-AC}=\frac{AB+AC}{BC}$$

亦即 $$BC^2=(AB+AC)(AB-AC)=AB^2-AC^2$$

故 $$BC^2+AC^2=AB^2$$

以上证明只用了一次相似,比教材中用两次相似要简单.

4.3.5 逆向化归

人们在处理解决问题时,常常按照习惯的思维途径去进行思考,运用习惯的化归方式方法去转化解决问题.但按照这种思考方式或化归方式在很多时候也会出现较繁或较难入手的情形,或出现一些逻辑上的困惑.这时,从辩证思维的观念出发,从问题或其中的某个方面的另一面入手进行思考,例如针对常规处理方法,针对问题条件、结论、求解程序、推理步骤进行逆向化归,采取顺繁则逆,正难则反的适时化归措施,这就是所谓的逆向化归思想.逆向化归的形式,常有升格(升维、升次、增项、增元、扩域等)、倒推、反求、反证、举反例等.

例 1 已知 $x\neq y$,且 $x^2+2x-5=0$,$y^2+2y-5=0$.求 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 的值.

分析 此题若先根据条件分别求出 x,y 的值,再代入 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$ 求值,计算量还是比较大的.事实上,可根据条件的结构,增设方程 $t^2+2t-5=0$,则 x,y 是该方程的两根,于是由韦

达定理，有

$$x+y=-2,\quad xy=-5$$

由此，得

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{x+y}{xy}=\frac{-2}{-5}=\frac{2}{5}$$

例2 如图11，在同一平面上的三个圆，它们的半径各不相同，且两两不相交，每两个圆的外公切线相交于一点，可得三个这样的点．求证：这三点共线．

分析 在通常情况下，可以通过添加辅助线来证明这一命题，或运用几何变换（位似变换）证明，但都比较复杂，如果我们运用升维化归可得如下简捷证法．

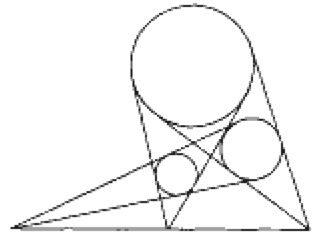


图11

如图11，把这三个圆看作是放在平面 α 上的三个球的正投影，而三个球中每两个球可确定一个圆锥面，每两圆的两条外公切线就成了圆锥面的两条母线的正投影，外公切线的交点就是圆锥面的顶点，由于这个圆锥面平躺在水平面 α 上，故这三个圆锥面的顶点必在平面 α 内．

另取一平面 β，将它搁在这三个球上．同理可知三个圆锥面的顶点必在平面 β 内．

显然，平面 α 与 β 必相交于一直线 l，故三个圆锥面的顶点在直线 l 上，从而命题获证．

4.4 化归与辩证思想（二）

4.4.1 辩证思想

唯物辩证法认为，质量互变规律、对立统一规律和否定之否定规律是支配自然界、社会和人类思维最一般的规律．数学中的辩证思想就是遵循这些规律，对数学对象矛盾双方的相互联系和相互制约关系认识的思维产物．

数学中充满着矛盾、运动和变化，充分体现着唯物辩证法的思想．结合数学内容对学生进行辩证思想教育，是中学数学教学目标的一个重要的方面．九年义务教育和普通高中《数学课程标准》（实验）中很多部分的教学要求都提出了让学生了解已知与未知、特殊与一般、正与负、等与不等常量与变量等辩证关系以及反映在函数概念中的运动观点，了解反映在数与式的运算和求方程解的过程中的矛盾转化的观点……，对学生进行思想教育．因此，在平常的数学教与学中充分利用教材的有关内容，适时地让学习者受到生动而又深刻的辩证唯物主义思想教育，使学习者在学习中反复体验事物的现象和本质、绝对和相对、静止和运动、特殊和一般量变和质变、对立和统一等辩证关系，学会用辩证思想去观察分析事物，研究和解决问题，为他们逐步确定辩证唯物主义世界观奠定基础．这样做不仅可以达到思想教育的目的，而且对数学知识学习和能力培养也有着积极的意义．

在这一节，我们重点介绍辩证思想的几个重要方面：对立统一思想、互变思想、转换思想、一分为二思想等及含义．

4.4.2 对立统一思想

对立统一思想是指人们认识事物辩证发展的一种思维法则．事物的发展总是与某些矛

盾相关联，事物矛盾的法则，即对立统一的法则，它是自然和社会的根本法则，因而也是思维的根本法则．矛盾存在于一切客观事物和主观思维的过程中，矛盾贯串于一切过程的始终，体现矛盾的普遍性和绝对性．矛盾着的事物及其每一个侧面各有其特点，体现矛盾的特殊性和相对性．矛盾着事物依一定的条件有同一性，因此能够共居于一个统一体中，又能够互相转化到相反的方面去，这又是矛盾的特殊性和相对性．然而矛盾的斗争则是不断的，不管在它共属的时候，或者在它们相互转化的时候，都有斗争的存在，尤其是在它们相互转化的时候，斗争的表现更为显著，这又是矛盾的普遍性和绝对性(参见毛泽东《矛盾论》)．这矛盾的四性是对立统一法则的根本特性．

数学中充满了对立统一思想，下面仅以数学概念的发展为例说明之．

数学概念开始于人们对最简单的数与形的认识．整个数学也正是围绕着这两个概念的演化和发展而发展的．在这个发展过程中，逐步建立了函数、曲线、极限、空间、概率等各式各样丰富多彩的数学概念．这里仅以中学数学中常见的数、形、函数三个概念为例，对其发展过程中体现的对立统一思想作些初步剖析．

(1)数

在社会实践中，由于现实世界数量关系的矛盾斗争不断地反映到人们的思维中来，构成了数学的矛盾．这种矛盾的不断出现和不断解决，促使数概念不断发展．

人类在考察狩猎、捕鱼、采集果实的劳动中出现了人与物的数目对应问题，逐渐产生了最初的数概念——自然数；实践中反复出现某种东西从无到有，又从有到无，便产生了零的概念；解决度量中量不尽的问题，产生了分数；探讨无公度线段的比，产生了无理数；研究代数方程解法的一般理论问题，产生了负数与虚数，从而在数概念逐步扩展的基础上建立起复数系统．

数是运算的对象．由于数概念的不断发展，也不断地解决数学运算中出现的矛盾．负数解决了不够减的矛盾，分数解决了不能整除的矛盾，无理数解决了开方开不尽的矛盾，虚数解决了负数不能开偶次方的矛盾．这就使数学运算的种种"禁区"一次又一次地被突破．

数概念发展到复数系统并未完结．复数在各种实践中的有效应用，促使数学家考虑：可否像由"实数对"建立复数那样，由三个实数或四个实数组成的数组来建立多元数(亦称超复数)呢？于是人们研究了各种各样的特殊的多元数，尤其是对哈密尔顿创立的四元数——第一个超复数的系统研究更为详尽．后来又研究了多元数的一般理论，并且逐步发展它们在数学及其它科技领域中的应用．

人们不仅把数的概念从自然数一直扩展到复数、超复数，而且还扩展到许许多多更广义的"数"．这些"数"，都有某种类似于一般数的"运算"．例如，在力学中可以把力用一个向量表示，两个力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 的合力是 $\boldsymbol{F}_3$ 时，可以记作 $\boldsymbol{F}_1+\boldsymbol{F}_2=\boldsymbol{F}_3$，而这种加法也遵守交换律和结合律．于是，数学中出现的许多带有某种"运算"性质的事物，如向量、张量、矩阵以及更抽象的元素，都被视为某种列为广义的"数"，这些"数"都以可"运算"为特征．

数学家还把研究的重点逐渐从"数"本身转移到"数"与"数"之间的"运算"上来．带有某种"运算"的"数"的集合，就称之为代数系统，依据运算规律的不同而有各种不同的代数系统，并且给以不同的名称，如群、环、域等等．

数的概念的演变过程，是一个对立统一的过程．我们可看到，原有的数系与发展后的数系最初总是以对立的形式出现的，但它们又总是要统一为一个整体，没有这种统一就不能算

完成了一个发展过程.

(2)形

在原始社会,人们观察挺直的树木、圆圆的日月等,开始对直的、圆的等形状有了认识,并且有了长短大小等概念.以后经过漫长的岁月,人们才逐渐形成了数学中的直、曲、方、圆等概念.

古代的几何,主要是在平面上研究直线和圆或者由它们的部分所构成的图形,在空间的情形也基本类同.此外,阿基米德等人还研究过螺线和圆锥曲线等.这些内容都属于传统的综合几何学,笛卡尔以崭新的方法建立了解析几何学,是人们对形概念认识的一大飞跃.解析几何研究的主要图形,如椭圆、抛物线、双曲线等,虽然在古代也有人研究过,但那时是仅仅作为切割圆锥时所得到的截线来研究的.解析几何对这些图形的研究是作为变化的量来研究的.这是由常量几何到变量几何的重要过渡.

微积分的建立对形的研究提供了新的工具,使对形的研究从整体形象的特征深入到微小局的性质,从而使我们有可能研究在综合几何、解析几何中无法研究的任意的曲线和曲面.例如悬挂着锁链的形状、弹簧的形状、凸轮的周界,以及特殊立体的表面、油罐及飞机的外壳等,这使人们对形的认识逐步深化.

形概念的发展,还经历了从有限到无限的过程.由于绘画、建筑及军事作图的需要,对图形平直透视的研究,促进了投影几何的产生和发展.在这种几何中除点是通常的点,直线、平面之外还增加了无穷远点、无穷远直线、无穷远平面等"非固有元素"的概念.这样,就不仅使研究对象的性质有无穷远的特征,并且研究对象本身也从有限扩展到了无限.

在初等几何、解析几何、微分几何、射影几何发展起来之后,又产生了一种新的几何分支,即拓扑学,它是以图形在连续变形下不变的整体性质为研究对象,这种性质是比合同变换、相似变换、仿射变换、射影变换下的不变性更为一般的不变性质.拓扑学的建立,使人们对形的认识在由特殊到一般的道路上前进了一大步.

形概念的变化发展,还表现为对空间概念认识的深化.最初人们对形的认识,是借助于空间具体物体形状抽象出来,在二维或三维空间进行研究的.随着代数学的发展和社会实践的需要,形概念又以抽象的代数式子被研究着,研究的范围也逐步扩大,从三维空间扩大到几维空间,乃至无维空间.这又是从特殊向一般的发展,对矛盾特殊性认识的深化.此外,人们对空间概念的认识还从平直空间深化到弯曲空间.欧氏几何反映人们对现实空间的认识是初步的,认为"平面"是平而又平,"直线"是直而直,非欧几何的产生和确立,就打破了这种传统观点.特别在 20 世纪初,它作为建立相对论的有力数学工具而得到重要应用,标志着人们对现实空间的认识又深化了一步,它使我们认识到,欧氏几何并非不分时间、地点、条件,而都与现实世界相符的绝对真理,看到了它的局限性,也认识到多种不同几何体系并存的可能性.

(3)函数

古代天文学家在观测天体运动时,曾制出各种不同时刻天体的位置图.但在那时,他们没有清晰的函数概念,仅仅有考察几何轨迹中所感觉到的一种模糊观念.作为变量间相依关系的函数概念很晚才形成.

17 世纪,笛卡尔将代数方法系统地应用于几何学,打通了引入函数的通道.莱布尼次第一次使用了"函数"这个词,但他只用来描述依赖曲线的几何量.17 世纪末伯努利曾把函数

说成是“按任意方式用变量和常量构成的量”.

18世纪,达朗贝尔把函数看作是“解析式子”,通过这个解析式子可由自由变量的值求出因变量的值.在这里,他是把函数看作是两个变量之间的关系,它可以用一种规律来描述,通常用加法、乘法、三角或对数的运算来确定.但是,在这个时代人们还普遍地把解的式与连续函数、可微函数等概念混同在一起,直到柯西才把这些概念澄清了.

19世纪法国数学家柯西给出了如下定义:

定义1 有两个互相联系的变量,一个变量的数值可以在某一范围内任意变化,这样的变量叫做自变量.另一个变量的数值随着自变量的数值而变化,这个变量称为因变量,并且称因变量为自变量的函数.

19世纪的德国数学家黎曼(Riemann 1826~1866)和狄利克雷(Dirichlet 1805~1859)又分别给出了如下定义:

定义2 在某变化过程中,有两个变量 x 和 y.如果对于 x 在某一范围内的每一个确定的值,按照某个对应关系,y 都有唯一确定的值和它对应,那么就把 y 称为 x 的函数;x 称为自变量.

这两个定义中虽然强调了变量间的对应关系,但都把变量 y 定义为变量 x 的函数,不能揭示函数概念的本质属性——一种特殊的对应关系.如果用表达式 $y=f(x)$ 表示 x,y 之间的依存关系,那么函数是对应法则 f 呢?还是变量 y 或是表达式 $y=f(x)$ 呢?这种“变量对应关系的函数定义”不能给出回答.

19世纪70年代,德国数学家康托的集合论问世,函数被定义为集合之间的对应关系.

定义3 设 A,B 是两个集合,如果按照某种对应法则 f,对于集合 A 中的每个元素 a,在集合 B 中都有唯一的元素 b 与之对应,这样的对应关系叫做从集合 A 到集合 B 的函数.记为 $f:A\to B, a\to b=f(a)$,当 a 对应到 b 时,称 b 是 a 的函数值,记为 $b=f(a)$.称 A 为函数的定义域,集合 $f(A)$ 叫做函数 f 的值域,显然 $f(A)\subseteq B$,B 称为函数的变域.

这里以集合、对应为基本概念给出的函数定义,用抽象集合的元素代替了“变量”,使函数的概念适用于各种研究对象,扩大了应用范围.强调函数是两个集合元素的某种对应法则,突出了函数的本质属性,避免了“变量即函数”的模糊认识.这里符号 $f(x)$ 表示函数 f 在 x 处的函数值是变域集中的一个元素.因此,严格地讲,$y=f(x)$ 不应读为“y 为 x 的函数”或“函数 $f(x)$”,而应读作“x 在 f 作用下的像为 y”.有了映射的概念后,函数的定义又可叙述为:

定义4 从集合 A 到集合 B 的映射 $f:A\to B$ 称为从集合 A 到集合 B 的函数,简称为函数 f.

这个定义仍然包含了意义并不明确的“对应”这一概念.

在现代数学中,为了将上述定义中没有定义的概念“对应法则”精确化、数学化,20世纪60年代,在集合、关系概念的基础上给出了函数的纯集合论定义.

定义5 从集合 A 到集合 B 的函数 f 是满足以下条件的从 A 到 B 的一个关系:

(i) $D(f)=A$;

(ii) 如果 $\langle x,y\rangle\in f$,并且 $\langle x,y\rangle\in f$,那么 $y=z$.函数 f 记作 $f:A\to B$.

定义5表明一个从 A 到 B 的函数是从 A 到 B 的一个特殊关系.在这个关系中不存在两个不同的序偶有同一个第一元素.如果给定了函数 $f:A\to B$,并且 $\langle x,y\rangle\in f$,那么 y 称为 x

的像,并记作 $y=f(x)$. 显然,集合 A 的元素的像的全体称为 f 的值域. 因为序偶 $\langle a,b\rangle$ 定义为集合 $\{\{a\},\{a,b\}\}$,所以函数定义 5 只涉及"集合",避免了"对应"、"序"的概念. 只要集合理论适用的一切数学领域,这样给出的函数定义总是适用的.

综上不难看出,函数概念的发展经历了漫长的道路,但是函数概念随着科学技术和数学的发展还在继续扩展.

数、形、函数三个重要数学概念的对立统一发展,使我们更清楚地认识到:数学概念的发展总是与某种矛盾相关联,旧数学概念与新的实践不相适应的矛盾,在研究实践提出的新课题的过程中,作为历史的必然发展了数学概念;或者数学理论发展中科学体系内部产生了矛盾,在深入探讨数学理论体系结构的过程中,作为逻辑的必然而发展了数学概念. 这种对立统一发展的过程告诉我们,每当处于"山穷水尽疑无路"的境地,就预示着将要出现"柳暗花明又一村"的前景. 所以,当我们在科学研究中遇到矛盾而步入"禁区"之日,也正是应该披荆斩棘,开拓前进之时.

还使我们认识到:在数学概念发展的过程中,矛盾是层出不穷的. 旧过程的完结就是新过程的开始,新过程也包含着新的矛盾,又开始了新的矛盾运动. 掌握矛盾层出不穷的这种特征,将有助于我们确立数学永不封闭的信息,从而在科学的征途上永不止步,永攀高峰. 此外,数学概念的发展常常经历由具体到抽象、由简单到复杂、由特殊到一般、由有限到无限、由低级到高级等多种各样形式的发展途径. 具体了解这些过程,将有助于我们运用辩证思想掌握数学概念的方法和途径.

4.4.3 互变思想

互变思想是对立统一思想的重要组成部分.

一切矛盾着的东西,互相联系着,不但在一定条件下共处于一个统一体中,而且在一定条件下互相转变着. 互变是化归的一种手段,但比化归深刻.

互变思想是指在处理、解决问题的过程中有意识地对问题进行交互变化考虑,从彼此相反的状态、形式中寻找相互变化的途径.

在这里,重点介绍互变思想的几种情形:常量与变量的互变、因果关系的互变、质与量的互变.

(1)常量与变量的互变

常量与变量是数学中的一对重要矛盾,它们既互相依存、互相对立,又可以在一定的条件下互相变化.

首先,常量和变量互相依存,没有常量也无所谓变量,没有变量也无所谓常量. 数学中可用变量表示常量,如

$$\begin{cases} y = x + 1 \\ y = 2x + 5 \end{cases}$$

所表示的是两条特定曲线的交点,是一个常量,但它是由两表示变量的方程表示的. 当然,也可用常量表示变量,如过原点(0,0)和点(1,1)的直线,就表示一个动点的轨迹.

其次,常量和变量可以互相转化. 常量在一定条件下变为变量,如方程 $ax+by=c$,这里 a,b,c 为常量,而 x,y 为变量;当把它作为不定方程来考察时,解的性质只与 a,b,c 三个常量有关;当研究二元一次不定方程解的性质时,这三个常量就变为变量,由它们的变化引

起解的性质的种种变化.

在一定条件下,变量变为常量在数学中也是常见的.例如,一个变量在变化过程中取某一个值,就成了常量.

再次,可用常量描述变量,这是数学中常用的方法.例如,在解析几何中研究二次曲线 $Ax_2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 的性质、分类等都是通过常量 A,B,C 来描述的.在各种变换中对不变量(或不变性)的研究,是用常量来描述量的一类典型问题.

另外,还可以通过变量来研究常量.例如求极限的问题,某一变量的极限值无疑是常量,但它的确要通过对变量的研究.这里一个常见的例子是自然对数的底数 e,它是一个常量,但只有通过变量才能认识它,即

$$e=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^x$$

在求解某些数学问题时,若创造条件将常量与变量互相转换位置,往往能突破难点,使问题解决的简捷漂亮.

我们在横向化归中已举了一个简例,下面再举两个稍复杂一点的例子.

例1 解关于 x,y 的方程组

$$\begin{cases}x+ay=a^2\\x+by=b\end{cases}$$

分析 本题若直接解方程组,则解法稍为繁一点,若将 x,y 先看作变元再看作常量,a,b 先看作常量再看作变元则有如下简捷解法.

解 若 $a=b$ 时,则方程组有无数组解.因为此时方程组等价于 $x+ay=a^2$ 这个二元一次方程,对于实数 x,都可求得相应的实数 y,因此它有无数组解.

若 $a\neq b$,则 a,b 是一元二次方程 $x+yt=t^2$ 的两根,由韦达定理,知 $a+b=y,ab=-x$,故原方程组解为 $\begin{cases}x=-ab\\y=a+b\end{cases}$.

例2 解方程 $x^4-4x^2-x+2=0$.

分析 解这个关于 x 的高次方程有一定的难度,如用变量代换,构造一个二元二次方程组可求解,但较繁.若将方程稍作变形为

$$2^2-(2x^2+1)\cdot 2+(x^4-x)=0$$

在上式中,将变量 x 与常量 2 的位置互换,看作是关于"2"的二次方程.由求根公式,得

$$2=\frac{(2x^2+1)\pm(2x+1)}{2}$$

整理得
$$x^2+x-1=0\quad\text{或}\quad x^2-x-2=0$$

解得
$$x_1=\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5}),\quad x_2=\frac{1}{2}(-1-\sqrt{5})\quad x_3=-1,\quad x_4=2$$

此即为所求.

(2)因果关系的互变

原因和结果是事物、现象之间相互联系、相互制约的普遍形式之一.深入了解、认识事物与现象中存在着固有的因果联系,因果规律,这可以说是科学地认识世界和有目的地改造世界的客观前提.

通过认识、分析数学中有关问题的原因和结果的辩证性,找出其联系和规律,研究因果

互相转化、互相变化的条件，找出它们过渡的"桥梁"，是我们处理数学问题的一种重要思想。

我们在研究数学命题时，常常要探讨它的逆命题是怎样的。我们在学习数学定理时，也常常思考它是否有逆定理，这些均是我们运用因果关系互变思想研究数学问题的具体运用。

例 3　试证：凸四边形的第一组对边平行的充要条件是第二组对边的中点连线长等于第一组边和的一半。

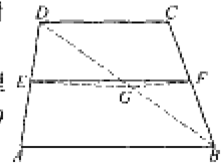


图 12

分析　此题的必要性显然，就是梯形的中位线性质定理。此定理有逆定理吗？此即为证此题的充分性。如图 12，设在凸四边形 $ABCD$ 中，E，F 分别为 AD，BC 的中点，且有

$$EF=\frac{1}{2}(AB+CD)$$

联结 BD，取其中点 G，联结 EG、GF，则由三角形中位线定理，知 $EG=\frac{1}{2}AB$，$FG=\frac{1}{2}CD$，则

$$EG+FG=\frac{1}{2}(AB+CD)=EF$$

即 G 在 EF 上，于是 $AB /\!/ EF /\!/ DC$，故充分性获证。

数学中的每一个概念的定义，都包含着因果关系互变的涵义。例如，由平行四边形的定义，可得：若四边形为平行四边形，则它的两双对边分别平行。反过来，若四边形两双对边分别平行，则此四边形为平行四边形。

探讨数学问题的因果关系时，常运用综合法和分析法，综合法是由命题的假设入手，由因导果，通过一系列的正确推理，逐步靠近目标，最终证出结论；分析法则由命题的结论入手，执果索因，寻求在什么情况下结论才是正确的，一步步逆而推之，直到与已知条件会合。因而，探讨数学问题的因果关系互变时常运用分析综合法，即把分析法与综合法结合起来，在分析中有综合，在综合中有分析或交叉使用去论证、求解的思维方法。

例 4　如图 13，正$\triangle ABC$ 的内切圆 O 与 BC，CA，AB 分别相切于 D，E，F，P 为$\odot O$ 的劣弧$\overset{\frown}{EF}$上任意一点，P 在 BC，CA，AB 上的射影分别为 L，M，N。求证：$\sqrt{PL}=\sqrt{PM}+\sqrt{PN}$。

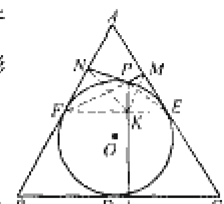


图 13

分析　要证$\sqrt{PL}=\sqrt{PM}+\sqrt{PN}$，只需证明

$$PL=PM+PN+2\sqrt{PM\cdot PN}$$

又由于$\triangle ABC$ 是正三角形，所以 D，E，F 分别是 BC，AC，AB 的中点。若联结 EF，交 PL 于 K，则 KL 为$\triangle ABC$ 底边上高的一半。

因$\triangle AEF$ 也是正三角形，$PK\perp EF$，则

$$KL=PK+PM+PN$$

即
$$PL=PK+KL=2PK+PM+PN$$

于是只需证明 $2PK=2\sqrt{PM\cdot PN}$，也即 PK 是 PM，PN 的比例中项就能证明结论。为此，联结 MK、KN，以便证明$\triangle PKN\backsim\triangle PMK$。

又由于 P，K，E，M 四点共圆，P，K，F，N 四点共圆，则联结 PE、PF，就有

$$\angle PMK=\angle PEK=\angle PFN=\angle PKN$$

同理
$$\angle PKM=\angle PNK$$

即可证 $\triangle PKN \backsim \triangle PMK$

(3)质与量的互变

我们在统计思想的介绍中,曾指出:定量是定性的深化和精确化,统计的结论要用数据说明,规律要从数据中发现,要运用数理统计理论作定量分析、推断,才能有把握承认结论的可靠性.这就是质与量的一种相互依赖关系.

体现质要有一定的量,量是质的一种标志.反过来,一方面,量是含有质的,没有质的量就是水分;另一方面,量是有限度的,达不到这个限度或超过这个限度就会引起质的改变.没有质就没量,没有量更没有质.这就是质与量的互变关系.

例如,循环小数,哪怕小数位取得再多也还是一个近似数,但化为分数后却是准确数,这是因为化分数实际上是求这个循环小数随着取小数位的依次增多所组成的数列的极限,取到这个极限值就是得到准确数值,达不到或超过这个极限值,就是近似数值.再例如,顶点在圆上,角的一边为圆的弦时,另一边绕顶点旋转,当旋转角在某一限定范围内,另一边是圆的弦,就得到圆周角;当旋转角达到某一限度时,另一边是圆的切线就得到弦切角;当旋转角达不到或超过这个范围或限度时,就得不到圆周角或弦切角了.

数学中这样的例子还有很多,但日常生活中这样的例子更多,就留给读者自举吧!

4.4.4 转换思想

转换思想是互变思想的另一种形式,思维的角度要宽一些.

转换也是化归的一种手段,但又有其特色.

转换思想是指在处理、解决问题的过程中有意识地对问题进行变化或变换,从而较易或简捷地解决问题的思维倾向.转换思想的价值在于教育人们从不同角度,不同侧面去观察问题,产生新的联想,理出思路.转换表现的情形也是各种各样,如已知条件的转换,问题结论的转换,命题形式的转换,各学科知识间的转换等等.

例1 如图14,已知梯形 $ABCD$ 中,$|AB|=2|CD|$,点 E 分有向线段 AC 所成的比为 λ,双曲线过 C,D,E 三点,且以 A,B 为焦点,当 $\frac{2}{3}\leqslant\lambda\leqslant\frac{3}{4}$ 时,求双曲线的离心率 e 的取值范围.

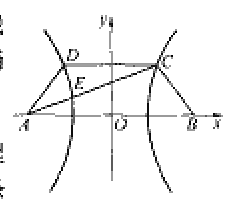


图 14

分析 由于这是一个双参数范围问题,而且是在未知双曲线方程的情况下来求离心率 e 的取值范围,再加上大家期望要用上的已知条件:$\frac{2}{3}\leqslant\lambda\leqslant\frac{3}{4}$ 中的 λ,又是大家在日常解题中着实有点感到后怕的"点 E 分有向线段 AC 所成的比".这时,可运用转换思想处理,建立坐标系,确立方程的形式入手:如图14,以 AB 的垂直平分线为 y 轴,以 AB 所在直线为 x 轴,建立直角坐标系 xOy,则 $CD\perp y$ 轴.因为双曲线过 C,D,且以 A,B 为焦点,由双曲线的对称性知 C,D 关于 y 轴对称,并设双曲线方程为 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}(a>0,b>0)$,则离心率 $e=\frac{c}{a}$.

在做好这一基础性工作的前提下,如何由 λ 的范围来求 e 的范围就成了解决本题的思维核心,我们看到这个双参数问题中,λ 和 e 既互相制约,又在一个矛盾中统一(统一在一个方程里),这是考查我们在解题某个阶段视哪一个为主元,哪一个为辅元,而在解题另一个阶段,又需要主辅互换,反客为主,真是个考查辩证思维,灵活转化的绝妙压轴题.题虽难,但也

正是考生一显身手，展示自己思维能力的好地方，也是与众考生一决高下的分水岭.因此，这可根据 λ 的范围已知这一条件，进而确立：先视 λ 为主元，再视 e 为主元，找出两个参数之间的关系 $\lambda=f(e)$，将问题转换为已知范围，再解不等式，由此求出参数 e 的范围这样一个整体的思路和思维策略.

于是，这可先视 λ 为主元，找 λ 的关系式：依题意，记 $A(-c,0)$，$C(\frac{c}{2},h)$，$E(x_0,y_0)$，其中 $c=\frac{1}{2}|AB|$ 为双曲线的半焦距，h 是梯形的高.

由定比分点公式得

$$x_0=\frac{-c+\frac{\lambda}{2}}{1+\lambda}=\frac{(\lambda-2)c}{2(1+\lambda)},\quad y_0=\frac{\lambda h}{1+\lambda}$$

但在如何再视 e 为主元，找出两个参数之间的关系 $\lambda=f(e)$ 时，又一次体现思维水平的层次性.

视角 1　视点 C,E 为直线 AC 与双曲线的交点，这时，虽能把方程 $y=\frac{2h}{3c}(x+c)$ 代入 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 得

$$(9b^2c^2-4a^2h^2)x^2-8a^2h^2cx-(4a^2h^2+9a^2b^2)=0$$

这一常规思路虽正确，解题方向也不错，但要用上这一方程不但难，而且繁，在应该的情况下当然应另辟蹊径.思路敏锐的学生在不代前就暂时放弃了.

视角 2　视点 C,E 在双曲线上，将 C,E 的坐标和 $e=\frac{c}{a}$ 代入曲线的方程，得

$$\frac{e^2}{4}-\frac{h^2}{b^2}=1 \qquad ①$$

$$\frac{e^2}{4}\cdot(\frac{\lambda-2}{1+\lambda})^2-(\frac{\lambda}{1+\lambda})^2\cdot\frac{h^2}{b^2}=1 \qquad ②$$

由①得

$$\frac{h^2}{b^2}=\frac{e^2}{4}-1 \qquad ③$$

将③式代入②式整理得

$$\frac{e^2}{4}(4-4\lambda)=1+2\lambda$$

故得

$$\lambda=1-\frac{3}{e^2+2}$$

由题设 $\frac{2}{3}\leqslant\lambda\leqslant\frac{3}{4}$，得 $\frac{2}{3}\leqslant 1-\frac{3}{e^2+2}\leqslant\frac{3}{4}$，故得 $\sqrt{7}\leqslant e\leqslant\sqrt{10}$.

所以双曲线的离心率 e 的取值范围是 $[\sqrt{7},\sqrt{10}]$.

视角 3　视 AC，AE 为点 C,E 到焦点 A 的距离，由焦半径公式得

$$|AC|=a+ex_c=a+\frac{ec}{2},\quad |AE|=-a-ex_E=-a-\frac{e(\lambda-2)c}{2(1+\lambda)}$$

而 AC，AE 同号，从而 $\frac{|AC|}{|AE|}=\frac{AC}{AE}=1+\frac{1}{\lambda}$，所以

$$1+\frac{1}{\lambda}=\frac{a+e\cdot\frac{c}{2}}{-a-e\cdot\frac{(\lambda-2)c}{2(1+\lambda)}}\Rightarrow e^2=\frac{2\lambda+1}{1-\lambda}=-2+\frac{3}{1-\lambda}$$

由题设$\frac{2}{3}\leqslant\lambda\leqslant\frac{3}{4}$，得$\frac{2}{3}\leqslant 1-\frac{3}{e^2+2}\leqslant\frac{3}{4}$. 所以双曲线的离心率 e 的取值范围是$[\sqrt{7},\sqrt{10}]$.

这里同是 C，E 二点，但由于解题转换思想的运用，从不同的视角出发，使解题的切入点和解题的方向各不相同，对同一问题解答所用的知识、方法也不同. 其中视角 2 下的方法比较简单，而视角 3 下的方法，运用焦半径公式来解，在简捷中更显得灵活，真是："横看成岭侧成峰，远近高低无一同".

下面，为了深入地领悟转换思想，我们从思维的角度，重点介绍转换思想的几个方面：即一般与特殊的转换、抽象与具体的转换、动与静的转换、整体与部分的转换、有限与无限的转换、感然与必然的转换、正运算与逆运算的转换、低级运算与高级运算转换、直与曲的转换等.

(1)一般与特殊的转换

从一般到特殊，从特殊到一般，是人类认识自然界的一种重要思想方法，也是中学数学中常运用的一种思想.

"一般"概括了"特殊"，"一般"比"特殊"更能反映事物的本质，因此人们常常把许许多多特殊具体的事物置于一般的普遍的事物中，通过对一般情形的讨论、转换去解决和处理特殊的问题. 例如，我们证明了三角形的内角和定理，这个定理是关于一般三角形的性质，由于特殊三角形属于一般三角形，因而特殊三角形的内角和也是 180°. 又如几何中证明时常用的三段论，就是一般到特殊的一种思想方法；几何教材中全等形、相似形内容的编排顺序也体现了从特殊到一般的思想.

事物的特殊性中包含着普遍性，即所谓共性存在于个性之中. 相对于"一般"而言，特殊的事物往往更简单、直观、具体，更容易认识. 因而在处理一般性问题时，常常从特殊的情况入手，通过对特殊情况的研究，找出处理"一般"问题的方案，使"一般"的问题得到解决. 例如，证明圆周角与同弧上的圆心角关系定理时，直接证明一般情况往往难以下手，这时可以先从特殊情况入手，即当圆周角的一边经过圆心的情形(图 4.1.1(a))，在这种情况很容易证得$\angle BAC=\frac{1}{2}\angle BOC$，然后再研究一般情况，由于它们可以通过辅助线转化为特殊情况，所以一般情况下的圆周角与圆心角之间的关系得以证明.

数学中的归纳思想，也可以看作是从特殊到一般的转换的思想. 如研究多边形时，作出从一个顶点出发的所有对角线，能把多边形分割成一些三角形，考察这种分割方法得到的三角形的个数与多边形边数之间的关系时，就是从特殊情况入手的. 先对一些特殊的多边形：四边形、五边形、六边形等进行分析，发现四边形被分成 2 个三角形，五边形被分成 3 个三角形，六边形被分成 4 个三角形，等等，从而归纳出 n 边形被分成 $n-2$ 个三角形的结论.

(2)抽象与具体的转换

抽象是在对事物进行由表及里、去粗取精、去伪存真的基础上，抽取提炼出事物的本质属性，舍弃事物的非本质属性，借以形成科学的概念和揭示事物的发展规律的一种思维. 具

体就是把抽象的概念、结论和规律体现于直观、简单、清晰明确的对象或问题.而人们认识具体过程常表现为:感性具体——抽象——综合——理性具体.因此,我们运用具体与抽象的转换思想时,一方面把抽象的概念、结论和规律回归于感性具体,用个别的、特殊的或局部的具体实例或经验材料对抽象内容作直观描述,验证抽象规律或应用抽象法则,以加深对概念、结论和规律的理解;另一方面,把抽象的概念、结论和规律,通过综合上升为理性具体,形成各种思维的具体模式,体现于各类典型的具体对象或问题.

例如,从分数的概念及运算法则到分式的概念及运算法的学习,就是一种由具体到抽象,再到具体的相互转换的思想的体现.

例2 设 a,b,c,d 都是正数,证明:存在一个三角形,其三边之长分别为$\sqrt{a^2+b^2}$,$\sqrt{a^2+c^2+d^2+2ac}$,$\sqrt{b^2+c^2+d^2+2bd}$,并计算这个三角形的面积.

分析 本题按照构成三角形的充分条件来验证是比较复杂的,要利用海伦公式计算其面积更为繁杂.但运用抽象与具体转换的思想,结合本题根式的特点,作出具体图形,则有简捷解法:现以长为 $a+c$,$b+d$ 的线段为边作矩形 $ABCD$,如图 15 所示,则有

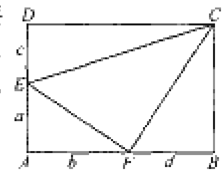


图 15

$$AB=b+d=AF+FB,\quad AD=a+c=AE+ED$$

则

$$EF=\sqrt{a^2+b^2},\quad FC=\sqrt{a^2+c^2+d^2+2ac}$$

$$EC=\sqrt{b^2+c^2+d^2+2bd}$$

从而$\triangle EFC$ 即为符合条件的三角形.又

$$S_{\triangle EFC}=S_{ABCD}-(S_{\triangle AEF}+S_{\triangle FBC}+S_{\triangle DEC})=$$

$$(b+d)(a+c)-\left[\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}d(a+c)+\frac{1}{2}c(b+d)\right]=$$

$$\frac{1}{2}(ab+ad+bc)$$

(3)动与静的转换

动和静是事物状态表现的两个方面,在数学中,一方面,动和静在一个参照系统中是相对的,可以转换的;另一方面,对于同一问题可以追寻形成静止状态以前的运动过程,或者反过来,从运动状态中推出其将会达到的相对静止局面.因此,在处理数学问题时,可用动态的观点来处理静的形态和数量表示,即以动求静;也可以用静态的观念来处理运动过程及其对象,即以静求动.

动静转换在平面几何中,特别是在几何变换中占据着重要地位.例如,在证明三角形的中位线定理时,通过对三角形的中位线的平行移动,出现平行线截割定理.又如,通过相似三角形可以证明:当两直线的交点在圆内时,出现相交弦定理;当交点变化到圆外时,出现割线长定理;当一割线变化到切线位置时,出现切割线定理;当两割线都变到切线位置时,则出现切线长定理;而以上各种情况都统一在圆幂定理中.再如,当圆锥面被平面相截,截口可以是椭圆、抛物线、双曲线、圆、点或两直线.由于动"点"成"线",动"线"成"面",不少平面几何里的定理,可推广到空间.

静是相对的,动是绝对的,我们寓动于静止之中,这种观点在极值、定值以及轨迹探求上,往往起着决定的作用.

在探求极值时，往往利用某些点按照某种规律作运动．动中求静，以静窥动，于是在这种“动动静静”下，极值将显露．

例 3 已知三角形的两边 a 和 b，它的第三边应当怎样，才能使三角形的最大角具有最小的量？

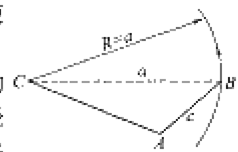


图 16

分析 设三角形给定的两边为 a 和 b，不妨假设 $a \geqslant b$．利用动态，当 A，C 两点不动时，显然，顶点 B 仅可在以 C 为圆心，a 为半径的圆周上作运动．根据已知定理：两条边对应相等的两个三角形，夹角较大的其所对的第三边也较大．由此得到：c 边随着所对的 C 角的增大而同时增大．也就是说：当 B 点沿着圆周作反时针运动时，观其运动趋势可得：c 边随着 C 角的增大而增大，如图 16 所示．同时，显然，角 A 将随着 c 边的增大而减小．

根据在一个三角形中，大边对大角的定理，又因这时 $a \geqslant b$，则在这个变动的三角形中，角 B 为最大角的可能性已被排除(因 b 边不是最大边)，因而其最大角只能是角 A 和角 C 的一个．

利用动态，观察 B 点沿圆周作运动．当 $a = c$ 时，角 A 和角 C 将取得相等的角度 A_0 和 C_0．如果 $a > c$，则三角形的最大角是 A 角，根据前面的说明有 $A > A_0$；如果 $a < c$，则三角形的最大角是 C 角，同样有 $C > C_0$．

于是可证得：只有当 $a = c$ 时，三角形中的最大角才具有最小的度数．

(4)整体与部分的转换

整体，反映了问题的结构特征；局部，则显示出了问题更多的细节．因此，在处理问题中，要适时地将整体与部分相互转换，既要观察局部内容的形式，又要发掘、理解整体结构的实质；既要局部重点分析，又要全面地考虑所有条件；既要局部调节，又要整体控制．例如我们常运用的割与补、添与减等就是具体的运用局部与整体相互转换的典型．

整体与部分的相互转换在教材的很多内容的编排上以及在我们的教学中，运用得也是较多的．例如，在初中平面几何的几章主要内容：线段、角，相交线、平行线，三角形，四边形，相似形，圆中，教材都是从总体入手，先介绍一般的概念与图形，纵观问题的整体特征，进行全方位审视；然后再转到局部即化整为零进行研究，再研究特殊情形、特殊图形；最后又积零为整，将所讨论的特殊情形、特殊图形的有关概念、性质进行归纳小结，又回到整体上审视这部分内容．这就是教材编排中的“整体 - 局部 - 整体”相互转换思想．我们的课堂教学一般也是运用这样分三步相互转换的思想安排教学内容．一堂课中，首先引入课题，然后分成若干步骤，从若干方面教学这个课题，最后进行课堂小结不就是体现了这种思想吗？在这里，值我们注意的是第三步，因为，往往在某些地方，某些时候被忽视了．这一步是这种转换思想的关键的环节．世界著名的数学家、教育家波利亚曾指出：“在考查完了各个细节并对它们中的某些情况重新予以评价之后，我们就会感到有必要把这些情况联成一个整体去看．事实上，在重新评价某些细节之后，整体的面貌可能会起变化，这些重新评价过的细节再结合起来，其结果便会出现一个所有细节显得更加和谐的组合体，一幅崭新的整体的油画．”

在数学解题中，有时也可将某问题看作一个整体，注意问题的整体结构和结构的改造，并且在研究其整体形式、结构或作整体处理(代换、变形等)中，也注意其某特殊局部，这是我们解题的一种重要转换思想，特别是当涉及复杂的计算与繁琐的讨论时，若不考虑其细节而

是从整体上入手,则思路反而豁然开朗,发现解决问题捷径.

例 4 设 $a-b=2+\sqrt{3}$,$b-c=2-\sqrt{3}$,求 $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ 的值.

分析 若按常规,先求 a,b,c 的值,再代入原式计算,但因已知条件是两个方程三个未知数无法求解.若不管 a,b,c 各自的值,将已知条件作为整体考虑,已知条件联想到 $a-c=(a-b)+(b-c)=4$,进而将所求代数式表示成已知条件整体的表达式,就比较容易求解了

$$a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]=$$

$$\frac{1}{2}[(2+\sqrt{3})^2+(2-\sqrt{3})^2+4^2]=15$$

(5)有限与无限的转换

数学研究的对象可以是特殊的或一般的,可以是具体的或抽象,可以是静止的或运动的,可以是有限的或无限的,它们之间都是矛盾的对立统一.正是由于对象之间的对立统一,为我们解决这些对立统一的事物提供了研究方法.有限与无限相比,有限显得具体,无限显得抽象,对有限的研究往往先于对无限的研究,对有限个对象的研究往往有章法可循,并积累了一定的经验,而对无限个对象的研究,却往往不知如何下手,显得经验不足.于是将对无限的研究转化成对有限的研究,就成了解决无限问题的必经之路.反之,当积累了解决无限问题的经验之后,可以将有限问题转换成无限问题来解决.这种无限转有限,有限转无限的解决数学问题的方法就是有限与无限的转换思想.

在数学教学过程中,虽然开始学习的数学都是有限的数学,但其中也包含有无限的成分,只不过没有进行深入的研究.在学习有关数及其运算的过程中,对自然数、整数、有理数、实数、复数的学习都是研究有限个数的运算,但实际上各数集内元素的个数都是无限的,以上数集都是无限集.对图形的研究,知道直线和平面都是可以无限延展的.在解析几何中,还学习过抛物线的渐近线,已经开始有极限的思想体现在其中.学习了数列的极限和函数的极限之后,使中学阶段对无限的研究又上了一个新台阶,集中体现了有限和无限的数学思想.使用极限的思想解决数学问题,比较明显的是立体几何中求球的体积和表面积,采用无分割的方法来解决.实际上是先进行有限次分割,然后再求和求极限,我们认为,这是典型的有限与无限转换思想的应用.

数学评价中对有限与无限思想的考查才刚刚起步,并且往往是在考查其他数学思想和方法的过程中同时考查有限与无限的思想.例如,在使用由特殊到一般的归纳思维时,含有有限与无限的思想;在使用数学归纳法证明时,解决的是无限的问题,体现的是有限与无限的思想,等等.随着高中课程的改革,对新增内容的考查在逐步深入,必将加强对有限与无限思想的考查,设计出突出体现有限与无限思想的新试题.

(6)或然与必然的转换

世间万物是千姿百态、千变万化的,人们对世界的了解、对事物的认识是从不同侧面进行的,人们发现事物或现象可以是确定的,也可以是模糊的,或随机的.为了了解随机现象的规律性,便产生了概率论这一数学分支.概率是研究随机现象的,随机现象有两个最基本的特征,一是结果的随机性,即重复同样的试验,所得到的结果并不相同,以至于在试验之前不能预料试验的结果;二是频率的稳定性,即在大量重复试验中,每个试验结果发生的频率"稳

定"在一个常数附近.了解了一个随机现象就是要知道这个随机现象中所有可能出现的结果,知道每个结果出现的概率.知道这个两点就说对这个随机现象研究清楚了.概率研究的是随机现象,研究的过程是在"偶然"中寻找"必然",然后再用"必然"的规律去解决"偶然"的问题,这其中所体现的数学思想就是或然与必然的转换思想.

随着新课改的深入,评价中对概率内容的考查已放在了重要的位置.通过对教学中所学习的等可能事件的概率、互斥事件有一个发生的概率、相互独立事件同时发生的概率、n 次独立重复试验恰有 k 次发生的概率、随机事件的分布列与数学期望等重点内容的考查,在考查考生基本概念与基本方法的同时,考查在解决实际应用问题中或然与必然的辩证关系,体现或然与必然的数学思想.

(7)正运算和逆运算的转换

正和逆是现实世界中具有普遍意义的矛盾之一,它们必然反映到数学运算中来.所以研究数学运算的辩证关系,就要注意正逆运算之间的联系与转换.

现实世界中数量的增加和减少是一对矛盾,它们相互消长、互相制约,因此研究数量关系就必须有加法及逆运算——减法.数的加法和减法是两种对立的运算,它们互相依存并在一定条件下互相转换.

在算术中尚不具备转换的条件,只是相互补充、相互为用.例如

$$996+326=(996+4)+(326-4)=1\ 000+322=1\ 322$$

在代数中由于任何数都存在唯一的相反数,具备了转换条件,因而加法可以转换为减法,反之亦然.加法和减法的这种统一,形成了代数和的概念.在代数和概念的基础上,有理整式(多项式)被表为单项式的代数和;移项法则着眼于系数的性质符号;二次方程的一般形式可写成 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$.总之,代数中不再区分加法和减法了,因而带来许多方便.

同样,数的乘法和除法,乘方和开方也都是互逆的运算,对立的双方也都可以在一定条件下互相转换.乘法和除法转换的条件是倒数,除以一个不为零的数 a,可转换为乘以 a 的倒数$\frac{1}{a}$;反过来,乘以一个不为零的数 a,可以转换为除以 a 的倒数$\frac{1}{a}$.

数学运算不仅指数字运算,数学变换也是一种运算.数学变换同样存在正运算和逆运算两种运算.例如求三角函数值与求反三角函数值两种变换就是互逆的运算.前者是单值的,后者就其本来意义而言是多值的,因此规定反三角函数只取主值,从而使其成为单值.

互逆的运算关系有时并不明显,而一旦发现两种运算是互逆的,则能加速数学的发展.例如微分与积分:在微积分的发展史上各有渊源,从几何学来看前者与计算切线的斜率有关,而后者与计算曲边形的面积有关.牛顿、莱布尼兹之所以被认为是微积分的创立人,主要是他们发现了微分积分有互逆的关系,从而把表面上并不相干的两种运算联系起来,为数学的发展开辟了一条康庄大道.比如,求积分 $\int_b^a f(x)\mathrm{d}x$ 的运算归结为求$f(x)$的原函数运算,这就可以充分利用微分运算所积累的知识,使问题容易解决.

正、逆运算作为一对矛盾,它们互相依存不可分割,但两者所处的地位却不同.一般情况下正运算处于矛盾的主要方面,这是因为逆运算是定义在正运算的基础上,从根本上依赖于正运算.例如,数的加法和乘法都满足交换律,因此它们的逆运算只有一个.而乘方运算中底数和指数不能交换,所以它的逆运算是开方和对数两种,这是逆运算在根本上依赖正运算的一个重要特征.

恩格斯说:"从一种形式到另一种形式的转变并不是一种无聊的游戏,它是数学科学的最有力的杠杆之一".正与逆运算的对立与统一,是解决数学问题的有力杠杆.因此对于给定的一个运算,在什么条件下存在着逆运算?有什么样的逆运算?已成为一大类数学问题中的核心问题.

(8)高级运算与低级运算的转换

数学运算中高级运算与低级运算的互相转换是普遍存在的,而且从某种意义上说,没有这种运算的转换,数学就不会有实质性的进展.

我们通常说的六种代数运算,是指加、减、乘、除、乘方、开方,把加与减、乘与除、除方与开方分别称为一、二、三级运算.正运算与逆运算的转换是在同一级中进行.而由一级到二级、由二级到三级的转换则会发生可观的变化——简捷和迅速.将加数相同的加法运算转换为乘法,将乘法相同的乘法运算转换为乘方,是从低级运算转换为高级运算,起到了化繁为简的作用.

有时将高级运算向低级运算转换,也能起到化繁为简的作用.对数运算就是一个明显的例证.由

$$a \cdot b = c^{\log_c a} \cdot c^{\log_c b} = c^{\log_c a + \log_c b}(a, b, c > 0, c \neq 1)$$

表明,任意两个正数相乘可以转换成同底数幂相乘,从而归结为指数相加.在微积分中求多元函数高阶导数问题归结为求一元函数的一阶导数问题,求多元函数积分问题归结为一元函数积分问题等,也是高级运算向低级运算的转换.

数学运算之间的转换是多方面的,例如复杂运算与简单运算之间的转换,不同坐标系的转换,不同形式之间的转换等等.实践证明,对数学运算转换的研究,能够促进数学的发展.

(9)直与曲的转换

直与曲是两种不同的形象,从其几何特征看,前者曲率是零,后者曲率不是零.从解析表达式看,前者为线性方程,后者是非线性方程.直与曲的对立是极为明显的.直与曲既然对立,也就必然能够统一.实际上曲直转换的思想早在我国古代就产生了.例如,数学家刘徽在注《九章算术》中论述割圆术时就指出:"割之弥细,所失弥少.割之又割,以至于不可割,则与圆合体而无所失矣".在这里,他明确指出了曲直转换的方向.但由于当时尚没有转换的条件——极限方法,也就不可能实现真正的转换,只能是相互为用、互相补充.

曲与直互相转换的思想方法是微积分中重要方法.线性函数是最简单的函数.它的图形——直线也最简单.任一条"光滑"曲线的每一小段都接近于直线段,曲线段越短就越接近.从函数的观点看,就是任一"光滑"(连续可微的)函数,当独立变数改变很小时,就接近于线性函数.因而在曲线的局部和变量变化的小范围内,我们可以用直线段来代替曲线段,以线性函数代替非线性函数.概括说来,就是以直代曲.

例如,在微分学中,我们知道

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \to 0)$$

其中 $o(\Delta x)$ 表示一个比 Δx(在 $\Delta x \to 0$ 时)更高阶的无穷小量.这样,当 Δx 很小时,就有近似公式

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x = f(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x$$

这表示在 x_0 附近 $f(x)$ 可用线性函数近似代替,用微分写出是 $\Delta y \approx dy$.它的几何意义就是以切线(直)代替曲线,如图 17 所示.

再如,在积分学中,求曲线梯形的面积也是运用了曲转换为直、直转换为曲的辩证思想.我们知道,这个计算过程是先微分后积分的过程.它是先把整个曲边梯形分割成许多小曲边梯形,而在每个小曲边梯形中把曲边看成直边,于是就可用那些小"直边梯形"的面积的和近似地表示原来大曲边梯形的面积,从而实现了局部的曲转换为局部的直,即"以直代曲".然后,再把分割无限加细,通过取极限,使小直边梯形的面积之和转换为大曲边梯形的面积.这样,局部的直又反过来转换为整体的曲.这种曲转换为直、直转换为曲,以及由此反映出来的化整为零,积零为整的思想,是数中学的重要转换思想.

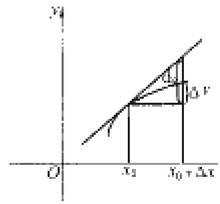


图 17

转换思想使我们感悟到:一切固定差别都消失了,一切都可以用相对或相反的形式表现或表示出来.而这种从一个形态到另一个相对或相反形态的转换,并不是无聊的游戏,它是数学科学的最有力的杠杆之一.

4.4.5 一分为二思想

一分为二思想是对立统一思想的一种重要表现形式.

数学中的一分为二思想,指的是在观察、分析、处理数学问题时,要从多侧面、多角度全方位地全面考虑,不仅要看到问题所体现的特殊性,还要看到它所体现的一般性;不仅要看到这个问题的静态性,还要看到它的动态性;不仅要看到这个问题所反映的局部性,还要看到它可反映的整体性;不仅要看到这个问题的正面,还要看到它的反面;……总而言之,不仅只看到问题的一面,还要看到问题的另一面及这两个方面在一定条件是可以相互转化的.

数学问题来自于生产、生活,来自于科研,因而构造复杂,变化多端,只有运用一分为二思想来观察、分析、处理,才不会使我们的视野局限于一隅,而使我们思维开阔,坦途条条.例如我们运用一分为二的思想、观察、分析数"1",就会使我们认识到"1"的丰富内涵.

恩格斯说:"再没有什么东西看起来比 1 这个数量单位更简单了,但是,只要我们把它和相应的多联系起来,并且按它从相应的多中产生出来的各种方式加以研究,就知道再没有什么东西比 1 更多样化了".单独考察"1"是简单的,但若与其对立面的"多"联系起来考察,就能发现丰富多样的内容.

1 可产生多,多由 1 组成,即多中包含 1.由 1 和数学运算可产生一系列的数;1 和加法能得到任意自然数;1 和加法、减法能得到任意整数;1 和加、减、乘、除四则运算可得到任意有理数;1 和六种代数运算可得到实数集的一个子集及相应的复数集的一个子集.这里,1 是多的一部分,它包含于多中.

1 是单位,多是若干个单位之和,若采用特定的"多"作单位时,多就转化为 1.例如,1 000是多,但采用吨为单位时 1 000 kg 就是 1 t;60 是多,但采用小时作单位时 60 min 就是 1 h.

多转化为 1 在数学中可用多种形式表示,就是说产生 1 的方式是多种多样.例如:

$$1=\frac{a}{a}(a\neq 0) \qquad 1=1^x(x\in\mathbf{R})$$

$$1=a^0(a\neq 0) \qquad 1=\log_a a(a>0,a\neq 1)$$

$$1=C_n^n=C_n^0 \qquad 1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$$

$$1=\tan\alpha\cot\alpha \qquad 1=x',\quad 1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$$

$$1=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$$

这些转化绝不是无聊的游戏，而是促进数学发展的有力杠杆.

另外，在用数表示量的多少时，1 是单位；用数表示顺序时，1 是最前的元素. 而一个自然数是同时具有多少和顺序两种意义的，因此 1 既是单位，又是最前元素的唯一的数.

1 是某些领域的标准，是非常重要的一个数. 1 是对数系统的界限，当底大于 1 时，一切大于 1 的数的对数都是正数，而一切小于 1 的正数的对数都是负数；当底小于 1 时，恰恰相反. 以任何定义所允许的数为底，1 的对数都是零. 在解析几何中，1 是圆锥曲线分类的标准. 离心率大于 1、等于 1 和小于 1 的曲线分别是双曲线、抛物线和椭圆.

欧拉公式

$$1=e^{-2\pi i}$$

除其应用外，能使我们欣赏和感受结果是 1 的复杂运算的神秘美，也展示了数学的神奇魅力.

正如恩格斯指出的："1 和多是不能分离的、相互渗透的两个概念，而且多包含在 1 中，正如 1 包含在多中一样."

思考题

1. 小马一次看手表时，发现时针与分针恰好重合. 他突然想：它们下一次重合需要经历多少时间？请解答这一问题.

2. 甲在公路上骑车行驶，每隔 a 分钟，迎面有一辆公交巴士通过，每隔 b 分钟，后面有一辆公交巴士越过. 问：公交巴士每隔几分钟一趟？

3. 设公差不为零的等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{na_n}=$ ________.

4. 若方程 $2x^2+(3a+1)x+(2a-3)=0$（a 为实数）一根大于 3，一根小于 3，试确定 a 的范围.

5. 在坐标平面 xOy 上有一运动着的梯形 $ABCD$，$AD\parallel BC$，$\angle C=45°$，$\angle A=90°$，$AB=AD=2\sqrt{3}$，梯形在 $OA+OB=4$ 的条件下运动，求原点 O 到直线 CD 的最短距离.

6. 已知 l_1，l_2 是过点 $P(-\sqrt{2},0)$ 的两条相互垂直的直线，且 l_1，l_2 与双曲线 $y^2-x^2=1$ 各有两个交点，分别为 A_1，B_1 和 A_2，B_2. 求 l_1 的斜率 k_1 的取值范围.

7. 已知 x，y 适合 $x^2+2y^2=8$，求函数 $f(x,y)=x-y$ 的最大值和最小值.

8. 试求常数 m 的范围，使曲线 $y=x^2$ 的所有弦都不能被直线 $y=m(x-3)$ 垂直平分.

9. 将正方形 $ABCD$ 分割为 n^2 个相等的小方格（n 是自然数），把相对顶点 A，C 染成红色，B，D 染成蓝色，其它交点任意染成红、蓝两色中的一种颜色. 证明：恰有三个顶点同色的小方格数目必是偶数.

思考题参考解答

1. 想象 12 h 后，时针与分针再一次重合，这中间，时针跑了一周，分钟跑了 12 周. 分针越过时针 11 次，即时针与分针有 11 次重合. 所以从某次重合到下一次重合所需要的时间是 $\frac{12}{11}$ h.

2. 设公交巴士每隔 x min 一趟. 不妨设甲在 A 地同时与对面的汽车 A_1 及后面的汽车 B_1 相遇，过了 ab 分钟后，甲在 B 地又同时与对面的汽车 A_2 及后面的汽车 B_2 相遇. 并设甲在 A

地时，汽车 A_2 在 C 地，汽车 B_2 在 D 地.

一方面，汽车从 C 到 B 用了 ab 分钟，而从 C 到 A 共排列 b 辆汽车，所以汽车从 C 到 A 要用 bx 分钟，于是，汽车从 A 到 B 需要 $bx-ab$ 分钟.

另一方面，汽车从 D 到 B 用了 ab 分钟，而从 D 到 A 共排列 a 辆汽车，所以汽车从 D 到 A 要用 ax 分钟，于是，汽车从 A 到 B 需用 $ab-ax$ 分钟.

所以 $bx-ab=ab-ax$，解得 $x=\frac{2ab}{a+b}$. 故公交巴士每隔 $\frac{2ab}{a+b}$ 分钟一趟.

3. 由于这是一道填空题，故只需求出结果即可. 依题意可知，对符合条件的等差数列来说，所求结果都是一样的. 因此可用数列 $\{n\}$ 作特例来求解.

取 $a_n=n(n\in\mathbf{N})$，则 $d=1\neq0$，显然符合题意. 此时

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{na_n}=\frac{\frac{n(n+1)}{2}}{n\cdot n}=\frac{n^2+n}{2n^2}=\frac{1}{2}$$

4. 常规解法是由两根分别大于 3 和小于 3 解无理不等式得出结果. 现在我们将问题放到二维平面上考虑，设 $y=2x^2+(3a+1)x+(2a-3)$，显然此抛物线开口向上，由其有两根且有一根大于 3，一根小于 3 知，当 $x=3$ 时，$y=18+9a+3+2a-3<0$，解得 $a<-\frac{18}{11}$. 所以所求 a 的取值范围是 $a<-\frac{18}{11}$.

5. 因为梯形是运动的，所以动直线的方程比较复杂. 若将梯形看作静止而原点 O 是运动的，则由 $OA+OB=4$，$AB=2\sqrt{3}$ 可知，动点 O 的轨迹是以 A，B 为焦点的椭圆，建立以 AB 中点 O' 为"原点"，AB 中垂线为 x' 轴的新坐标系 $x'O'y'$，则直线 CD 的方程为：$x'+y'-3\sqrt{3}=0$. 动点 O 的轨迹方程为 $x'^2+\frac{y'^2}{4}=1$. 设 O 在新坐标系 $x'O'y$ 下的坐标为 $O(\cos\theta,2\sin\theta)$，则 O 到直线 CD 的距离为

$$d=\frac{|\cos\theta+2\sin\theta-3\sqrt{3}|}{\sqrt{2}}=\frac{|\sqrt{5}\sin(\theta+\varphi)-3\sqrt{3}|}{\sqrt{2}}\geqslant\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{6}-\sqrt{10}}{2}$$

当且仅当 $\sin(\theta+\varphi)=1$ 时，原点 O 到直线 CD 的最短距离为 $\frac{3\sqrt{6}-\sqrt{10}}{2}$.

6. 依题设，l_1，l_2 的斜率都存在，因为 l_1 过点 $P(-\sqrt{2},0)$ 且与双曲线有两个交点，故方程组

$$\begin{cases}y=k_1(x+\sqrt{2}) \quad (k_1\neq0)\\ y^2-x^2=1\end{cases} \qquad ①$$

有两个不同的解，消去 y 后，得

$$(k_1^2-1)x^2+2\sqrt{2}k_1^2x+2k_1^2-1=0 \qquad ②$$

若 $k_1^2-1=0$，则方程①只有一解，与题设矛盾. 故 $k_1^2-1\neq0$，方程②的判别式为

$$\Delta_1=(2\sqrt{2}k_1^2)^2-4(k_1^2-1)(2k_1^2-1)=4(3k_1^2-1)$$

同理 $\Delta_2=4(3k_2^2-1)$，又 $l_1\perp l_2$，所以有 $k_1\cdot k_2=-1$.

于是，l_1，l_2 与双曲线各有两个交点.

7. 直接利用函数知识有一定难度，我们可以换个角度考虑问题.

令 $x-y=m$，则 m 具有几何意义，它是直线 $x-y-m=0$ 在 x 轴上的截距，于是原问

题转化为当点在椭圆$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$上变动时，求过这些点的斜率为1的平行直线在$x$轴上的最大和最小截距.

显然，当直线和椭圆相切时，截距取得最大值和最小值. 为此，求$x-y=m$与$x^2+2y^2=8$相切时的m值$(y+m)^2+2y^2=8$，$3y^2+2my+m^2-8=0$.

由判别式$\Delta=4m^2-12(m^2-8)=-8(m^2-12)=0$，得$m=\pm2\sqrt{3}$，则

$$f(x,y)_{\max}=2\sqrt{3},\quad f(x,y)_{\min}=-2\sqrt{3}$$

$$\begin{cases}3k_1^2-1>0\\3k_2^2-1>0\\k_1k_2=-1\\|k_1|\neq1\end{cases}$$

解得
$$k_1\in(-\sqrt{3},-1)\cup(-1,-\frac{\sqrt{3}}{3})\cup(\frac{\sqrt{3}}{3},1)\cup(1,\sqrt{3})$$

8. 设抛物线上两点(x_1,x_1^2)，(x_2,x_2^2)关于直线$y=m(x-3)$对称，于是有

$$\begin{cases}\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)=m[\frac{1}{2}(x_1+x_2)-3]\\\frac{x_1^2-x_2^2}{x_1-x_2}=\frac{1}{m}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1^2+x_2^2=m(x_1+x_2-6)\\x_1+x_2=-\frac{1}{m}\end{cases}$$

消去x_2得
$$2x_1^2+\frac{2}{m}x_1+\frac{1}{m^2}+6m+1=0$$

因为存在$x_1\in\mathbf{R}$使上式恒成立，所以

$$\Delta=(\frac{2}{m})^2-4\times2\times(\frac{1}{m^2}+6m+1)>0$$

即$(2m+1)\cdot(6m^2-2m+1)<0$恒成立，因为$6m^2-2m+1>0$恒成立，所以$2m+1<0$，所以$m<-\frac{1}{2}$，即当$m<-\frac{1}{2}$时，抛物线上存在两点关于直线$y=m(x-3)$对称. 所以当$m\geqslant-\frac{1}{2}$时，曲线$y=x^2$的所有弦都不能被直线$y=m(x-3)$垂直平分.

9. 先从简单情形开始考察.

当$n=1$时，满足条件的小方格为零个，是偶数；

当$n=2$时，若红色(蓝色)交点零个(除A,B,C,D外)满足条件的小方格为2个，是偶数；若红色(蓝色)交点改变1个时，满足条件的小方格为2个，是偶数；若红色(蓝色)交点再改变1个时，满足条件的小方格为0个或2个，是偶数，……

发现规律：除A,B,C,D外，改变一个交点颜色把以此点为顶点的小方格从满足条件变为不满足条件，或从不满足条件变为满足条件. 而除A,B,C,D外，每一个交点必是偶数个(2个或4个)小方格的顶点，每改变一个交点的颜色，便产生偶数次的"满足条件"与"不满足条件"的互化，所以不改变满足条件的小方格的奇偶性.

得出结论：通过若干次改变除A,B,C,D外的交点的颜色，最终可以使A,B,C,D以外的交点皆为同色，这时三顶点同色的小方格只有2个，为偶数. 而改变交点的染色不改变符合条件的小方格的奇偶性，所以，恰有三个顶点同色的小方格数目必是偶数.

第五章　数学思想的运用与领悟

当学习者脑中已掌握的数学知识、已学过的数学思想等被适时地激活后，其数学思维倾向活动将围绕着这些素材而展开，持续的观察、比较、分析和判断，大胆的尝试、联想、想象和猜想，使得认识由此及彼、由表及里地不断积累、不断深化，最终出现了对其本质认识有"豁然开朗"的感觉，我们把它称之为数学思想领悟.

数学思想领悟的实质是数学逻辑思维和数学直觉思维交互辩证运动的过程.由于数学思想的抽象性、系统性、深刻性等特点，因而，要注意到：对其领悟的过程是漫长的.在其领悟中要重视交流，重视数学思想的表达，重视数学思想的接受，重视数学思想载体的转换.

要提高数学思想的领悟能力，就要通过一些案例的学习与分析，阐述与交流来提高对数学思想体现的理解力，对数学思想渗透的感知力，对数学思想运用的辨析力.

例　甲乙两地相距 S 千米，汽车从甲地匀速行驶到达乙地，速度不得超过 C 千米/小时，已知汽车每小时的运输成本(以元为单位)由可变部分和固定部分组成，可变部分与速度 V(千米/小时)的平方成正比，且比例系数为 b，固定部分为 a 元.

(Ⅰ)把全程运输成本 y(元)表示为速度 V(千米/小时)的函数，并指出这个函数的定义域；

(Ⅱ)为了使全程运输成本最小，汽车应以多大速度行驶？

此例是一道高考试题，它有如下两种解法.

解法 1　(Ⅰ)依题意知，汽车从甲地匀速行驶到乙地所用时间为 $\frac{S}{V}$，全程运输成本为 $y=(a+bV^2)\frac{S}{V}=S(\frac{a}{V}+bV)$，故所求函数及其定义域为

$$y=S(\frac{a}{V}+bV),\quad V\in(0,C]$$

(Ⅱ)依题意知 S,a,b,V 都为正数，故有 $S(\frac{a}{V}+bV)\geqslant 2S\sqrt{ab}$，当且仅当 $\frac{a}{V}=bV$，即 $V=\sqrt{a/b}$ 时，上式等号成立；

若 $\sqrt{a/b}\leqslant C$，则当 $V=\sqrt{a/b}$ 时，全程运输成本 y 最小；

若 $\sqrt{a/b}>C$，当 $V\in(0,C]$ 时，有

$$S(\frac{a}{V}+bV)-S(\frac{a}{C}+bC)=S\left[(\frac{a}{V}-\frac{a}{C})+(bV-bC)\right]=S(c-V)(a-bCV)/VC$$

因 $C-V\geqslant 0$，且 $a>bC^2$，故有

$$a-bVC\geqslant a-bC^2>0$$

则 $S(\frac{a}{V}+bV)\geqslant S(\frac{a}{C}+bC)$，且仅当 $V=C$ 时等号成立，也即当 $V=C$ 时，全程运输成本 y 最小.

综上知，为使全程运输成本 y 最小，当 $\sqrt{ab}/b\leqslant C$ 时行驶速度应为 $V=\sqrt{ab}/b$；当

$\sqrt{ab}/b > C$ 时行驶速度应为 $V = C$.

解法 2 (Ⅰ)同解法 1.

(Ⅱ)因函数 $y = x + \frac{k}{x}$ ($k > 0$,图略),$x \in (0, +\infty)$,当 $x \in (0, \sqrt{k})$ 时,y 单调减少;当 $x \in (\sqrt{k}, +\infty)$ 时,y 单调增加;当 $x = \sqrt{k}$ 时,y 取得最小值,而全程运输成本函数为

$$y = Sb[V + (a/b)/V], \quad V \in (0, C]$$

从而若 $\sqrt{a/b} \leqslant C$ 时,则当 $V = \sqrt{a/b}$ 时,y 最小;若 $\sqrt{a/b} > C$ 时,则当 $V = C$ 时,y 最小. 结论同上.

此例中渗透了如下的一系列数学思想:[48]

(i)函数思想. 由已知的可变成本部分与速度之间的依赖关系,我们可以建立变量"全程运输成本 y"与变量"速度 V"之间的函数关系

$$y = (a + bV^2)\left(\frac{S}{V}\right) = S\left(bV + \frac{a}{V}\right), \quad V \in (0, C]$$

准确地把握此函数关系所提供的信息是解题的关键. 一般地,由 $bV + \frac{a}{V}$,则易联想到用基本不等式求函数的最值(如解法 1);若能认识到 y 是正比例函数与反比例函数的迭加,借助于函数图象和单调性来研究函数最值也是一个极好的方法(如解法 2). 值得指出的是,本题设计"速度不得超过 C"是绝妙的一笔,它不仅制约了全程运输成本函数的定义域,而且突出了函数最值的求解关口. 这也渗透了函数思想的本质.

(ii)分类讨论思想. 由于全程运输成本问题的一个明显特征是题中的常量均以字母给出,这是分类讨论的一个信号,它导致研究 $\sqrt{\frac{a}{b}}$ 与 C 的关系,即分两类:$\sqrt{\frac{a}{b}} \leqslant C$,$\sqrt{\frac{a}{b}} > C$ 来讨论 y 的最值.

(iii)模型思想. 面对"全程运输成本问题",我们通过阅读、理解所给定的材料,寻找全程运输成本与速度之间的内在联系:单位时间运输成本 = 可变成本 + 固定成本 = 速度的平方 × ($b + a$),全程运输成本 = 单位时间运输成本 × 全程所需时间. 这样抽象出事物系统的主要特征和关系,建立起相应地能反映其本质属性的数学结构,从而获得了一个模型. 通过分析此模型而得到了所求的结果.

(iv)化归思想. 利用基本不等式求函值是我们常采用的化归途径,由 $S\left(\frac{a}{V} + bV\right) \geqslant 2S\sqrt{ab}$,当且仅当 $a/V = bV$,即 $V = \sqrt{a/b}$ 时,上式等号成立,也可利用函数单调性或最值定义来化归求函数最值. 这种化归突出了化归思想的魅力 $y = f(V) = S\left(\frac{a}{V} + bV\right)$,对区间 $(0, C]$ 内的任意 V,若 $f(V) - f(C) \geqslant 0$ 恒成立,则 $f(C)$ 为 $f(V)$ 的最小值,且仅当 $V = C$ 时等号成立.

(v)数形结合思想. 利用函数图象研究函数性质这是应掌握的重要方法,由

$$f(V) = S\left(bV + \frac{a}{V}\right), \quad V \in (0, C]$$

的结构特点,联想 $f(x) = x + (k/x)$ 的图象,可借助于函数的单调性的讨论来确定函数的最值. 因此,这也提醒我们善于运用数形结合的思想.

(vi)最优化思想. 成本问题是企业经营管理的主要问题,以降低成本(以期达到最小成

本),而获得最大利润是企业提高经济效益的主要做法,这也是最优化思想的具体体现.

上例告诉我们:一个不太复杂的问题,只要我们深入地挖掘,就可看到数学思想的渗透是多方面的.也只有通过这样的挖掘,才有可能对数学思想真正地领悟.

下面,我们以知识内容划块为线索,介绍一些数学思想领悟与运用的案例,其中的一些例题是来自课本中或有关书本中的例题、习题或历年来的全国高考题.

5.1 集合问题

5.1.1 学习集合应注意的几个问题——符号化与变元表示思想的运用

集合是现代数学中最基本的内容之一,又是数学各科通用的数学语言.在中学数学中,集合知识贯穿于数学课程内容的各个部分.为了正确理解集合的有关概念及各个概念间的关系,并能准确地进行集合运算以及运用集合的语言(包括文字的、符号的、图形的)处理有关问题,我们应善于应用符号化与变元表示思想处理以下几个值得注意的问题.

(1)准确把握概念,注意集合元素的三特性

集合是一个用描述性语言给出的概念,集合的元素具有确定性、互异性和无序性.确定性是对某一集合来说,任一对象或者是该集合的元素,或者不是该集合的元素,二者必具其一.元素的特征必须明确而不含糊,如"身体较胖的学生的全体"就不能构成集合,因为"身体较胖"并不是一个明确标准,无法作出判断.不合乎集合元素的确定性特性.

互异性和无序性是指集合中的元素互不相同且没有顺序.例如集合 $A=\{0,x-y,|x|\}$,$B=\{y-x,x,xy\}$,若 $A=B$,求 x,y.显然,$x\neq0$,否则,不合乎集合元素的互异性特性,又根据元素的无序性,只可能是 $y=0$;由集合 B 知,x 可为正实数,但使得 A 不合乎集合元素的互异性,因而 x 只能为负实数.

由上述例子,根据集合元素的三大特性,可知对有限集 A、B,当 $A=B$ 时,A 与 B 中的元素全部相同.由此也推知,这两个集合的元素个数相等,元素之和相等,元素之积相等.

(2)分清两种关系,注意集合表示的等价性

一是元素与集合之间的关系:$\in$ 与 $\notin$;二是集合之间关系:$\subseteq$ 与 $\supseteq$,或 $\subsetneqq$ 与 $\supsetneqq$.

例 1 已知集合 $P=\{a,b\}$,$M=\{A|A\subseteq P\}$,则集合 P 与集合 M 的关系为( ).

(A)$P\in M$ (B)$P\notin M$ (C)$P\subsetneqq M$ (D)$P\supseteq M$

解 集合 M 中代表元特征为 $A\subseteq P$,即 M 是由所有集合 P 的子集构成的集合,构成集合 M 的元素仍是集合,由此知 $M=\{\varnothing,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$,故选(A).

从上述例题,使我们看到:当 M 等价地用列举法表示时,使我们很快找到了答案.否则,总以为集合与集合之间必须是 $\subseteq$ 与 $\supseteq$,或 $\subsetneqq$ 与 $\supsetneqq$ 的关系,就会产生错误,$\in$ 与 $\subseteq$ 具有完全不同的含义.对上例而言,可以说 $a\in P$,$\{a\}\subseteq P$,$\{a\}\in M$,而不能说 $\{a\}\subseteq M$,$P\subsetneqq M$ 等等.

例 2 已知集合 $A=\{x|x^2-9x+8=0\}$,$B=\{x|x^2-3ax+(3a-1)=0\}$.若 $A\cup B=A$,求实数 a 的值.

解 将集合的描述表示等价地转换成列举法表示,显然 $A=\{1,8\}$.

由 $x^2-3ax+3a-1=0$,有 $x_1=1$,$x_2=3a-1$,从而当 $x_1=x_2$ 时,$B=\{1\}$,显然 $B\subseteq A$,此时满足 $A\cup B=A$;

当 $x_1 \neq x_2$ 时，$B=\{1,3a-1\}$，此时要满足 $A\cup B=A$，须 $B\subsetneq A$，即 $3a-1=8$。

由 $1=3a-1$ 得 $a=\dfrac{2}{3}$；由 $8=3a-1$ 得 $a=3$。故所求实数 $a=\dfrac{2}{3}$ 或 3。

由上例可知，将集合的描述法转换成列举法，要注意其等价性，特别应注意集合中元素的个数。否则，由 $B=\{1,3a-1\}$，且 $A\cup B=A$，知 $B\subseteq A$，即有 $3a-1\in\{1,8\}$，根据集合元素的互异性，而求得 $a=3$。显然漏掉了 $a=\dfrac{2}{3}$。在此，对关系"$A\subseteq B$"应这样理解："$A\subsetneq B$"或"$A=B$"二者只存在其中一种情形，并非共存；反之，"$A\subsetneq B$"和"$A=B$"中任何一种情形存在，都可以记为"$A\subseteq B$"。

(3)进行集合运算，注意集合语言转译的准确性

集合问题中的语言有三种：文字语言、符号语言、图形语言(文恩图)。三种语言的表达方式不同，但它们对同一数学对象所描述的本质属性是一致的，因此，注意三种语言间的转译往往是寻求解题方法的关键所在。

例 3 设全集 $I=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},Y\in\mathbf{R}\}$，集合 $M=\{(x,y)\mid\dfrac{y-3}{x-2}=1\}$、$N=\{(x,y)\mid y\neq x+1\}$，那么 $C_I(M\cup N)$ 等于(　　)。

(A)$\varnothing$　　(B)$\{(2,3)\}$　　(C)$(2,3)$　　(D)$\{(x,y)\mid y=x+1\}$

解 将符号语言转译成文字语言，集合 M 是由直线 $y=x+1$ 除去点(2,3)后的点组成的，集合 N 是由坐标平面上不在直线 $y=x+1$ 上的点组成的，因此，$M\cup N$ 是由坐标平面上除去点(2,3)的点组成的，它关于坐标平面上的点组成的集合 I 的补集 $C_I(M\cup N)=\{(2,3)\}$。

5.1.2 集合的图形表示及应用——数形结合思想的运用

课本中指出：为了形象地表示集合，我们常常画一条封闭的曲线，用它的内部来表示一个集合。这个图形就是集合的一种表示法，在很多书刊中把它叫做韦恩图(Venn)或文恩图(简称文氏图)。这个图形的形状与集合的性质没有任何质的联系。它不是几何学中的图形，而仅仅是把集合中的元素都包围在封闭的曲线内(非该集合的元素不包括在内)的直观表示。因此，韦恩图与封闭曲线的形状无关，如可画成矩形、正方形、圆、椭圆乃至信手勾出任意的非规则封闭曲线。但考虑到数学美，因而通常画成矩形(或正方形)、圆、椭圆这几种图形。

由于文氏图表示集合具有形象、直观的特点，因此，它是处理集合问题的重要工具之一。它不仅能帮助我们深刻理解与记忆集合的概念、运算公式及相互关系，而且还能对一些数学问题进行合理、有效地分类与探求，从而获得便捷、简明的解题途径。

(1)帮助我们深刻理解与记忆集合的概念、运算公式

子集、补集、交集、并集用韦恩图表示，一目了然，明晰简单，如图 1 所示。

对于任意两个有限集合 A，B，有公式

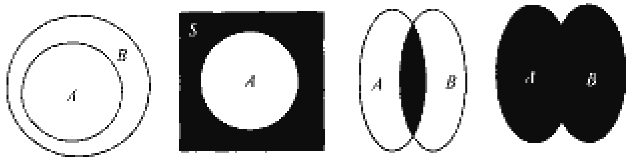
$$\mathrm{card}(A\cup B)=\mathrm{card}(A)+\mathrm{card}(B)-\mathrm{card}(A\cap B) \tag{5.1.1}$$

对于全集 U 及子集 A，B，有公式

$$C_U(A\cup B)=(C_UA)\cap(C_UB) \tag{5.1.2}$$

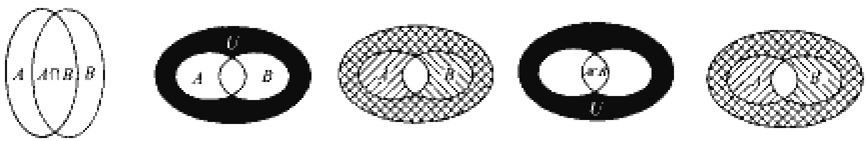
$$C_U(A\cap B)=(C_UA)\cup(C_UB) \tag{5.1.3}$$

这些公式用韦恩图表示，其意义清楚可见，如图 2 所示。



$A\subsetneqq B$ 或 $B\supsetneqq A$　　$C_S A$　　$A\cap B$ 或 $B\cap A$　　$A\cup B$ 或 $B\cup A$

图 1



公式(5.1.1)　　公式(5.1.2)　　公式(5.1.3)

图 2

(2)运用韦恩图求解数学问题

例 1　设全集 $I=\{0,1,2,3,4\}$,集合 $A=\{0,1,2,3\}$,集合 $B=\{2,3,4\}$,则$(C_IA)\cup(C_IB)=($　　$)$.

(A)$\{0\}$　　(B)$\{0,1\}$　　(C)$\{0,1,4\}$　　(D)$\{0,1,2,3,4\}$

解　作出韦恩图,如图 3,知 $C_IA=\{4\}$, $C_IB=\{0,1\}$,则$\{4\}\cup\{0,1\}=\{0,1,4\}$,故选(C).

例 2　已知 I 为全集,集合 $M,N\subsetneqq I$.若 $M\cap N=M$,则(　　).

(A)$(C_IM)\supseteq(C_IN)$　(B)$M\subseteq C_IN$　　(C)$(C_IM)\subsetneqq(C_IN)$　(D)$M\supsetneqq C_IN$

解　作出韦恩图,如图 4 所示.图中画横线的部分为 C_IN,画竖线的部分为 C_IM.故选(A).

例 3　如图 5,I 是全集,M、P、S 是 I 的 3 个子集,则阴影部分所表示的集合是(　　).

(A)$(M\cap P)\cap S$　　(B)$(M\cap P)\cup S$　　(C)$(M\cap P)\cup(C_IS)$(D)$(M\cap P)\cup(C_IS)$

解　设阴影部分为集合 Q,则 Q 由 $M\cap P$ 及 C_IS 的公共元素构成,所以 $Q=(M\cap P)\cap(C_IS)$.故选(C).

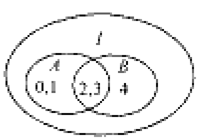


图 3

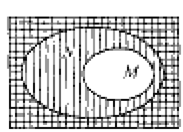


图 4

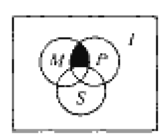


图 5

例 4　设 M,N,P 为任意集合,则 $M\supseteq N$ 是$(M\cap P)\supseteq(N\cap P)$的(　　).

(A)充分但不必要条件　　(B)必要但不充分条件

(C)充分且必要条件　　(D)既不充分也不必要条件

解　如图 6(a),画横线部分表示 $M\cap P$,画竖线部分表示 $N\cap P$,而$(M\cap P)\supseteq(N\cap P)$,于是有

$$M\supseteq N\Rightarrow(M\cap P)\supseteq(N\cap P)$$

反过来，如图 6(b)，画横线部分表示 $N\cap P$，画竖线部分表示 $M\cap P$，且有 $(M\cap P)\supseteq(N\cap P)$，但 $M\not\supseteq N$，即

$$(M\cap P)\supseteq(N\cap P)\nRightarrow M\supseteq N$$

故 $M\supseteq N$ 是 $(M\cap P)\supseteq(N\cap P)$ 的充分但不必要条件. 从而选(A).

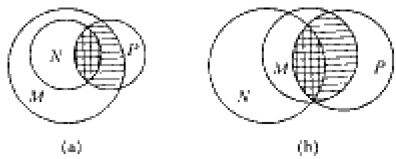


图 6

5.1.3 关注集合元素的特征——符号化与变元表示思想的运用

集合是数学中的一个重要概念. 集合语言是一种符号语言，这种语言就是运用符号化与变元表示思想来刻画某些指定的对象的一些属性.

(1)注意分清集合的代表元

代表元是决定一个集合的完全标志.

例 1 (Ⅰ)设集合 $A=\{y\mid y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{y\mid y=x+1,x\in\mathbf{R}\}$，则 $A\cap B=$ ________；

(Ⅱ)设集合 $A=\{(x,y)\mid y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{(x,y)\mid y=x+1,x\in\mathbf{R}\}$，则 $A\cap B=$ ________；

(Ⅲ)设集合 $A=\{y\mid y=x^2+1,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{(x,y)\mid y=x+1,x\in\mathbf{R}\}$，则 $A\cap B=$ ________.

解 (Ⅰ)集合 A,B 的代表元均为实数 y，且 y 分别为函数 $y=x^2+1$，$y=x+1$ 与 x 对应的函数值. 故 A,B 实际上分别是函数 $y=x^2+1$，$y=x+1$ 的值域，即 $A=\{y\mid y\geqslant1\}$，$B=\{y\mid y\in\mathbf{R}\}$. 这两个集合的交集就是这两个函数值域的公共部分，故 $A\cap B=\{y\mid y\geqslant1\}$.

(Ⅱ)A,B 的代表元均为点 (x,y)，且 (x,y) 分别为抛物线 $y=x^2+1$，直线 $y=x+1$ 上的点. 这两个集合的交集就是抛物线与直线的交点，故 $A\cap B=\{(0,1),(1,2)\}$.

(Ⅲ)A,B 的代表元不同，一个为实数 y，另一个为点 (x,y)，因而两者无任何相同的元素. 故 $A\cap B=\varnothing$.

(2)注意元素的确定性、互异性、无序性

集合中元素的确定性、互异性、无序性对确定集合有决定性的意义.

例 2 已知集合 $A=\{a,a+d,a+2d\}$，$B=\{aq^2,aq,a\}$，若 $A=B$，求常数 q 的值.

解 依集合元素的确定性、互异性、无序性可知，$a\neq0,d\neq0,q\neq0,q\neq\pm1$.

由 $A=B$，有(Ⅰ)$\begin{cases}a+d=aq\\a+2d=aq^2\end{cases}$或(Ⅱ)$\begin{cases}a+d=aq^2\\a+2d=aq\end{cases}$.

由(Ⅰ)得 $a+2a(q-1)=aq^2$. 由 $a\neq0$，则 $q^2-2q+1=0$. 解得 $q=1$(舍去).

由(Ⅱ)得 $a+2a(q^2-1)=aq$. 因 $a\neq0$，则 $2q^2-q-1=0$，解得 $q=-\frac{1}{2}$，或 $q=1$(舍

去).故 $q=-\frac{1}{2}$ 即为所求.

例 3 设集合 $A=\{a^2,a+1,-3\}$,$B=\{a-3,2a-1,a^2+1\}$.若 $A\cap B=\{-3\}$,求实数 a 的值.

解 因为 $A\cap B=\{-3\}$,所以 $-3\in B$.因 $a^2+1\geqslant 1$,则 $a-3=-3$,或 $2a-1=-3$,即 $a=0$,或 $a=-1$.

但当 $a=0$ 时,$A=\{0,1,-3\}$,$B=\{-3,-1,1\}$,$A\cap B=\{-3,1\}$,与题意不符.

当 $a=-1$ 时,经检验满足题意,故 $a=-1$ 即为所求.

(3)注意不含任何元素的集合 $\varnothing$ 的存在

空集是一个特殊的重要集合.它不含任何元素,是任何集合的子集,是任何非空集合的真子集.在解与集合相关的一类问题时,有些同学,常因忽视空集的存在而使解答发生错误.即忽视存在:$\varnothing\subseteq A$,$A\cap\varnothing=\varnothing$,$A\cup\varnothing=A$.因而,一般地,在 $B\subseteq A$ 的条件下,如果 $A\cap B=B$,$A\cup B=A$,此时要注意考虑 B 为空集的情形.

例 4 已知集合 $A=\{x\mid x^2-3x-10\leqslant 0\}$,$B=\{x\mid a+1\leqslant x\leqslant 2a-1\}$.若 $B\subseteq A$,求实数 a 的取值范围.

解 由 $x^2-3x-10\leqslant 0$,得 $-2\leqslant x\leqslant 5$,从而 $A=\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 5\}$.

当 $B\neq\varnothing$ 时,则 $a+1\leqslant 2a-1$,即 $a\geqslant 2$.于是,由

$$B\subseteq A\Leftrightarrow\begin{cases}a\geqslant 2\\ a+1\geqslant -2\Leftrightarrow 2\leqslant a\leqslant 3\\ 2a-1\leqslant 5\end{cases}$$

当 $B=\varnothing$ 时,则 $a+1>2a-1$,即 $a<2$,此时,仍有 $B\subseteq A$.

故 $a\leqslant 3$ 即为所求.

例 5 已知集合 $A=\{x\mid x^2+(a+2)x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$.若 $A\cap\mathbf{R}^+=\varnothing$,求实数 a 的取值范围.

解 $A\cap\mathbf{R}^+=\varnothing$ 等价于方程 $x^2+(a+2)x+1=0$ 没有实根(即 $A=\varnothing$)或者只有非正实根.

当 $A=\varnothing$,即方程 $x^2+(a+2)x+1=0$ 无实数根时,由 $\Delta=(a+2)^2-4<0$,解得 $-4<a<0$.

当方程 $x^2+(a+2)x+1=0$ 只有非正实数根时,由 $\begin{cases}\Delta=(a+2)^2-4\geqslant 0\\ -(a+2)\leqslant 0\end{cases}$,解得 $a\geqslant 0$.

故 $a>-4$ 即为所求.

5.1.4 重视空集的特殊性和重要作用——一分为二思想的运用

空集 $\varnothing$ 是一个特殊的、重要的集合,它不含任何元素,它是任何集合的子集,是任何非空集合的真子集.空集与任何集合的交集为空集,空集与任何集合的并集等于这个集合.显然,对于集合 A,B,若满足 $B\subseteq A$,且 $A=\varnothing$,则 $B=\varnothing$;若 $A\cup B=\varnothing$,则 $A=B=\varnothing$.由此可见,空集有着特殊的意义.在处理集合与集合的关系的问题中,我们要善于运用一分为二的思想方法,既要考虑集合为非空的情形,又要注意集合可能为空的情形,深刻理解空集的含义,重视空集的特殊性和重要作用,锤炼缜密、全面思考问题的数学素养与品质,以减少解

题的失误.

例1　已知集合 $A=\{x\mid x^2=1\}$，集合 $B=\{x\mid ax=1\}$，若 $B\subseteq A$，求实数 a 的所有可能的值.

解　因为 $A=\{-1,1\}$，且 $B\subseteq A$，则当 $B\neq\varnothing$ 时，$B=\{1\}$，或 $B=\{-1\}$，从而知 $a=1$，或 $a=-1$；若 $B=\varnothing$，那么 $a=0$. 所以实数 a 的所有可能的值为 $1,0,-1$.

例2　已知 $A=\{x\mid x^2+(p+2)x+1=0,x\in\mathbf{R}\}$，且 $A\cap\mathbf{R}^+=\varnothing$，求实数 p 的取值范围.

解　$A\cap\mathbf{R}^+=\varnothing$ 表明一元二次方程 $x^2+(p+2)x+1=0$ 无正根，则知此方程或有两个非正实根 x_1,x_2，或无实根.

若 $A\neq\varnothing$，由
$$\begin{cases}\Delta=(p+2)^2-4\geqslant 0\\ x_1+x_2=-(p+2)\leqslant 0\end{cases}$$
解得 $p\geqslant 0$.

若 $A=\varnothing$，由 $\Delta<0$，解得 $-4<p<0$.

综上所述，p 的取值范围是 $p>-4$.

例3　设 $A=\{x\mid x^2-ax+2=0,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid x^2-2ax+4a-3=0,x\in\mathbf{R}\}$，求使 $A\cup B=\varnothing$ 的实数 a 的取值集合.

解　由 $A\cup B=\varnothing$ 知 $A=B=\varnothing$，即二次方程 $x^2-ax+2=0$ 与 $x^2-2ax+4a-3=0$ 均无实数解，因而
$$\begin{cases}\Delta_1=a^2-8<0\\ \Delta_2=4a^2-4(4a-3)<0\end{cases}$$
解得 $1<a<2\sqrt{2}$，故所求实数 a 的取值集合为 $\{a\mid 1<a<2\sqrt{2}\}$.

例4　已知 $A=\{x\mid x^2-3x+2\leqslant 0\}$，$B=\{x\mid x^2-2ax+a+2\leqslant 0,a\in\mathbf{R}\}$，且满足 $A\cup B=A$. 求 a 的取值集合.

解　$A=\{x\mid 1\leqslant x\leqslant 2\}$. 由 $A\cup B=A$ 知 $B\subseteq A$.

若 $B\neq\varnothing$，则由 $\Delta=4a^2-4(a+2)\geqslant 0$，知 $a\leqslant -1$，或 $a\geqslant 2$，且
$$B=\{x\mid a-\sqrt{a^2-a-2}\leqslant x\leqslant a+\sqrt{a^2-a-2}\}$$
由 $B\subseteq A$，有
$$\begin{cases}a-\sqrt{a^2-a-2}\geqslant 1\\ a+\sqrt{a^2-a-2}\leqslant 2\end{cases}$$
即
$$\begin{cases}2\leqslant a\leqslant 3\\ 2\leqslant a\leqslant 2 \text{ 或 } a\leqslant -1\end{cases}$$
故 $a=2$.

若 $B=\varnothing$，则由 $\Delta=4a^2-4(a+2)<0$，可知当 $-1<a<2$ 时，仍有 $B\subseteq A$.

综上可得 a 的取值集合为 $\{a\mid -1<a\leqslant 2\}$.

5.1.5　反面求解——补集思想的运用

对于某些问题，如果从正面求解较困难或较繁，则可以考虑从问题的反面入手，采用"顺繁则逆"、"正难则反"的解题策略. 这就是将研究对象的全体视为全集，求出使问题反面成立的集合 A，A 的补集即为所求.

例1 求函数 $y=\frac{1}{x-1}$ 中自变量 x 的取值范围.

分析 直接求 x 的范围,是一个有无穷个实数的集合.在求解这类问题时,一般方法是运用补集思想,即先求出使函数表达式 $\frac{1}{x-1}$ 无意义的实数,然后再求 x 的取值范围.

显然 $x=1$ 是使 $\frac{1}{x-1}$ 无意义的实数,从而,所求 x 的取值范围是除 $x=1$ 外的所有实数,即 x 的取值范围为 $\{x\mid x<1,或\ x>1\}$.

例2 解不等式 $(x-5)\sqrt{x^2-4x-5}\geqslant 0$.

分析 如果从找等价的不等式组来考虑,应该这样来解:

由 $\begin{cases}x-5\geqslant 0\\ x^2-4x-5\geqslant 0\end{cases}$,有 $\begin{cases}x\geqslant 5\\ x\geqslant 5,或\ x\leqslant -1\end{cases}$,故 $x\geqslant 5$ 即为所求.

显然,当 $x=-1$ 时,原不等式也成立.

为什么会漏掉 $x=-1$ 这个解呢?究其原因是忽视了原不等式中的"$\geqslant$"号具有不等和相等的双重性.如果运用补集思想来求解,则可免除这个麻烦.

解 $(x-5)\sqrt{x^2-4x-5}<0$ 等价于不等式组

$$\begin{cases}x-5<0\\ x^2-4x-5>0\end{cases}$$

解得 $x<-1$.

对于实数集,其补集为 $\{x\mid x\geqslant -1\}$.而对于不等式 $(x-5)\sqrt{x^2-4x-5}\geqslant 0$,其补集为 $\begin{cases}x^2-4x-5\geqslant 0\\ x\geqslant -1\end{cases}$,故原不等式的解集为 $\{x\mid x=-1,或\ x\geqslant 5\}$.

例3 若 $x^2+4ax-4a+3=0$,$x^2+(a-1)x+a^2=0$,$x^2+2ax-2a=0$.三个方程中,至少有一个方程有实数解,求实数 a 的取值范围.

分析 满足题设要求的三种情况分别是:一个方程有实根;两个方程有实根;三个方程有实根.而前两种情况又各有三种可能,所以情况较为繁杂.运用补集思想,可找到捷径.

解 设三个方程都无实数解,则

$$\begin{cases}\Delta_1=(4a)^2+4(4a-3)<0\\ \Delta_2=(a-1)^2-4a^2<0\\ \Delta_3=(2a)^2+4\times 2a<0\end{cases}\Rightarrow -\frac{3}{2}<a<-1$$

从而,满足题意的实数 a 的取值范围为

$$\{a\mid a\geqslant -1\ 或\ a\leqslant -\frac{3}{2}\}$$

例4 已知集合 $A=\{x\in\mathbf{R}\mid x^2-4ax+2a+6=0\}$,若 $A\cap\mathbf{R}^-\neq\varnothing$,求实数 a 的取值范围.

分析 集合 A 是方程 $x^2-4ax+2a+6=0(*)$ 的实数根组成的集合,$A\cap\mathbf{R}^-\neq\varnothing$ 意味着方程$(*)$的根有下列三种情况:(1)两个负根;(2)一个负根,一个零根;(3)一个负根,一个正根三种情况,分别求解比较麻烦.上述三种情况虽可概括为方程$(*)$较小的根 <0,即

$$\frac{4a-\sqrt{(-4a)^2-4(2a+6)}}{2}<0$$

但求解此不等式也并不轻松.如果考虑 $A\cap\mathbf{R}^-\neq\varnothing$ 的反面,即 $A\cap\mathbf{R}^-=\varnothing$,则可先求出方程(*)的两根均非负时 a 的取值范围,然后运用补集思想求解 $A\cap\mathbf{R}^-\neq\varnothing$ 时 a 的取值范围.

解 设全集

$$U=\{a\mid\Delta=16a^2-8a-24\geqslant0\}=\{a\mid a\leqslant1\text{ 或 }a\geqslant\frac{3}{2}\}$$

方程 $x^2-4ax+2a+6=0$ 的两根均非负等价于

$$\begin{cases}a\in U\\4a\geqslant0\\2a+6\geqslant0\end{cases}\Leftrightarrow a\geqslant\frac{3}{2}$$

则 $A\cap\mathbf{R}^-=\varnothing$ 时,实数 a 的取值范围为 $\{a\mid a\geqslant\frac{3}{2}\}$.故 $A\cap\mathbf{R}^-\neq\varnothing$ 时,实数 a 的取值范围为 $\{a\mid a\geqslant\frac{3}{2}\}$ 关于 U 的补集,即 $\{a\mid a\leqslant-1\}$.

例5 如图7,已知半圆的直径为 AB,$AC\perp AB$,且 $AC=\frac{1}{2}AB$,$BD\perp AB$,且 $BD=\frac{3}{2}AB$.设 P 为半圆圆周上的任意一点,求封闭图形 $ABDPC$ 面积的最大值.

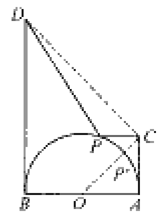


图7

解 联结 CD.要求封闭图形 $ABDPC$ 面积的最大值,只需求出三角形 PCD 面积的最小值即可.又 CD 为定值,联结 OC,交半圆于点 P',则 P' 是半圆上所有点中到 CD 的距离最短的点(这是因为 $\angle ACD=135°$,$\angle ACO=\angle AOC=45°$,则 $\angle OCD=90°$,$OC\perp CD$).

设半圆的半径为 R,则 $AC=R$,$BD=3R$.可求得

$$CD=2\sqrt{2}R,\quad P'C=OC-OP'=(\sqrt{2}-1)R$$

则

$$S_{\triangle P'CD}=(2-\sqrt{2})R^2,\quad S_{\text{梯形}ABDC}=4R^2$$

故封闭图形 $ABDPC$ 面积的最大值为

$$4R^2-(2-\sqrt{2})R^2=(2+\sqrt{2})R^2$$

最后,我们顺便指出,用反证法证题也是补集思想的体现.

5.2 简易逻辑与推理问题

5.2.1 逻辑联结词与真假命题的集合语言表示——结构思想的运用

课本在介绍"或"与"且"这两个逻辑联结词时,列举了两个不等式解集的例子.这也就告诉我们:在讨论集合问题时,涉及到逻辑联结词"或"时,它相当于集合语言中的"并"运算.例如,不等式 $x^2-x-6>0$ 的解集是 $\{x\mid x<-2,\text{或 }x>3\}=\{x\mid x<-2\}\cup\{x\mid x>3\}$.涉及到逻辑联结词"且"时,它相当于集合语言中的"交"运算.例如,不等式 $x^2-x-6<0$ 的解集是

$$\{x\mid-2<x<3\}=\{x\mid x>-2\}\cap\{x\mid x<3\}$$

"非"这个逻辑联结词,是否定的意思,表示某命题的反面,在讨论集合问题中,也可以相

当于集合语言中的补集运算.例如,不等式 $x^2-x-6>0$ 的非解集是其解集 $\{x\mid x<-2,或 x>3\}$ 的补集 $\{x\mid -2\leqslant x\leqslant 3\}$,其中全集是实数集.

运用这种集合运算结构关系可以帮助我们准确地把握"或"、"且"、"非"的概念,看清它们在复合命题中的意义,培养我们进行简单推理的技能.

例如,在处理有关不等式问题时,常遇到符号"$\geqslant$",而符号"$\geqslant$"是由"$>$"与"$=$"复合而成,因此,我们亦可将"$\geqslant$"分解成"$>$或$=$".由此可知,解不等式 $f(x)\geqslant 0$ 可以转化为求不等式 $f(x)>0$ 和方程 $f(x)=0$ 的解集的并集;也可以转化求 $f(x)<0$ 的解集的补集.

例 1 解不等式 $(x-5)\sqrt{x^2-4x-5}\geqslant 0$.

解 原不等式可以转化为解

$$(x-5)\sqrt{x^2-4x-5}>0,或\quad (x-5)\sqrt{x^2-4x-5}=0$$

即 $\begin{cases}x-5>0\\x^2-4x-5>0\end{cases}$,或 $\begin{cases}x-5=0\\x^2-4x-5\geqslant 0\end{cases}$,或 $x^2-4x-5=0$.解之得,$x>5$,或 $x=5$,或 $x=-1$.故原不等式的解集为 $\{x\mid x\geqslant 5,或 x=-1\}$.

例 2 求不等式 $\frac{x}{x-1}\geqslant 0$ 的非解集.

解 若认为其非解集是不等式 $\frac{x}{x-1}<0$ 的解集,那就错了,其非解集是 $\frac{x}{x-1}<0$ 的解集和 $x-1=0$ 的解集的并集,即不等式 $\frac{x}{x-1}\geqslant 0$ 的解集 $\{x\mid x>1,或 x\leqslant 0\}$ 的补集 $\{x\mid 0<x<1\}\cup\{x\mid x=1\}=\{x\mid 0<x\leqslant 1\}$.

真、假命题也可以用集合符号来表示.假命题可看成是不存在这样的对象,如果用集合符号来表示,则为空集 $\varnothing$.如 $\{x\in\mathbf{R}\mid x^2+1=0\}=\varnothing$.真命题可看成是存在这样的对象,而这样的对象又可以构成一个集合 A,则这样的集合 A 便是一个非空集合.在这里,"非"是对空集的否定.

如果用非空集合表示真命题,空集表示假命题,课本中列出的三种复合命题的真假可以运用集合语言表示如下:

非 p 形式复合命题的真假表示:

p	非 p
真	假
假	真

$\Leftrightarrow$

p	非 p
A	$\varnothing$
$\varnothing$	A

p 且 q 形式复合命题的真假表示:

p	q	p 且 q
真	真	真
真	假	假
假	真	假
假	假	假

$\Leftrightarrow$

p	q	p 且 q
A	A	$A\cap A=A$
A	$\varnothing$	$A\cap\varnothing=\varnothing$
$\varnothing$	A	$\varnothing\cap A=\varnothing$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing\cap\varnothing=\varnothing$

p 或 q 形式复合命题的真假表示:

p	q	p 或 q
真	真	真
真	假	真
假	真	真
假	假	假

$\Leftrightarrow$

p	q	p 或 q
A	A	$A\cup A=A$
A	$\varnothing$	$A\cup\varnothing=A$
$\varnothing$	A	$\varnothing\cup A=A$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing\cup\varnothing=\varnothing$

结合上述二表，我们可以得到下表：

p	q	p 且 q	非(p 且 q)	p 或 q	非(p 或 q)
A	A	A	$\varnothing$	A	$\varnothing$
A	$\varnothing$	$\varnothing$	A	A	$\varnothing$
$\varnothing$	A	$\varnothing$	A	A	$\varnothing$
$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$	A	$\varnothing$	A

下面我们运用上表来求解两个问题.

例 3　如果命题"p 或 q"是真命题，"非 p"是假命题，那么(　　).

(A)命题 p 一定是假命题　　(B)命题 q 一定是假命题

(C)命题 q 一定是真命题　　(D)命题 q 可以是真命题也可以是假命题

解　若 p 是 $\varnothing$，则 p 一定是 A. 又 p 或 q 是 A，所以 p，q 中至少有一个是 A. 而 p 是 A，所以 q 可以是 A 也可以是 $\varnothing$. 因此选(D).

例 4　若 p，q 是两个简单命题，且"p 或 q"的否定或非(p 或 q)是真命题，则必有(　　).

(A)p 真且 q 真　　(B)p 假且 q 假　　(C)p 真且 q 假　　(D)p 假且 q 真

解　由于非(p 或 q)是 A，则 p，q 都是 $\varnothing$，因此选(B).

5.2.2　用集合观点处理充要条件问题——集合思想的运用

"充要条件"是一个重要的数学概念，也是中学数学教学中的一个难点. 教材中要求学生直接利用"充分条件"、"必要条件"和"充要条件"的定义来推断条件与结论之间的关系. 这类问题，如果只简单地用"箭头图"，容易使判断失误. 由于条件(或结论)是判断事物具有某种属性的语句，它往往可以对应于由能够准确地刻画出这种属性的所有元素组成的集合.

假设条件甲和结论乙分别对应于集合 A 和 B(它们包含于同一个全集). 如果 $A\subseteq B$，那么对任一个 $a\in A$，都是 $a\in B$，即对于任何一个满足条件甲的元素，它也一定满足结论乙，可见甲是乙的充分条件；反过来，如果甲是乙的充分条件，那么有甲就必有乙，这样，对任一个 $a\in A$，由于 a 满足条件甲，因而它也一定满足结论乙，故 $a\in B$，可见 $A\subseteq B$.

以上说明，当满足条件甲的对象集合为 A，满足条件 B 的对象的集合为 B 时：

如果 $A\subseteq B$，则 A 为 B 的充分条件. 特别地，如果 $A\subset B$，则称 A 为 B 的充分不必要条件.

如果 $B\subseteq A$，则 A 为 B 的必要条件. 特别地，如果 $B\subset A$，则称 A 为 B 的必要不充分条件.

如果 $A\subseteq B$,且 $B\subseteq A$,即 $A=B$ 时,则称 A 为 B 的充要条件.

如果以上三种关系均不成立,即 A,B 之间无包含或相等关系,则 A 既不是 B 的充分条件也不是 B 的必要条件,即 A 是 B 的既不充分又不必要条件.

例 1 "x 是 6 的倍数"是"x 是 2 的倍数"的什么条件?

解 "x 是 6 的倍数"对应于集合 $p=\{\cdots,-12,-6,0,6,12,\cdots\}$,"$x$ 是 2 的倍数"对应于集合 $Q=\{\cdots,-12,-10,-8,-6,-4,-2,0,2,4,6,8,10,12,\cdots\}$. 可见,$P\subsetneqq Q$,故"$x$ 是 6 的倍数"是"x 是 2 的倍数"的充分而不必要条件.

例 2 "x 是 4 的倍数"是"x 是 6 的倍数"的什么条件?

解 "x 是 4 的倍数"对应于集合 $p=\{\cdots,-12,-8,-4,0,4,8,12,\cdots\}$,"$x$ 是 6 的倍数"对应于集合 $Q=\{\cdots,-12,-6,0,6,12,\cdots\}$. 可见 P,Q 之间互为不包含关系,故"x 是 4 的倍数"是"x 是 6 的倍数"的既不充分也不必要条件.

例 3 如果 A 是 B 的必要不充分条件,B 是 C 的充要条件,D 是 C 的充分不必要条件,那么 D 是 A 的(　　)条件.

(A)充分不必要　　(B)必要不充分　　(C)充要　　(D)既不充分也不必要

解 分别用集合 A,B,C,D 表示命题 A,B,C,D 所指对象的集合,依题意有 $A\supset B=C\supset D$,所以 $A\supset D$,故选(A).

例 4 已知 p 是 r 的充分条件,而 r 是 q 的必要条件,同时又是 s 的充分条件,q 是 s 的必要条件,试判断:(1)s 是 p 的什么条件?(2)p 是 q 的什么条件?(3)其中哪几对条件互为充要条件?

解 分别用集合 P,R,S,Q 表示命题 p,r,s,q 所指对象的集合,依题意有 $P\subseteq R\subseteq S\subseteq Q$ 且 $Q\subseteq R$,即有 $P\subseteq R=Q=S$.

故 s 是 p 的必要条件,p 是 q 的充分条件,有互为充要条件三对:r 和 q,q 和 s,r 和 s.

5.2.3 对数学归纳法的深入理解——递归思想的运用

通过把一般性问题逐步归结为同类的已知的特殊问题,或从已知初始条件出发利用"递推关系"而推得一般结论的思想方法,我们称之为递归思想方法. 这里的"递归"是一种具有确定方向和一定程序的变换,因而递归思想隶属于对应思想.

数学归纳法是一种证明与自然数 n 有关的数学命题的重要方法. 数学归纳法的核心是递推,而递推思想是递归思想的主要组成部分,因此,我们应运用递归思想来深入理解数学归纳法.

数学归纳法证题由三部分组成:归纳奠基、归纳递推(推理)、归纳断言,这三部分在证题中处在同样重要的地位,缺少其中任何一部分都将导致错误. 一般说来,归纳奠基是验证性的工作,即对具体的自然数 $n=N_0$,验证命题成立,N_0 的取值应根据命题的结构特征确定. 有了原命题在 $n=N_0$ 的特殊情况下的正确性,就有了进一步递推的基础. 大多数情况下,归纳推理比归纳奠基复杂,它是在假设命题当 $n=k$(或 $n\leqslant k$)成立的前提下推出 $n=k+1$ 时命题也成立. 在这里,证明了关于 n 的一系列命题中,若前一个命题正确,那么它的后一个命题也正确,使递推得以实现,构成递推的根据. 因此,必须注意命题在 $n=k$ 与 $k+1$ 时形式的转换与统一. 这两部分是一个统一的整体,有奠基无递推只是孤立地证明了命题在特殊

情况下的正确性;无奠基有递推则缺少递推的基础也无法进行递推.综上,这两部分使递推成为可能.而第三部分则运用前两部分完成数学归纳法中递推的全过程.所以,缺少第三部分,可以说递推实际上并未开始.由上,三步缺一不可.

在完成归纳奠基的证明时,N_0 的选择,一方面要使命题有意义,另一方面要便于归纳推理的顺利完成.一般地,如果命题是求证对任意自然数成立,则可取 $N=0$(新教材规定 0 是第一个自然数);如果命题是给出了使其成立的自然数范围,则可取这个范围中的最小自然数为 N_0;如果命题未给出自然数的范围,则应先根据题意确定 N_0.

例 1　用数学归纳法证明凸多边形的对角线的条数为 $f(n)=\frac{1}{2}n(n-3)(n\geqslant 3)$.

这里使此命题有意义的自然数 $n\geqslant 3$,题中也给出了范围,因此应选择 $N_0=3$ 验证.

例 2　用数学归纳法证明:$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2+2(a_1a_2+a_1a_3+\cdots+a_{n-1}a_n)$.

这里,题目未给出 n 的范围,应根据题意确定,注意到下标 $n-1\geqslant 1$,因此应选择 $N_0=2$ 验证.

另外,在完成证明不等式的归纳奠基时,有"$\leqslant$"或"$\geqslant$"只需验证一个值.例如证明 $\frac{1}{2}(a^n+b^n)\geqslant(\frac{a+b}{2})^n$,只需验证 $n=1$,不必验证 $n=2$.

关于归纳推理的证明,我们可以概括为"用假设,证同形",即在作出假设 $n=k$ 命题成立的前提下,以它为基础,运用各种推理手段,推出在 $n=k+1$ 时命题具有同样的形式.所谓相同的形式,对于代数命题就是将含有的变量 $k+1$ 替换成 k 时应该就是所作的假设形式;对于几何命题就是将 $k+1$ 时的几何元素或几何特征(数量等)替代成 k 时便是所作的假设情形.这种相同形式的设别是进行归纳推理的前提.

例 3　用数学归纳法证明:$(n^2-1)+2(n^2-2^2)+\cdots+n(n^2-n^2)=\frac{1}{4}n^2(n^2-1)$.

如果在完成归纳推理的证明时,这样写:

假设 $n=k(k\geqslant 1)$时等式成立,即

$$(k^2-1)+2(k^2-2^2)+\cdots+k(k^2-k^2)=\frac{1}{4}k^2(k^2-1)$$

则当 $n=k+1$ 时

$$\begin{aligned}\text{左边}=&[(k+1)^2-1]+2[(k+1)^2-2^2]+\cdots+(k+1)[(k+1)^2-(k+1)^2]=\\&[1+2+\cdots+(k+1)]\cdot(k+1)^2-[1^3+2^3+\cdots+(k+1)^3]=\\&\frac{1}{2}(k+1)[1+(k+1)](k+1)^2-\frac{1}{4}(k+1)^2[(k+1)+1]^2=\\&\frac{1}{4}(k+1)^2[(k+1)-1][(k+1)+1]=\\&\frac{1}{4}(k+1)^2[(k+1)^2-1]\end{aligned}$$

如上证明,虽然推导时应用求和公式并无错误,但与数学归纳法证题要以假设 $n=k$ 时命题为前提相违背.没有利用这个前提,就不是运用数学归纳法证题.

5.3 函数问题

5.3.1 映射、函数等概念的正确把握——特殊与一般转换思想的运用

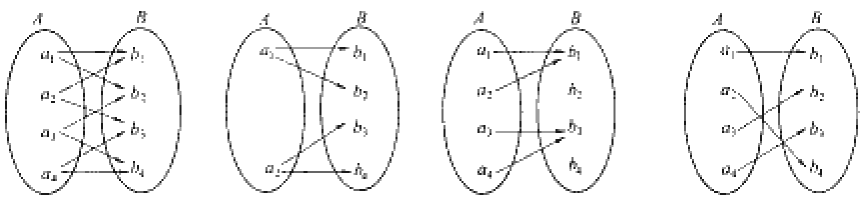
从一般到特殊,从特殊到一般,这是我们认识数学对象的一种重要思想方法.

(1)对应关系中的特殊对应关系

我们小时候,常常用自己的手指或石子与实物对应起来,进行计数.对应可将各种类别、各种层次的对象联系起来,呈现出人的思维对两个集合间联系的把握.

对应关系的表示,可以用箭头"→",可以用一句话如"开平方"等,可以用一个式子如"$y=2x+1$",也可以用表格,…….因此"→"是我们常用的一种特殊的对应表示.

对应关系有多对多、多对一、一对多、一对一四种,如图8所示.



多对多　　一对多　　多对一　　一对一

图8

在图8中,显然,后两种情形是一类特殊的对应关系:对于左边集合 A 中的任何一个元素,在右边集合 B 中都有唯一的元素和它对应.即均是对一的对应关系.

(2)集合 A 到集合 B 的映射与集合 A 到集合 B 上的映射

从集合 A 到集合 B 的映射 $f:A\to B$,可理解为"原像都有像,原像的像唯一."所以,"一对一","多对一"都是映射的必要条件.

例1 单项选择题:在映射 $f:A\to B$ 中,下列说法中正确的是(　　).

(A)集合 B 是集合 A 中所有元素的像集合

(B)集合 B 中每一个元素至少与集合 A 中的一个元素相对应

(C)集合 B 中可能有元素不是集合 A 中的元素的像

(D)集合 A 中可能有元素在集合 B 中无像

解 由映射的定义可知,"集合 A 中的任何一个元素,在集合 B 中都有唯一的元素和它对应",显然(D)不成立.但定义并未要求"集合 B 中每一个元素都是集合 A 中元素的像",因此(A)、(B)也应排除,(C)是正确的,故应选(C).

注 若集合 B 中每一个元素在集合 A 中都有原像,则称映射 $f:A\to B$ 是集合 A 到集合 B 上的映射;若集合 B 中至少有一个元素不是集合 A 中元素的像,则称映射 $f:A\to B$ 是集合 A 到集合 B 内的映射.这两种映射都是集合 A 到集合 B 的映射中的特殊映射.例如上图中的后两种情形是 A 到 B 的映射,但只有最后一种情形是 A 到 B 上的映射.

(3)映射与一一映射

一一映射是一种特殊的映射.从集合 A 到集合 B 上的一一映射,可理解为"原像都有像,原像像唯一,原像异则像异,每像有原像."这说明一一映射不仅是一种 A 到 B 的映射,还是一种 A 到 B 上的映射,即在映射 $f:A\to B$ 中,像的集合 $C\neq B$ 时的映射不是一一映射,或者说,$C=B$ 是一一映射的必要条件.另外,从 A 到 B 上的一一映射的反应对应可称为从 B 到 A 上的映射(或 A 到 B 上的映射的逆映射).

例 2 已知 $A=\{正整数\}$,$B=\{正奇数\}$,映射 $f:A\to B$,使 A 中的任一元素 a 与 B 中元素 $b=2a-1$ 相对应.试问:此时是否存在 B 到 A 的映射?

解 由于集合 A 中的任一元素 a,在集合 B 中都有唯一的元素 $b=2a-1$ 与 a 对应;又若 $a_1\neq a_2$,则 $b_1=2a_1-1\neq 2a_2-1=b_2$,且每一个 b,都有唯一的 $a=\dfrac{b+1}{2}$对应,因而所给映射 $f:A\to B$ 是一一映射.故它的反向对应可称为从 B 到 A 上的映射.即存在 B 到 A 的映射.

(4)映射与函数

确定映射与函数均有三个要素,它们分别是原像集、像集、对应关系与定义域、值域、对应法则.函数只讨论非空数集到非空数集上的对应规律,映射则更具广泛性,函数是一类特殊的映射.

例 3 下列从集合 M 到集合 N 的各对应关系 $f_i(i=1,2,3)$ 中,哪些是映射?哪些是函数?

(Ⅰ)$M=\{直线\ Ax+By+C=0\}$,$N=\mathbf{R}$,f_1:直线 $Ax+By+C=0$ 的斜率;

(Ⅱ)$M=\{直线\ Ax+By+C=0\}$,$N=\{\alpha|0\leqslant\alpha<180^\circ\}$,$f_2$:直线 $Ax+By+C=0$ 的倾斜角;

(Ⅲ)$M=N=C_u\mathbf{R}^-$,f_3:M 中每个元素的算术平方根.

解 (Ⅰ)当 $B=0$ 时,直线 $Ax+C=0$ 的斜率不存在,此时 N 中不存在与之对应的元素,故 f_1 不是从 M 到 N 的映射,也就不是函数了.

(Ⅱ)对于 M 中的任一元素 $Ax+By+C=0$,该直线恒有唯一确定的倾斜解 α,且 $\alpha\in[0,180^\circ]$,故 f_2 是从 M 到 N 的映射.但由于 M 不是数集,所以 f_2 不是从 M 到 N 的函数.

(Ⅲ)对于 M 中的任一非负实数,其算术平方根唯一确定,故 f_3 是从 M 到 N 的映射.又 M,N 均为非空数集,所以 f_3 是从 M 到 N 的函数.

5.3.2 函数的单调区间及单调性的应用——模型思想的运用

数学知识模中的一类重要模型,就是概念型模型.函数的单调性是一个重要的概念型模型.设函数 $f(x)$的定义域为 I,如果对于属于定义域 I 内某个区间上的任意两个自变量的值 x_1,x_2,当 $x_1<x_2$ 时,都有 $f(x_1)<f(x_2)$(或 $f(x_1)>f(x_2)$),那么就说 $f(x)$在这个区间上是增(或减)函数.如果函数 $f(x)$在某个区间是增函数或减函数,那么就说函数 $f(x)$在这一区间具有(严格的)单调性,这一区间叫做 $f(x)$的单调区间.

(1)单调区间及单调区间的分界点

例 1 求函数 $f(x)=x^3-3x$ 的单调区间.

分析 由题设知 $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$.设 $x_1<x_2$,则

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1^3-3x_1-x_2^3+3x_2=(x_1-x_2)(x_1^2+x_1x_2+x_2^2-3)$$

由于 $x_1<x_2$，所以 $x_1-x_2<0$，以下必须且只需讨论 $x_1^2+x_1x_2+x_2^2-3$ 的符号.

由函数单调性模型知，x_1 与 x_2 应当同时属于某一单调区间才便于判断，于是我们只需令 $x_1=x_2=x$ 并代入 $x_1^2+x_1x_2+x_2^2-3=0$ 中就能到 $x=\pm1$ 为其单调区间分界点.

当 $x_1,x_2\in(-\infty,-1)$ 或 $x_1,x_2\in(1,+\infty)$ 时，$x_1^2+x_1x_2+x_2^2-3>0$，从而 $f(x_1)<f(x_2)$，而当 $x_1,x_2\in(-1,1)$ 时，$x_1^2+x_1x_2+x_2^2-3<0$，从而 $f(x_1)>f(x_2)$.

于是，$f(x)=x^3-3x$ 的单调递减区间为 $(-1,1)$，而单调递增区间有两个：$(-\infty,-1)$ 和 $(1,+\infty)$.

注　(i)在这里，介绍了在定义域内如何求单调区间的分界点的方法. 例如，求函数 $f(x)=x^2+\dfrac{2}{x}$ 的单调区间时，定义域是 $x\neq0$ 的实数，令 $x_1<x_2$，由

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1^2+\frac{2}{x_1}-x_2^2-\frac{2}{x_2}=(x_1-x_2)(x_1+x_2-\frac{2}{x_1x_2})$$

令 $x_1=x_2=x$，有 $x+x-\dfrac{2}{x^2}=0$，而 $x\neq0$ 得 $x=1$ 为其单调区间的分界点. 由此可求得在区间 $(-\infty,0)$ 与 $(0,1)$ 上函数单调递减，在区间 $(1,+\infty)$ 上函数单调递增.

(ii)在定义域内求得的区间分界点可以是单调区间的闭端点，如例 1 中的单调减区域可写成闭区间 $[-1,1]$.

(iii)$f(x)=x^3-3x$ 的单调递增区间不能说成或写成 $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

(2)函数单调性的应用

例 2　设 $f(x)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的增函数，且 $f(\dfrac{x}{y})=f(x)-f(y)$，$f(3)=1$，解不等式 $f(x)-f(\dfrac{1}{x-3})>2$.

解　由条件得 $f(x)-f(\dfrac{1}{x-3})=f(x^2-3x)$，又由已知式，令 $x=9$，$y=3$，得 $f(3)=f(9)-f(3)$，则 $f(9)=2f(3)=2$.

于是，题设原不等式为 $f(x^2-3x)>f(9)$，由于 $f(x)$ 是定义在 $(0,+\infty)$ 上的增函数，则 $x^2-3x>9$，且 $x>0$，$x^2-3x>0$，$\dfrac{1}{x-3}>0$.

由上求得 $x>\dfrac{1}{2}(3+3\sqrt{5})$. 此即为所求的不等式的解.

例 3　设函数 $f(x)=x+\dfrac{a}{x+1}$，$x\in[0+\infty)$，$a\in\mathbf{R}$. 求出函数 $f(x)$ 的最小值.

解　设 $0\leqslant x_1<x_2$，则

$$f(x_1)-f(x_2)=x_1+\frac{a}{x_1+1}-x_2-\frac{a}{x_2+1}=(x_1-x_2)+\frac{a(x_2-x_1)}{(x_1+1)(x_2+1)}=$$

$$(x_1-x_2)[1-\frac{a}{(x_1+1)(x_2+1)}] \qquad (*)$$

由 $1-\dfrac{a}{(x+1)^2}=0$，求得 $x=\sqrt{a}-1$，由 $x>0$，知 $a>1$. 此时，$f(x)$ 在区间 $[0,\sqrt{a}-1]$ 上为减函数，在 $(\sqrt{a}-1,+\infty)$ 是增函数.

故 $f(x)_{最小}=f(\sqrt{a}-1)=2\sqrt{a}-1$. 当 $a\leqslant1$ 时，又 $x\geqslant0$，由 $(*)$ 式知 $f(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上是增函数，此时，

$$f(x)_{最小}=f(0)=a$$

5.3.3 指数函数、对数函数的单调性及应用——类分思想的运用

指数函数和对数函数都是单调函数，都不具有奇偶性．指数函数 $y=a^x$ 和对数函数$y=\log_a x$（$a>0$ 且 $a\neq 1$）互为反函数，它们有共同的底数 a，其变化规律是：当 $a>1$ 时，它们在各自的定义域内都是增函数；当 $0<a<1$ 时，它们在各自的定义域内都是减函数．底数范围的不同导致其增减性发生变化是这两类函数的主要特征．

学习数学，重要的在于探索，分类讨论是探索的一种重要手段．在处理指数函数、对数函数的有关问题时，要有意识地运用分类讨论思想方法，以便加深对这两类函数的认识．

(1)注意底数类分

例1 当 $a>1$ 时，在同一坐标系中，函数 $y=a^{-x}$与$y=\log_a x$ 的图象是(　　)．

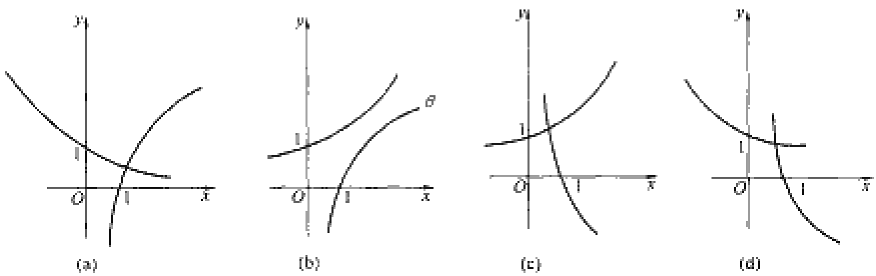


图9

解 因 $a>1$，则 $0<\frac{1}{a}<1$．从而，指数函数 $y=a^{-x}$即 $y=(\frac{1}{a})^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是减函数，对数函数 $y=\log_a x$ 在 $(0,+\infty)$ 上是增函数．故选(A)．

例2 函数 $f(x)=a^x(a>0,a\neq 1)$在$[1,2]$中的最大值比最小值大$\frac{a}{2}$，求 a 的值．

解 当 $a>1$ 时，指数函数 $f(x)=a^x$ 在$[1,2]$上是增函数，则 $f(2)-f(1)=a^2-a=\frac{a}{2}$，得 $a=\frac{3}{2}$．

当 $0<a<1$ 时，指数函数 $f(x)=a^x$ 在$[1,2]$上是减函数，从而 $f(1)-f(2)=a-a^2=\frac{a}{2}$，得 $a=\frac{1}{2}$．

综上得 $a=\frac{1}{2}$ 或 $a=\frac{3}{2}$．

例3 讨论函数 $f(x)=\log_{2a-1}(a^{x-1}-1)$（$a>\frac{1}{2}$且 $a\neq 1$）的增减性．

解 由 $a^{x-1}-1>0$，得 $a^{x-1}>1$，从而当 $a>1$ 时，$x-1>0$，即 $x>1$；当$\frac{1}{2}<a<1$ 时，$x-1<0$，即 $x<1$．

故函数的定义域为：当 $a>1$ 时，$x>1$；当$\frac{1}{2}<a<1$ 时，$x<1$．

当 $a>1$ 时，$u=a^{x-1}-1(x>1)$ 为增函数，从而 $\log_{2a-1}(a^{x-1}-1)$ 是增函数；当 $\frac{1}{2}<a<1$ 时，$u=a^{x-1}-1(x<1)$ 为减函数，从而 $\log_{2a-1}(a^{x-1}-1)$ 是增函数.

综上，$f(x)=\log_{2a-1}(a^{x-1}-1)$ 在其定义域内是增函数.

(2)注意变量 x 取特殊值 1 或 y 取特殊值 1 的讨论

例 4 图 10 中有四个指数函数的图象，试判定 a_1,a_2,a_3,a_4 的大小关系.

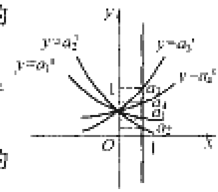


图 10

解 在图中作直线 $x=1$ 分别与曲线 $y=a_1^x,y=a_2^x,y=a_3^x,y=a_4^x$ 相交，由图中交点的纵坐标知 $0<a_2<a_1<1<a_4<a_3$.

例 5 图 11 中有四个对数函数的图象，试判定 b_1,b_2,b_3,b_4 的大小关系.

解 在图中作直线 $y=1$ 分别与四曲线 $y=\log_{b_1}x$，$y=\log_{b_2}x$，$y=\log_{b_3}x$，$y=\log_{b_4}x$ 相交，由图中交点的横坐标知

$$0<b_3<b_4<1<b_1<b_2$$

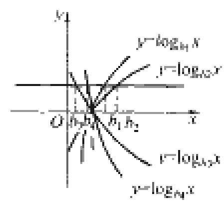


图 11

例 6 若 $\log_a 2<\log_b 2<0$，则(　　).

(A)$0<a<b<1$　　　(B)$0<b<a<1$

(C)$a>b>1$　　　(D)$b>a>1$

解 作满足 $\log_a 2<\log_b 2<0$ 的两个对数函数 $y=\log_a x$ 和 $y=\log_b x$ 的简图如图 12 所示，再作直线 $y=1$ 与两曲线相交，从图中交点的横坐标知 $0<b<a<1$，从而选(B).

5.3.4 幂函数、指数函数、对数函数的参变量漫谈——运动变化思想的运用

参变量在解析式中发挥着极为重要的作用. 幂函数、指数函数、对数函数一般表达式均含有参变量(参量). 在探索幂函数、指数函数、对数函数的性质时，运用运动变化的思想方法处理其中的参变量，将会使我们更深刻地认识这些函数的性质.

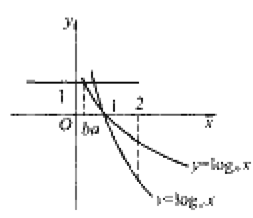


图 12

(1)幂函数 $y=x^\alpha$ 中的有理数参量 $\alpha(\alpha\neq 0)$

当 $\alpha=0(x\neq 0)$ 时，函数 $y=x^\alpha$ 为常数函数 $y=1(x\neq 0)$，其图象是平行于 x 轴的一条直线(除去点(0,1)). 因而参量 $\alpha=0$ 是幂函数的一个分界量.

当 $\alpha>0$ 时，幂函数 $y=x^\alpha$ 的图象都通过点(0,0)，(1,1)；在第一象限内，函数值随 x 的增大而增大，即为单调递增函数. 此时 $\alpha=1$ 又是一个分界量. 当 $\alpha>1$，$x>1$ 时，函数图象向下凸，α 越大，其图象越靠近 y 轴；当 $0<\alpha<1$ 时，函数图象向上凸，α 越小，其图象越靠近 x 轴.

当 $\alpha<0$ 时，幂函数 $y=x^\alpha$ 的图象都通过点(1,1)；在第一象限内，函数值随 x 的增大而减小，即为单调递减函数，函数图象向上与 y 轴无限地接近，向右与 x 轴无限地接近. 此时 $\alpha=-1$ 也是一个分界量. 当 $\alpha<-1$，$x<1$ 时，函数图象在曲线 $y=x^{-1}$ 的右边，α 越小，其图象越远离曲线 $y=x^{-1}$；当 $\alpha<-1$，$x>1$ 时，函数图象在曲线 $y=x^{-1}$ 的下方，α 越小，其图象越靠近 x 轴. 当 $-1<\alpha<0$，$x<1$ 时，函数图象在曲线 $y=x^{-1}$ 的左边，α 越大，其图象越靠近

y 轴；当 $-1<\alpha<0$，$x>1$ 时，函数图象在曲线 $y=x^{-1}$ 的上方，α 越大，其图象越远离曲线 $y=x^{-1}$.

上面仅就幂函数的图象在第一象限内随参量 α 的变化情况，谈了谈图象的变化趋势．在其他象限内的变化情况可根据幂函数的奇偶性来讨论．

(2)指数函数 $y=a^x$ 中的参量 a($a>0$ 且 $a\neq1$)

由于 $a>0$，保证了 $y=a^x>0$，其图象只能在 x 轴上方．

当 $a=1$ 时，函数 $y=a^x$ 为常数函数 $y=1$，其图象是平行于 x 轴的一条直线．因而参量 $a=1$ 对于指数函数是一个重要分界量．

当 $a>1$ 时，指数函数 $y=a^x$ 的图象通过点(0,1)，向下凸，它是单调递增函数．a 越大，在点(0,1)上方，函数图象在 y 轴的右边，且越靠近 y 轴；在点(0,1)下方，函数图象在 y 轴的左边，且越靠近 x 轴．

当 $0<a<1$ 时，指数函数 $y=a^x$ 的图象通过点(0,1)，向下凸，它是单调递减函数．a 越小，在点(0,1)上方，函数图象在 y 轴的左边，且越靠近 y 轴；在点(0,1)下方，函数图象在 y 轴的右边，且越靠近 x 轴．

例 1　比较 $\left(\frac{8}{7}\right)^{-\frac{7}{6}}$ 和 $\left(\frac{9}{8}\right)^{-\frac{6}{7}}$ 的大小．

解　注意到中间媒介量 $\left(\frac{8}{7}\right)^{-\frac{6}{7}}$，并考虑到指数函数 $y_1=\left(\frac{8}{7}\right)^x$ 是递增的，幂函数 $y_2=x^{-\frac{6}{7}}$ 是递减的，可知

$$\left(\frac{8}{7}\right)^{-\frac{7}{6}}<\left(\frac{8}{7}\right)^{-\frac{6}{7}},\left(\frac{9}{8}\right)^{-\frac{6}{7}}>\left(\frac{8}{7}\right)^{-\frac{6}{7}}$$

故

$$\left(\frac{8}{7}\right)^{-\frac{7}{6}}<\left(\frac{9}{8}\right)^{-\frac{6}{7}}$$

(3)对数函数 $y=\log_a x$($x>0$)中的参量 a($a>0$ 且 $a\neq1$)

由于对数函数 $y=\log_a x$($x>0$)是指数函数 $y=a^x$ 的反函数，因而有 $a>0$．对于 $a\neq1$ 而言，可从两方面谈这个问题：首先，对数函数是作为指数函数的反函数引入的，但在 $a=1$ 时，确定指数函数的对应不是单值对应，当然不是一一对应，所以当 $a=1$ 时，指数函数 $y=a^x$ 不存在反函数，因而作为反函数的对数函数也就无从谈起了；另一方面，作为一个函数，其定义域必须是非空的．然而，假若我们选取数 1 作对数函数的底数，则其定义域便会成为空集，无论自变量取任何异于 1 的正数，都没有函数值与之对应．当自变量 $x=1$ 时，对应的函数值也不确定．因而对数函数中的参量 $a\neq1$．又由于 $x>0$，所以对数函数的图象在 y 轴右边．

当 $a>1$ 时，对数函数 $y=\log_a x$($x>0$)的图象通过点(1,0)，向上凸，它是单调递增函数，a 越大，在点(1,0)上方，函数图象越靠近 x 轴；在点(1,0)下方，函数图象越靠近 y 轴．

当 $0<a<1$ 时，对数函数 $y=\log_a x$($x>0$)的图象通过点(1,0)，向下凸，它是单调递减函数．a 越小，在点(1,0)下方，函数图象越靠近 x 轴；在点(1,0)上方，函数图象越靠近 y 轴．

例 2　设 $0<a<b<1$，则下列各式正确的是(　　)．

(A) $\log_b a>\log_a b>\log_{\frac{1}{a}} b>\log_{\frac{1}{b}} a$　　(B) $\log_{\frac{1}{b}} a>\log_{\frac{1}{a}} b>\log_b a>\log_a b$

(C) $\log_b a>\log_{\frac{1}{b}} a>\log_a b>\log_{\frac{1}{a}} b$　　(D) $\log_a b>\log_b a>\log_{\frac{1}{a}} b>\log_{\frac{1}{b}} a$

解　在同一直角坐标系中分别作出四个函数 $\log_a x$、$\log_{\frac{1}{a}} x$、$\log_b x$、$\log_{\frac{1}{b}} x$ 的图象，注意到

$\log_a x$ 与 $\log_{\frac{1}{a}} x$ 的图象、$\log_b x$ 与 $\log_{\frac{1}{b}} x$ 的图象均关于 x 轴对称，且在点(1,0)的右下方，$\log_a x$ 的图象在 $\log_b x$ 的图象上方，而在点(1,0)的左上方，$\log_b x$ 的图象在 $\log_a x$ 的图象上方. 于是分别在点(a,0)与(b,0)处作垂直于 x 轴的直线，分别与 $\log_a x$，$\log_{\frac{1}{a}} x$，$\log_b x$，$\log_{\frac{1}{b}} x$ 的图象相交，得到纵坐标分别为 $\log_a b$，$\log_{\frac{1}{a}} b$，$\log_b a$，$\log_{\frac{1}{b}} a$ 的四点 M，N，P，Q，比较这些垂线段(这些点到垂足的线段)的长度并考虑其正负，可知应选(A).

5.3.5 从反函数的定义谈起——对应思想的运用

对应是人的思维对两个集合之间的联系的把握，对应将各种类别、各种层次的对象联系起来，呈现出它们之间的各种各样的属性，使得各种数学对象能够相互结合、相互转化和深入. 在一种特殊的对应问题中，我们来研究函数的反函数：一般地，式子 $y=f(x)$ 表示 y 是自变量 x 的函数，设它的定义域为 A，值域为 C. 我们从 $y=f(x)$ 中解出 x，得到 $x=\varphi(y)$. 如果对于 y 在 C 中的任何一个值，通过 $x=\varphi(y)$，x 在 A 中都有唯一确定的值和它对应，那么，$x=\varphi(y)$ 就表示 x 是自变量 y 的函数. 这样的函数 $x=\varphi(y)(y\in C)$ 叫做 $y=f(x)(x\in A)$ 的反函数，记作 $x=f^{-1}(y)$. 习惯上，我们将其改写成 $y=f^{-1}(x)$.

根据以上反函数的定义，我们可揭示，推导出反函数的几条特殊性质：

(i)一个函数有反函数时，确定这个函数的对应是一一对应. 这说明反函数并不就是反解 $y=f(x)$ 后所得到的用 y 表示 x 的式子. 例如，反解函数 $y=x^2$ 得到的 $x=\sqrt{y}$ 并不是 $y=x^2$ 的反函数.

由于确定函数的对应是一一对应，于是有

$$f[f^{-1}(x)]=x \quad 或 \quad f^{-1}[f(x)]=x$$

例 1 若函数 $y=f(x)$ 的反函数是 $y=g(x)$，$f(a)=b$，$ab\neq 0$，则 $g(b)=$(　　).

(A) a　　(B) a^{-1}　　(C) b　　(D) b^{-1}

解 因为 $f^{-1}[f(x)]=x$，$f^{-1}(x)=g(x)$，$f^{-1}[f(a)]=a$，所以 $g(b)=a$. 故选(A).

(ii)一个函数有反函数时，若函数 $y=f(x)$ 的定义域为 A，值域为 C，则它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的定义域是 C，值域是 A.

例 2 函数 $y=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ 的反函数的定义域是______.

解 因为反函数的定义域就是原函数的值域，由 $y=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ 得 $e^x=\dfrac{-y-1}{y-1}=-\dfrac{y+1}{y-1}>0$，所以 $y\in(-1,1)$ 是原函数的值域，也就是反函数的定义域. 故应填 $(-1,1)$.

例 3 已知函数 $f(x)=\dfrac{3}{x-a}+b$ 和 $g(x)=1+\dfrac{c}{3x+1}$ 互为反函数，求实数 a,b,c.

解 由基本性质(ii)，因 $g(x)$ 的定义域为 $x\neq -\dfrac{1}{3}$，$f(x)$ 的值域 $f(x)\neq b$，从而 $b=-\dfrac{1}{3}$. 又因 $g(x)$ 的值域 $g(x)\neq 1$，$f(x)$ 的定义域是 $x\neq a$，从而 $a=1$. 于是 $f(x)=\dfrac{3}{x-1}-\dfrac{1}{3}$，令 $x=10$，得 $f(10)=0$，从而 $g(0)=10$，即 $10=1+\dfrac{c}{3\times 0+1}$，故 $c=9$.

(iii)确定严格单调函数的对应是一一对应，因而严格单调函数 $y=f(x)$ 必有反函数，且反函数与原函数有相同的单调性；严格单调奇函数有反函数，且反函数也是奇函数.

例 4 函数 $y=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ 的反函数(　　).

(A)是奇函数,它在 $(0,+\infty)$ 上是减函数　(B)是偶函数,它在 $(0,+\infty)$ 上是减函数

(C)是奇函数,它在 $(0,+\infty)$ 上是增函数　(D)是偶函数,它在 $(0,+\infty)$ 上是增函数

解 由于 $f(x)=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})(x\in\mathbf{R})$ 是增函数,且又是奇函数,从而它的反函数也是奇函数,且与 $f(x)$ 有相同的单调性.故选(C).

例 5 已知函数 $f(x)=x^2-2x+3$,求:

(Ⅰ)它的单调区间;

(Ⅱ)它在每个单调区间上的反函数;

(Ⅲ)它在 $[-2,1]$ 上的反函数;

(Ⅳ)它在 $[2,5]$ 上的反函数.

解 注意到当一个函数在某个区间上是严格单调函数时,才有反函数.在求反函数时,不但要求出原函数的定义域,而且要求出它的值域,利用反函数与原函数的定义域、值域互换而得出反函数的定义域.

(Ⅰ)由 $f(x)=x^2-2x+3=(x-1)^2+2$,从而知 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(-\infty,1]$;单调递增区间是 $[1,+\infty)$.

(Ⅱ)当 $x\in(-\infty,1]$ 时,$y=f(x)\in[2,+\infty)$.由 $y=(x-1)^2+2$,得 $(x-1)^2=y-2$.

因为 $x-1\leqslant 0$,从而 $x-1=-\sqrt{y-2}$.将 x,y 互换,得

$$y=1-\sqrt{x-2},\quad x\in[2,+\infty)$$

故 $y=x^2-2x+3,x\in(-\infty,1]$ 的反函数为

$$y=1-\sqrt{x-2},\quad x\in[2,+\infty)$$

当 $x\in[1,+\infty)$ 时,$y=f(x)\in[2,+\infty)$.由 $y=(x-1)^2+2$,且 $x-1\geqslant 0$,得 $x-1=\sqrt{y-2}$.故 $y=x^2-2x+3,x\in[1,+\infty)$ 的反函数为

$$y=1+\sqrt{x-2},\quad x\in[2,+\infty)$$

(Ⅲ)当 $x\in[-2,1]$ 时,$y=f(x)\in[2,11]$.故 $y=x^2-2x+3,x\in[-2,1]$ 的反函数为

$$y=1-\sqrt{x-2},\quad x\in[2,11]$$

(Ⅳ)当 $x\in[2,5]$ 时,$y=f(x)\in[3,18]$.故 $y=x^2-2x+3,x\in[2,5]$ 的反函数为

$$y=1+\sqrt{x-2},\quad x\in[3,18]$$

(Ⅴ)函数 $y=f(x)$ 的图象和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象有如下特点:

①互为反函数的两个函数的图象是全等形.

②函数 $y=f(x)$ 与函数 $x=f^{-1}(y)$ 虽互为反函数,但是在同一坐标系内,它们的图象却是重合的.

③在同一坐标系中,$y=f(x)$ 的图象与 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称.因此,必须是在同一坐标系中,互为反函数的两个函数,只有当它们形如 $y=f(x)$ 与 $y=f^{-1}(x)$ 时,它们的图象才关于直线 $y=x$ 对称.

④关于直线 $y=x$ 对称的两个图形所代表的函数不一定互为反函数.如 $y=-x$ 与 $x=-y$,虽图象关于 $y=x$ 对称,却是同一函数.

⑤函数 $y=f(x)$ 的图象与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象如果有公共点,则这些公共点或

在直线 $y=x$ 上，或关于直线 $y=x$ 对称地成对出现. 如反比例函数 $y=\frac{1}{x}$ 与其反函数 $y=\frac{1}{x}$ 的图象完全重合，除两点外，其他点都不在直线 $y=x$ 上.

⑥若函数 $y=f(x)$ 是单调增函数，则其图象与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象的公共点必在直线 $y=x$ 上.

(Ⅵ)若函数 $y=f(x)(x\in A)$ 是非奇非偶函数，且存在反函数，则它的反函数 $y=f^{-1}(x)(x\in C)$ 也是非奇非偶函数. 若偶函数的定义域为 $\{0\}$，则存在反函数.

例 6 给定实数 $a(a\neq 0$，且 $a\neq 1)$，设函数 $y=\frac{x-1}{ax-1}\left(x\in\mathbf{R}\text{ 且 }x\neq\frac{1}{a}\right)$. 证明该函数的图象关于直线 $y=x$ 成轴对称图形.

证明 先求出所给函数的反函数. 由 $y=\frac{x-1}{ax-1}\left(x\in\mathbf{R}\text{ 且 }x\neq\frac{1}{a}\right)$，得

$$(ay-1)x=y-1 \qquad (*)$$

若 $ay-1=0$，则 $y=\frac{1}{a}$，将其代入所给函数式，得 $\frac{1}{a}=\frac{x-1}{ax-1}$，即 $ax-1=ax-a$，得 $a=1$，与已知 $a\neq 1$ 矛盾，从而知 $ay-1\neq 0$.

于是将式$(*)$两边同除以 $ay-1$，得 $x=\frac{y-1}{ay-1}\left(y\neq\frac{1}{a}\right)$，故 $y=\frac{x-1}{ax-1}\left(x\in\mathbf{R}\text{ 且 }x\neq\frac{1}{a}\right)$ 的反函数为

$$y=\frac{x-1}{ax-1}\left(x\in\mathbf{R}\text{ 且 }x\neq\frac{1}{a}\right)$$

即 $f(x)=f^{-1}(x)$. 因为函数 $y=f(x)$ 的图象和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称，所以 $y=\frac{x-1}{ax-1}\left(x\in\mathbf{R}\text{ 且 }x\neq\frac{1}{a}\right)$ 的图象关于直线 $y=x$ 成轴对称图形.

5.3.6 函数奇偶性的判定与应用——符号化变元表示思想的运用

对于奇、偶函数，不要只是形式上记住有 $f(-x)=-f(x)$，$f(-x)=f(x)$，还要注意到：一是定义域的对称性；二是函数值的对称性. 正是这两个对称性，构成了点 (x,y) 的对称性，从而显示了图象的对称性. 函数 $f(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow$ 曲线 $y=f(x)$ 关于原点对称；函数 $f(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow$ 曲线 $y=f(x)$ 关于 y 轴对称. 用符号与变元表示有关对象的关系，具有简洁、明确的优点，增大了信息密度和思维容量. 这是我们研究函数奇偶性的一种重要思想方法.

(1)函数奇偶性的判定

由奇偶函数的定义可知，x 属于定义域，$-x$ 也属于定义域，因此函数的定义域关于原点对称，函数才具有奇偶性. 若函数的定义域不关于原点对称，则函数不具有奇偶性，这时可判断为既不是奇函数，也不是偶函数. 如 $y=x^2$，$x\in[-1,1)$ 就不是偶函数. 因为 $-1\in[-1,1]$，$1\notin[-1,1)$. 在观察 $f(-x)$ 是否等于 $f(x)$ 或 $-f(x)$ 时，不能只看表面形式上的异同，要考虑 $f(-x)$ 进行恒等变形后的结果. 如判定 $f(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{|x+2|-2}$ 的奇偶性，因为它的定义域 $[-1,0)\cup(0,1]$ 是关于原点对称的，化简得 $f(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$，故 $f(-x)=-f(x)$，所以它是奇函数. 又如函数 $f(x)=\begin{cases}1-|x+1| & (x\leqslant 0)\\ x & (x>0)\end{cases}$，尽管 $|x|\leqslant -1$ 时，有 $f(-x)=f(x)$，

但$|x|>1$时，$f(-x)=f(x)$不成立，这个函数是非奇非偶函数.

因此，函数奇偶性的判定首先是利用定义，以及利用定义的等价命题

$$f(-x)+f(x)=0,\quad f(-x)-f(x)=0$$

或$f(x)\neq 0$时

$$f(-x)=\pm f(x)\Leftrightarrow\frac{f(-x)}{f(x)}=\pm 1$$

其次还可以利用图象的对称性，也可以利用奇(偶)函数的基本性质：函数$f(x)$，$g(x)$的定义域，分别是D_1，D_2：①它们都是奇函数，那么在$D_1\cap D_2$上，$f(x)+g(x)$是奇函数，$f(x)\cdot g(x)$是偶函数；②它们都是偶函数，那么在$D_1\cap D_2$上，$f(x)+g(x)$是偶函数，$f(x)\cdot g(x)$是偶函数；③一个为奇函数，另一个为偶函数时，在$D_1\cap D_2$上，$f(x)\cdot g(x)$是奇函数.

例1　证明下列命题：

(Ⅰ)一次函数$y=kx+b(k\neq 0)$是奇函数的充要条件是$b=0$；

(Ⅱ)二次函数$y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$是偶函数的充要条件是$b=0$；

(Ⅲ)函数$y=f(x)$既是奇函数又是偶函数的充要条件是$f(x)=0$(定义域关于原点对称).

证明　(Ⅰ)$f(x)=kx+b(k\neq 0)$是奇函数$\Leftrightarrow f(-x)=-f(x)\Leftrightarrow -kx+b=-(kx+b)\Leftrightarrow b=0$.

注　如上证明可以说是从“数”的方面分析，也可以从“形”的方面分析：一次函数$y=kx+b(k\neq 0)$是过点$(0,b)$的直线，当且仅当$b=0$时，它通过原点，此时直线关于原点对称，函数是奇函数.

(Ⅱ)$g(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$是偶函数$\Leftrightarrow g(-x)=g(x)\Leftrightarrow ax^2-bx+c=ax^2+bx+c\Leftrightarrow -bx=bx(x\in R)\Leftrightarrow b=0$.

注　也可从“形”的方面分析：二次函数的图形是抛物线，抛物线$y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$的对称轴是$x=-\frac{b}{2a}$. 当且仅当$b=0$时，抛物线的对称轴是$x=0$(即y轴)，此时，函数$y=ax^2+c(a\neq 0)$的图象关于y轴对称，函数是偶函数.

(Ⅲ)$f(x)$既是奇函数又是偶函数$\Leftrightarrow\begin{cases}f(-x)=-f(x)\\f(-x)=f(x)\end{cases}\Leftrightarrow -f(x)=f(x)\Leftrightarrow f(x)=0$(定义域关于原点对称).

例2　设函数$f(x)$，$g(x)$是定义在$(-\infty,+\infty)$上的两个函数，对于任意实数x，y满足关系式

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)\cdot g(y)$$

若$f(0)=0$，但$f(x)$不恒为0，讨论$f(x)$，$g(x)$的奇偶性.

解　对任意的$y\in\mathbf{R}$，将$x=0$代入已知关系式中，有$f(y)+f(-y)=0$. 故$f(x)$为奇函数. 令$y=x$，由已知关系式，有$f(2x)+f(0)=2f(x)\cdot g(x)$，即

$$f(2x)=2f(x)\cdot g(x)\qquad ①$$

又令$y=-x$，由已知关系式，有

$$f(2x)=2f(x)\cdot g(-x)\qquad ②$$

注意到 $f(x)$ 不恒为 0，① ÷ ② 得 $\frac{g(x)}{g(-x)}=1$，故 $g(x)$ 为偶函数.

由奇、偶函数的定义我们还可以知道，对于定义域关于原点对称的函数，若对于任何 $x\neq 0$，满足

$$\begin{cases} f(-x)=-f(x) \\ f(-x)=f(x) \end{cases}, \quad 即\ f(x)=0$$

则 $f(x)=0(x\neq 0$，且定义域关于原点对称) 即是奇函数，又是偶函数.

例 3 已知 $f(x)$ 的定义域为 $x\neq 0$ 的一切实数，且满足

$$f(x)+2f(\frac{1}{x})=0 \qquad ①$$

判断函数 $f(x)$ 的奇偶性.

解 在所给关系式中，以 $\frac{1}{x}$ 代换 x，得

$$f(\frac{1}{x})+2f(x)=0 \qquad ②$$

解由①式与②式联立的方程组，得 $f(x)=0(x\neq 0)$，故函数 $f(x)$ 既是奇函数，又是偶函数.

(2) 函数奇偶性的应用

例 4 已知 $f(x)=ax^7+bx^5+cx^3+dx+1(a\neq 0)$，且 $f(5)=7$，求 $f(-5)$ 的值.

解 设 $g(x)=ax^7+bx^5+cx^3+dx(a\neq 0)$，由 $g(-x)=-g(x)$ 知 $g(x)$ 为奇函数，即 $g(x)=f(x)-1$ 为奇函数，从而

$$g(-5)=f(-5)-1=-g(5)=-[f(5)-1]$$

故
$$f(-5)=-[f(5)-1]+1=-f(5)+2=-5$$

例 5 解方程 $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{2x+3}+3x+4=0$.

解 设 $x+1=t$，则由 $x\in\mathbf{R}$ 知 $t\in\mathbf{R}$，且原方程变形为 $\sqrt[3]{t}+\sqrt[3]{2t+1}+3t+1=0$.

考虑函数 $f(t)=\sqrt[3]{t}+t(t\in\mathbf{R})$，则由 $f(-t)=-f(t)$ 知 $f(t)$ 为奇函数，且知 $f(t)$ 在 $\mathbf{R}$ 上递增. 方程又可变形为 $f(t)+f(2t+1)=0$. 由 $f(t)$ 为奇函数，有 $f(2t+1)=-f(t)=f(-t)$.

由 $f(t)$ 递增，有 $2t+1=-t$，故 $t=-\frac{1}{3}$. 从而 $x=t-1=-\frac{4}{3}$. 经检验 $x=-\frac{4}{3}$ 为所求.

例 6 已知 $f(x)$ 是定义在 $(-1,1)$ 上的偶函数，且在 $[0,1)$ 上是增函数，若 $f(a-2)-f(4-a^2)<0$，试求 a 的取值范围.

解 首先注意：若 $f(x)$ 是偶函数，则有 $f(x)=f(|x|)$. 由题设 $f(a-2)<f(4-a^2)$，即有 $f(|a-2|)<f(|4-a^2|)$.

其次注意到 $f(x)$ 在 $[0,1)$ 上是增函数，则

$$\begin{cases} |a-2|<|4-a^2| \\ -1<a-2<1 \\ -1<4-a^2<1 \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} (a-2)^2<(4-a^2)^2 \\ \sqrt{3}<a<\sqrt{5} \end{cases}$$

解得 $\sqrt{3}<a<\sqrt{5}$，且 $a\neq 2$. 故 a 的取值范围是 $(\sqrt{3},2)\cup(2,\sqrt{5})$.

例 7 证明函数 $f(x)=x(\frac{1}{2^x-1}+\frac{1}{2})$ 的值恒正.

证明 由于 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，且

$$f(-x)=-x\left(\frac{1}{2^{-x}-1}+\frac{1}{2}\right)=\frac{x(2^x+1)}{2(2^x-1)}=f(x)$$

知 $f(x)$ 为偶函数，又当 $x>0$ 时，$2^x>1$，从而 $f(x)>0$. 当 $x<0$ 时，有 $-x>0$，即有 $f(x)=f(-x)>0$. 故当 $x\neq0$ 时，总有 $f(x)>0$.

5.3.7 关于对称问题的求解——对称思想的运用

数学中的对称概念、现象等俯首即是，对称也是函数图象的重要性质. 课本中，在介绍了函数的奇偶性后分别指出奇、偶函数的图象关于原点对称和关于 y 轴对称；在介绍了反函数的概念后指出了有反函数的函数 $y=f(x)$ 的图象和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图象关于直线 $y=x$ 对称. 这是三类最基本的函数图象对称. 我们运用对称思想方法不仅可以处理这些基本的对称问题，还可以处理与此相关联或拓广的对称问题.

(1)函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称

将偶函数的图象关于 y 轴(即 $x=0$)对称拓广，有下面的结论：

结论 1 函数 $y=f(x)$ 满足 $f(a+x)=f(a-x)$ 的充要条件是 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称.

例 1 设函数 $y=f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，若当 $x\leqslant1$ 时，$y=x^2+1$，求 $x>1$ 时 y 的解析式.

解 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=1$ 对称，所以 $f(1+x)=f(1-x)$，即 $f(x)=f(2-x)$. 当 $x>1$ 时，$2-x<1$，因为 $x\leqslant1$ 时，$y=x^2+1$，所以 $x>1$ 时

$$f(x)=f(2-x)=(2-x)^2+1=x^2-4x+5$$

(2)函数 $y=f(x)$ 的图象关于某点 (a,b) 成中心对称

将奇函数的图象关于原点(即 $(0,0)$)对称拓广，有下面的结论：

结论 2 函数 $y=f(x)$ 满足 $f(a+x)-b=b-f(a-x)$ 的充要条件是 $y=f(x)$ 的图象关于点 (a,b) 成中心对称.

结论 3 函数 $y=f(x)$ 满足 $F(x)=f(x+a)-f(a)$ 为奇函数的充要条件是 $y=f(x)$ 的图象关于点 $(a,f(a))$ 成中心对称.（注：若 a 不属于 x 的定义域时，则 $f(a)$ 不存在.）

例 2 函数 $y=1-\dfrac{1}{x-1}$ 的图象是(　　).

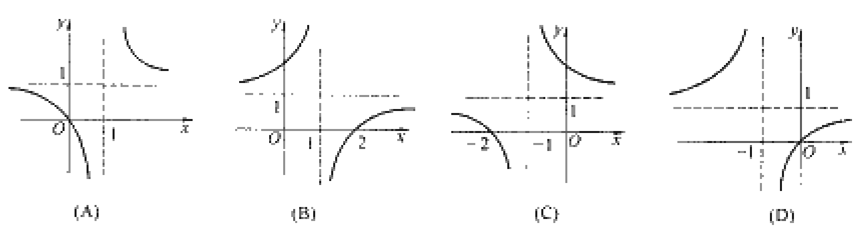


图 13

解 由于 $x=1$ 时，$f(1)$不存在，即 $y=1$ 不存在，又

$$F(x)=f(x+1)-1=[1-\frac{1}{(x+1)-1}]-1=-\frac{1}{x}$$

显然 $F(x)$为奇函数，故函数 y 的图象关于点$(1,1)$成中心对称，且过点$(2,0)$，因而选(B).

例3 讨论函数 $f(x)=(x-\frac{2}{3})(|x+\frac{5}{3}|+|x-3|)-2x-\frac{8}{3}$的图象的对称性.

解 当 $x\geqslant 3$ 时

$$f(x)=2x^2-\frac{14}{3}x-\frac{16}{9}=2(x-\frac{7}{6})^2-\frac{9}{2}$$

当 $x\leqslant -\frac{5}{3}$时

$$f(x)=-2x^2+\frac{2}{3}x-\frac{32}{9}=-2(x-\frac{1}{6})^2-\frac{7}{2}$$

当 $-\frac{5}{3}<x<3$ 时

$$f(x)=\frac{8}{3}x-\frac{52}{9}$$

由上可知函数的图象中间为一线段，右边为开口向上的抛物线的一部分，左边为开口向下的抛物线的一部分，因而图象只可能是关于某点成中心对称，且此点的横坐标

$$x_0=\frac{1}{2}\times(\frac{1}{6}+\frac{7}{6})=\frac{2}{3}$$

又
$$F(x)=f(x+\frac{2}{3})-f(\frac{2}{3})=x(|x+\frac{7}{3}|+|x-\frac{7}{3}|)-2x$$

是奇函数，故 $f(x)$的图象关于点$(\frac{2}{3},f(\frac{2}{3}))$即$(\frac{2}{3},-4)$成中心对称.

(3)函数的图象关于直线 $y=x$ 对称

函数 $y=f(x)$的图象和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$的图象关于直线 $y=x$ 对称. 因此，欲证函数 $y=f(x)$的图象关于直线 $y=x$ 对称，可以考虑证函数 $y=f(x)$的反函数是它本身.

例4 给定实数 a，$a\neq 0$ 且 $a\neq 1$. 设函数 $y=\frac{x-1}{ax-1}$($x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq\frac{1}{a}$). 证明这个函数的图象关于 $y=x$ 成轴对称图形.

证明 先求所给函数的反函数. 由 $y=\frac{x-1}{ax-1}$($x\in\mathbf{R},x\neq\frac{1}{a}$)，所以$(ay-1)x=y-1$.

若 $ay-1=0$，即 $y=\frac{1}{a}$，代入所给函数式得到 $a=1$ 与已知矛盾，故知 $ay-1\neq 0$，则

$$x=\frac{y-1}{ay-1}(y\neq\frac{1}{a})$$

故所求反函数为

$$y=\frac{x-1}{ax-1}(x\in\mathbf{R}\text{ 且 }x\neq\frac{1}{a})$$

由此可知，原函数的反函数就是它本身，故原函数的图象关于直线 $y=x$ 成轴对称图形.

5.4　三角问题

5.4.1　对角的概念推广与符号表示的深刻认识——符号化与变元表示思想的运用

角的概念推广后，要特别注意有关角的概念及符号表示的涵义，这是学好这一章内容的基础.角的概念的推广，是将角的一般概念："角可以看成平面内一条射线绕着端点从一个位置旋转到另一个位置所成的图形"的推广，角的概念推广以后就包括了正角、负角和零角，并且将过去只研究 $0°$ 到 $360°$（或 $0\sim2\pi$）范围内的角推广到了研究任意范围内的角.还须注意的，一是给出了一些新的特殊角的概念，诸如象限角、终边相同的角等；二是对于过去所学的一些特殊的角的概念，诸如等角、钝角、锐角、余角等，其概念是没有推广的.因此，在运用符号或文字等语言讨论角的有关问题时，一定要注意到如上几点.

例 1　角的顶点与坐标原点重合，角的始边与 x 轴的非负半轴重合，试判断下列命题的真假：

（Ⅰ）终边相同的角相等；

（Ⅱ）第一象限的角都是锐角，第二象限的角都是钝角，终边在 x 轴的非正半轴上的角都是平角；

（Ⅲ）小于 $90°$ 的角是锐角，小于 $180°$ 的角是钝角；

（Ⅳ）若两角和为 $90°$，则两角互为余角；若两角的和为 $180°$，则两角互为补角.

解　（Ⅰ）所有与角 α 终边相同的角，连同角 α 在内，可构成一个集合 $S=\{\beta\mid\beta=\alpha+k\cdot360°,k\in\mathbf{Z}\}$，$k$ 取不同的整数，得到不同的角 β.故所给命题为假命题.

（Ⅱ）设 α 为锐角，而第一象限的角可构成一个集合

$$S_1=\{\beta_1\mid k\cdot360°<\beta_1<k\cdot360°+90°,k\in\mathbf{Z}\}$$

只有当 $k=0$ 时，才有 $\beta_1=\alpha$.故所给命题为假命题.同理，可讨论后面两个命题.

（Ⅲ）由于小于某一个正角的角可以是零角或负角，故所给命题为假命题.

（Ⅳ）若取 $\alpha_1=150°$，$\alpha_2=-60°$，虽然 $\alpha_1+\alpha_2=90°$，但 α_1 与 α_2 不为互余的角.又取 $\alpha_3=240°$，虽然 $\alpha_2+\alpha_3=180°$，但 α_2 与 α_3 不为互补的角.故所给命题为假命题.

例 2　如图 14：（Ⅰ）写出终边在直线 AB 位置时的角的集合；（Ⅱ）写出终边在阴影部分（包括边界）的角的集合.（用 0 到 2π 的角表示）.

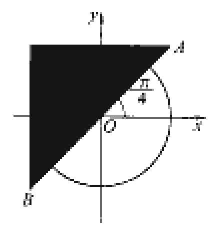


图 14

解　（Ⅰ）在 $[0,2\pi)$ 内，终边在 OA 位置的角是 $\frac{\pi}{4}$，终边在 OB 位置的角是 $\frac{5\pi}{4}$，所以终边在 OA 位置的角的集合是 $\{\alpha\mid\alpha=2k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\}$.终边在 OB 位置的角的集合是 $\{\alpha\mid\alpha=2k\pi+\frac{5\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\}$.

故终边在直线 AB 位置时的角的集合是 $\{\alpha\mid\alpha=2k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\}\cup\{\alpha\mid\alpha=2k\pi+\frac{5\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\}=\{\alpha\mid\alpha=k\pi+\frac{\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\}$.

(Ⅱ)终边在图中阴影部分(包括边界)的角的集合是$\{\alpha \mid 2k\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant 2k\pi+\frac{5\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\}$.

例3 如图15,五角星$ABCDE$的中心与坐标系原点重合,顶点B在y轴的正半轴上,试用弧度制依次表示终边分别在OA,OB,OC,OD,OE上的角的集合.

解 由于在$[0,2\pi)$内,OA,OB,OC,OD,OE平分周角,即知

$$\angle BOC=\angle COD=\angle DOE=\angle EOA=\angle AOB=\frac{2\pi}{5}$$

从而

$$\alpha_1=\angle XOA=\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{5}=\frac{\pi}{10}$$

$$\alpha_3=\angle XOC=\frac{\pi}{10}+\frac{4\pi}{5}=\frac{9\pi}{10}$$

$$\alpha_4=\angle XOD=\frac{\pi}{10}+\frac{6\pi}{5}=\frac{13\pi}{10}$$

$$\alpha_5=\angle XOE=\frac{\pi}{10}+\frac{8\pi}{5}=\frac{17\pi}{10}$$

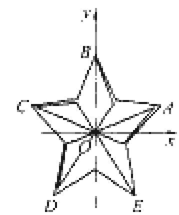


图15

故与OA,OB,OC,OD,OE终边相同的角的集合依次分别为

$$\{\beta_1 \mid \beta_1=2k\pi+\alpha_1=2k\pi+\frac{\pi}{10},k\in\mathbf{Z}\}$$

$$\{\beta_2 \mid \beta_2=2k\pi+\alpha_2=2k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}\}$$

$$\{\beta_3 \mid \beta_3=2k\pi+\alpha_3=2k\pi+\frac{9\pi}{10},k\in\mathbf{Z}\}$$

$$\{\beta_4 \mid \beta_4=2k\pi+\alpha_4=2k\pi+\frac{13\pi}{10},k\in\mathbf{Z}\}$$

$$\{\beta_5 \mid \beta_5=2k\pi+\alpha_5=2k\pi+\frac{17\pi}{10},k\in\mathbf{Z}\}$$

例4 设α是第一象限的角,2α一定是第二象限的角吗?为什么?

解 若α是第一象限的角,则2α不一定是第二象限的角.因为$2k\pi<\alpha<2k\pi+\frac{\pi}{2}$$(k\in\mathbf{Z})$,则$4k\pi<2\alpha<4k\pi+\pi(k\in\mathbf{Z})$,在$[0,2\pi)$内$2\alpha$的取值范围为$(0,\pi)$,显然,$2\alpha$的终边还可以在第一象限或$y$轴的非负半轴上.

5.4.2 弧度制及应用——对应思想的运用

规定周角的$\frac{1}{360}$为$1°$的角,这种用度作为单位来度量角的单位制叫做角度制.规定长度等于半径长的弧所对的圆心角叫做1弧度的角,这种以弧度作为单位来度量角的单位制叫做弧度制.角度制与弧度制这两种不同的量角制是同等重要的,只是应用的场合不同罢了.它们之间有亲密的一一对应关系:$180°=\pi$ rad.把角度换成弧度时,只将角度α乘以$\frac{\pi}{180}$;把弧度换成角度时,只需将弧度α乘以$(\frac{180}{\pi})°$.因而有如下特殊角的一一对应关系(注:其中箭头最好不改写为"=",因为是两种不同的单位制)

$$0°\leftrightarrow 0,30°\leftrightarrow\frac{\pi}{6},45°\leftrightarrow\frac{\pi}{4},60°\leftrightarrow\frac{\pi}{3},90°\leftrightarrow\frac{\pi}{2},180°\leftrightarrow\pi,\cdots$$

表示角时，角度、弧度换算必须准确，使用的单位必须统一，两种单位不能混用，如 $20° < \alpha < \frac{\pi}{6}$ 就是混用的式子.

例 1　（Ⅰ）将 $\alpha_1 = 75°$ 用弧度制表示；

（Ⅱ）将 $\alpha_2 = \frac{3\pi}{5}$ 用角度制表示.

（Ⅰ）**解法 1**　由于 $\alpha_1 = 75°$，则换算成弧度为 $75 \cdot \frac{\pi}{180} = \frac{5\pi}{12}$.

解法 2　由于 $\alpha_1 = 75° = 45° + 30°$，则换算成弧度为 $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{12}$.

（Ⅱ）**解法 1**　由于 $\alpha_2 = \frac{3\pi}{5}$，则换算成角度为 $\frac{3\pi}{5} \cdot (\frac{180}{\pi})° = 108°$.

解法 2　由于 $\alpha_2 = \frac{3\pi}{5} = \frac{6\pi}{10} = \frac{5\pi}{10} + \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{10}$，则换算成角度为 $90° + 18° = 108°$.

在弧度制下，弧长公式、扇形面积公式分别为：$l = |\alpha| \cdot r$，$S_{扇形} = \frac{1}{12}lr = \frac{1}{2}|\alpha| \cdot r^2$（其中 $S = \frac{1}{2}lr$ 可以近似看作以弧为底、半径为高的等腰三角形面积公式）. 这是两个在弧度制下产生和应用的公式，因而在遇到有关的角用角度表示时必须先换为弧度表示.

角的概念推广后，无论用角度制还是用弧度制，都能在角的集合与实数集 $\mathbf{R}$ 之间建立一一对应的关系：每一个角都有唯一的一个实数（例如这个角的弧度数或度数）与之对应；反过来，每一个实数也都有唯一的一个角（例如弧度数或度数（这时的角采用十进制的写法）等于这个实数的角）与它对应.

例 2　集合 $A = \{\alpha | \alpha = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\} \cup \{\alpha | \alpha = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}\}$，$B = \{\beta | \beta = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}\} \cup \{\beta | \beta = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\}$，那么集合 A 与集合 B 的关系是什么？

解法 1　由于

$$\{\alpha | \alpha = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\} = \{\alpha | \alpha = k_1\pi, k_1 \in \mathbf{Z}\} \cup \{\alpha | \alpha = k_2\pi + \frac{\pi}{2}, k_2 \in \mathbf{Z}\}$$

$$\{\beta | \beta = \frac{2k\pi}{3} k \in \mathbf{Z}\} = \{\beta | \beta = 2k_1\pi, k_1 \in \mathbf{Z}\} \cup \{\beta | \beta = 2k_2\pi \pm \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}\}$$

于是，比较 A，B 两个集合的元素，可知集合 B 的元素都是集合 A 的元素，但集合 A 中的元素，如 $\alpha = (2k+1)\pi (k \in \mathbf{Z})$ 不是 B 中的元素，所以 $B \subsetneqq A$.

解法 2　考虑在 $[0, 2\pi]$ 内，A，B 的子集分别为

$$A_1 = \{0, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\}$$

$$B_1 = \{0, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2}, 2\pi\}$$

再利用周期性，知 $B \subsetneqq A$.

解法 3　集合 A 的图形是终边落在两坐标轴上所有的角及终边与 $\pm \frac{2\pi}{3}$ 重合的所有角，如图 16(a)，集合 B 是终边落在 y 轴、x 轴正半轴及终边

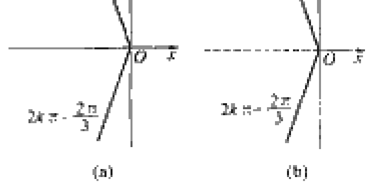


图 16

与$\pm\dfrac{2\pi}{3}$重合的所有角，如图16(b). 两图相比，显见$B \subsetneqq A$.

5.4.3 诱导公式的新概括——符号化与变元表示思想的运用

关于诱导公式，一些教材或书籍用了较大篇幅推导介绍了如下五组公式：

公式一："$k\cdot 360^\circ+\alpha$"($k\in\mathbf{Z}$)组；

公式二："$180^\circ+\alpha$"组；

公式三："$-\alpha$"组；

公式四："$180^\circ-\alpha$"组；

公式五："$360^\circ-\alpha$"组.

一般是将这些诱导公式概括为："$k\cdot 360^\circ+\alpha$"($k\in\mathbf{Z}$)，$-\alpha$，$180^\circ\pm\alpha$，$360^\circ-\alpha$的三角函数值等于α的同名函数值，前面加上一个把α看成锐角时原函数值的符号. 这样概括为我们学习、记忆并运用诱导公式带来了方便.

如果我们灵活运用符号化与变元表示思想，则可得到诱导公式的新概括.

首先注意到，公式一、三、五所涉及的角可统一写成$k\cdot 2\pi+\alpha$($k\in\mathbf{Z}$)，或$k\cdot\pi+\alpha$(k为偶数)；而公式二、四也可概括成$k\cdot\pi+\alpha$(k为奇数)的形式，因而这些角同属于$k\cdot\pi+\alpha$($k\in\mathbf{Z}$).

设$f(\alpha)$代表两个弦(也包括两个割)函数，$g(\alpha)$代表两个切函数，$f(k\pi+\alpha)$，$g(k\pi+\alpha)$($k\in\mathbf{Z}$)代表任意角的弦、切三角函数，这样，五组公式就可概括写成公式Ⅰ

$$f(k\pi+\alpha)=(-1)^k f(\alpha) \tag{①}$$

$$g(k\pi+\alpha)=g(\alpha) \tag{②}$$

当k为偶数时，$k\pi+\alpha=2k_1\pi+\alpha$($k_1\in\mathbf{Z}$)，则

$$f(k\pi+\alpha)=f(2k_1\pi+\alpha)=f(\alpha)$$

$$g(k\pi+\alpha)=g(2k_1\pi+\alpha)=g(\alpha)$$

这就是书籍中的公式一.

当k为奇数时

$$k\pi+\alpha=(2k_1+1)\pi+\alpha\ (k_1\in\mathbf{Z})$$

则

$$f(k\pi+\alpha)=f[(2k_1+1)\pi+\alpha]=f(\pi+\alpha)=(-1)^{2k_1+1}f(\alpha)=-f(\alpha)$$

$$g(k\pi+\alpha)=g[(2k_1+1)\pi+\alpha]=g(\pi+\alpha)=g(\alpha)$$

这就是书籍中的公式二.

其次，注意到$k\pi-\alpha=k\pi+(-\alpha)$，则

$$f(k\pi-\alpha)=f[k\pi+(-\alpha)]=(-1)^k f(-\alpha)$$

$$g(k\pi-\alpha)=g(-\alpha)$$

故只要推导"$-\alpha$"组公式即可，这就是课本上的公式三，即如下公式Ⅱ

$$f(-\alpha)=\begin{cases}-f(\alpha),\text{当 } f(\alpha)=\sin\alpha \text{ 时}\\ f(\alpha),\text{当 } f(\alpha)=\cos\alpha \text{ 时}\end{cases}$$

$$g(-\alpha)=-g(\alpha)$$

这样，书籍中的五组公式最后抽象概括成两组，即公式Ⅰ、Ⅱ，不仅减轻了学习者的记忆负担，还可以从三角函数的周期性来理解公式Ⅰ(对于公式①，当k为奇数时，有$f(\pi+\alpha)+$

$f(\alpha)=0$，这也是周期为 2π 的函数的一种表示形式），从函数奇偶性的角度理解公式Ⅱ，从而加深对三角函数性质的认识.

综上所述，我们可以将两组公式概括为十个字：函数名不变，正负奇偶辨. 这里的奇偶有双重含义.

5.4.4　函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的图象——变换思想的运用

通过四道练习题，可以分四步介绍函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 简图的作法：

第一步，作函数 $y=2\sin x$ 及 $y=\frac{1}{2}\sin x$ 的简图，介绍振幅变换.

第二步，作函数 $y=\sin 2x$ 及 $y=\sin\frac{1}{2}x$ 的简图，介绍周期变换.

第三步，作函数 $y=\sin(x+\frac{\pi}{3})$ 和 $y=\sin(x-\frac{\pi}{4})$ 的简图，介绍相位变换.

第四步，作函数 $y=3\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 的简图，介绍前面三个变换的综合：函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ $(A>0,\omega>0,x\in\mathbf{R})$ 的图象可以看作是对 $y=\sin x$ 的图象先进行相位变换，再进行周期变换，最后进行振幅变换而得到的.

按照这样的四步（在第四步中又是按先作相位变换，再作周期变换，最后作振幅变换的顺序进行的）可以使我们对函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,x\in\mathbf{R})$ 的简图的作法有比较清晰的认识.

如果我们运用变换思想方法来考虑第四步中三种变换的顺序，则能使我们更牢固地掌握函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,x\in\mathbf{R})$ 简图的作法，我们也可以从中总结归纳出变换的一般规律. 对于 $y=A\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 的简图，我们还可有以下五种变换途径：

其二：$y=\sin x\Rightarrow y=\sin(x+\frac{\pi}{3})\Rightarrow y=3\sin(x+\frac{\pi}{3})\Rightarrow y=3\sin(2x+\frac{\pi}{3}),x\in\mathbf{R}$;

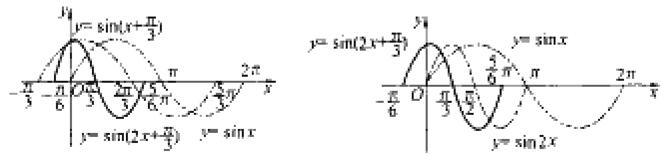
其三：$y=\sin x\Rightarrow y=\sin 2x\Rightarrow y=\sin2(x+\frac{\pi}{6})\Rightarrow y=3\sin(2x+\frac{\pi}{3}),x\in\mathbf{R}$;

其四：$y=\sin x\Rightarrow y=\sin 2x\Rightarrow y=3\sin 2x\Rightarrow y=3\sin 2(x+\frac{\pi}{6}),x\in\mathbf{R}$;

其五：$y=\sin x\Rightarrow y=3\sin x\Rightarrow y=3\sin 2x\Rightarrow y=3\sin 2(x+\frac{\pi}{6}),x\in\mathbf{R}$;

其六：$y=\sin x\Rightarrow y=3\sin x\Rightarrow y=3\sin(x+\frac{\pi}{3})\Rightarrow y=3\sin(2x+\frac{\pi}{3}),x\in\mathbf{R}$.

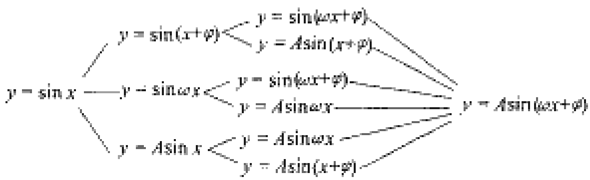
把上述五种变换途径与前面的变换途径相比较，可以发现：振幅变换无论是先进行，还是在中间进行或最后进行，都是一样的，当相位变换与周期变换交换顺序时，平移的长度就会有所改变：先进行相位变换再进行周期变换时，先将图象向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度，再把图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$ 倍（纵坐标不变），如图 17(a)，先进行周期变换再进行相位变换时，先将图象上所有点的横坐标缩短到原来的 $\frac{1}{2}$（纵坐标不变），再把图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，此时得到的是 $y=\sin2(x+\frac{\pi}{6})=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 的图象，平移是在 x 基础上的平移，而不是在 $2x$ 基础上的平移，如图 17(b).



(a) (b)

图 17

综上所述,可知函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,x\in\mathbf{R})$简图的作法有如下六种变换途径:



相位变换在前,周期变换在后时,先将图象向左($\varphi>0$)或向右($\varphi<0$)平行移动$|\varphi|$个单位,再把图象上所有点的横坐标缩短($\omega>1$)或伸长($0<\omega<1$)到原来的$\frac{1}{\omega}$(纵坐标不变);

周期变换在前,相位变换在后时,先将图象上所有点的横坐标缩短($\omega>1$)或伸长($0<\omega<1$)到原来的$\frac{1}{\omega}$(纵坐标不变),再把图象向左($\varphi>0$)或向右($\varphi<0$)平行移动$\frac{|\varphi|}{\omega}$个单位.

例 1 已知函数 $y=\frac{1}{2}\cos^2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cdot\cos x+1,x\in\mathbf{R}$,该函数的图象可由 $y=\sin x(x\in\mathbf{R})$的图象经过怎样的平移和伸缩变换得到?

解

$$y=\frac{1}{2}\cos^2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cdot\cos x+1=$$
$$\frac{1}{4}(2\cos^2x-1)+\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\times2\sin x\cdot\cos x+1=$$
$$\frac{1}{4}\cos 2x+\frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2x+\frac{5}{4}=\frac{1}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{6})+\frac{5}{4}$$

将函数 $y=\sin x$ 依次进行如下变换:

(i)先把函数 $y=\sin x$ 的图象向左平移$\frac{\pi}{6}$,得到 $y=\sin(x+\frac{\pi}{6})$的图象;

(ii)再把得到的图象上各点横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$(纵坐标不变),得到函数 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$的图象;

(iii)再把得到的图象上各点纵坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$(横坐标不变),得到函数 $y=\frac{1}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{6})$的图象;

(iv)最后把得到的图象向上平移$\frac{5}{4}$个单位长度,得到函数 $y=\frac{1}{2}\sin(2x+\frac{\pi}{6})+\frac{5}{4}=$

$\frac{1}{2}\cos^2 x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\cdot\cos x+1$ 的图象.

如果将上述步骤中的第(i)、(ii)步交换,则有如下变换:(i)先把函数 $y=\sin x$ 的图象上各点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$(纵坐标不变),得到函数 $y=\sin 2x$ 的图象;(ii)再把得到的图象向左平移$\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{12}$,得到 $y=\sin2(x+\frac{\pi}{12})=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$的图象;后面的(iii)、(iv)步均同上.

在求解函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$的具体解析式时,常分为两种情形:一是把图象的变换作图过程给出来,再确定出解析式,这可以由前面的变换模式来处理;二是给出图象,根据图象特点确定出解析式,这时,求出 A 可由图象最高点值与最低点值的算术平均值而得,求出 ω 可由$\frac{2\pi}{T}$而得,求出 φ 可由图象上某特殊点纵、横坐标代入 $A\sin(\omega x+\varphi)$而得.

例 2　把函数 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{4})$的图象向右平移$\frac{\pi}{8}$,再把所得图象上各点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$,则所得图象的函数是(　　).

(A) $y=\sin(4x+\frac{3\pi}{8})$　　(B) $y=\sin(4x+\frac{\pi}{8})$　　(C) $y=\sin 4x$　　(D) $y=\sin x$

解　应选(C).理由如下:由于 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{4})=\sin 2(x+\frac{\pi}{8})$,将 $y=\sin 2(x+\frac{\pi}{8})$的图象向右平移$\frac{\pi}{8}$,得到函数 $y=\sin2[(x+\frac{\pi}{8})-\frac{\pi}{8}]=\sin 2x$ 的图象;再将 $y=\sin 2x$ 图象上各点的横坐标缩短到原来的$\frac{1}{2}$,就得到函数 $y=\sin 4x$ 的图象.

例 3　已知函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)(A>0,\omega>0,|\varphi|\leqslant\pi)$的简图如图 18 所示:

(Ⅰ)求此函数的解析式;

(Ⅱ)求与(Ⅰ)的函数图象关于直线 $x=2\pi$ 对称图象的函数解析式.

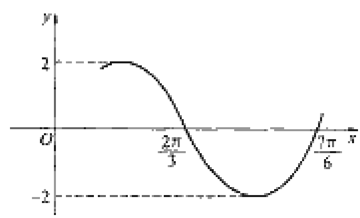


图 18

解　(Ⅰ)因 $A>0$,函数 y 的最大值为 A,最小值为 $-A$,从而 $A=2$.

由图可知,其最小正周期 $T=2(\frac{7\pi}{6}-\frac{2\pi}{3})=\pi$,

从而 $\omega=\frac{2\pi}{T}=2$.

设所求解析式为 $y=2\sin(2x+\varphi)$,由图知点$(\frac{2\pi}{3},0)$在图象上,且该点是五点作图法中的第 3 个点,从而有 $2\cdot\frac{2\pi}{3}+\varphi=\pi$,即 $\varphi=\pi-\frac{4\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}$,故 $y=2\sin(2x-\frac{\pi}{3})$,这里 φ 为 $-\frac{\pi}{3}$ 满足 $|\varphi|\leqslant\pi$.

(Ⅱ)与 $f(x)=2\sin(2x-\frac{\pi}{3})$的图象关于直线 $x=2\pi$ 对称的图象的函数解析式为 $y=f(4\pi-x)$,即所求函数式为

$$y=2\sin[2(4\pi-x)-\frac{\pi}{3}]=-2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$$

例 4 设 $m\in\mathbf{R}$，$M=\{(x,y)\mid y=-\sqrt{3}x+m\}$，$N=\{(x,y)\mid x=\cos\theta, y=\sin\theta, 0<\theta<2\pi\}$，且 $M\cap N=\{(\cos\theta_1,\sin\theta_1),(\cos\theta_2,\sin\theta_2)\}$，求(1) m 的取值范围；(2) $\theta_1+\theta_2$ 的值.

解 这道有关集合运算的题目可以转化为如下形式：

如果方程 $\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta-m=0$ 在 $(0,2\pi)$ 内有相异的两实根 θ_1,θ_2，求实数 m 的范围及 $\theta_1+\theta_2$ 的值. 而 $\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta-m=0$ 又可转化成模型 $m=2\sin(\theta+\frac{\pi}{3})$.

由于方程 $\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta-m=0$ 在 $(0,2\pi)$ 内有相异的两实根，所以 $|\sin(\theta+\frac{\pi}{3})|=|\frac{m}{2}|<1$，即 $|m|<2$. 因 $\theta\neq0,2\pi$，则 $m\neq2\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$. 故 m 的取值范围为 $(-2,\sqrt{3})\cup(\sqrt{3},2)$.

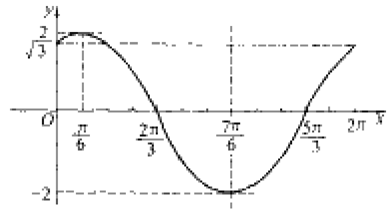


图 19

作函数 $y=2\sin(x+\frac{\pi}{3})$ 及 $y=m$ 的图象如图 19 所示：

当 $-2<m<\sqrt{3}$ 时的部分曲线关于直线 $x=\frac{7\pi}{6}$ 对称，从而

$$\theta_1+\theta_2=2\times\frac{7\pi}{6}=\frac{7\pi}{3}$$

当 $\sqrt{3}<m<2$ 时的部分曲线关于直线 $x=\frac{\pi}{6}$ 对称，从而

$$\theta_1+\theta_2=2\times\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$$

5.4.5 单位圆的应用——数形结合思想的运用

单位圆是研究三角函数的一个重要工具. 利用单位圆中的三角函数线可以将比较抽象的三角函数量表示成形象的有向线段，从而将三角问题与几何问题及其方法紧密联系起来. 书本中，诱导公式(二)、(三)的推导、两角和的余弦公式的证明、三角函数图象的作出等，都是利用单位圆来处理的. 其实，单位圆的应用是很广的，下面，我们给出几个应用的例子.

例 1 利用单位圆证明：

(Ⅰ)设 α 为任意的角，则 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$；

(Ⅱ)设 α 为任意的角，则 $|\sin\alpha|+|\cos\alpha|\geqslant1$；

(Ⅲ)设 $0\leqslant\alpha<\beta\leqslant\frac{\pi}{2}$，则 $\sin\alpha<\sin\beta$，$\cos\alpha>\cos\beta$.

证明 (Ⅰ)设 α 的终边交单位圆于 P，过 P 作 $PM\perp Ox$ 于 M，则 $\sin\alpha=MP$，$\cos\alpha=OM$.

当 $\alpha\neq\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 时，即 α 的终边不在坐标轴上时，由勾股定理知

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=|\sin\alpha|^2+|\cos\alpha|^2=|MP|^2+|OM|^2=OP^2=1$$

当 $\alpha=\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 时，$|OM|$，$|MP|$ 中有一个为 0，另一个等于单位圆的半径，此时亦有

$$\sin\alpha^2+\cos\alpha^2=1$$

(Ⅱ)同(Ⅰ)，当 $\alpha\neq\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 时，由三角形两边之和大于第三边，有 $|MP|+|OM|>$

$OP=1$,即有

$$|\sin\alpha|+|\cos\alpha|=|MP|+|OM|>1$$

当 $\alpha=\frac{k\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$ 时,$|OM|$,$|MP|$ 中有一个为 0,另一个等于单位圆的半径.此时

$$|\sin\alpha|+|\cos\alpha|=|MP|+|OM|=1$$

或者由 $0\leqslant|\sin\alpha|\leqslant1$,$0\leqslant|\cos\alpha|\leqslant1$,有 $|\sin\alpha|^2\leqslant|\sin\alpha|$,$|\cos\alpha|^2\leqslant|\cos\alpha|$,故有 $|\sin\alpha|+|\cos\alpha|\geqslant|\sin\alpha|^2+|\cos\alpha|^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 而证.

(Ⅲ)当 $0\leqslant\alpha<\beta\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时,设角 α,β 的正弦线分别为 M_1P_1,M_2P_2,它们的余弦线分别为 OM_1,OM_2 如图 20 所示.

若 $2\alpha\leqslant2\beta$,则 $2|M_1P_1|<2|M_2P_2|$,则 $|M_1P_1|<2|M_2P_2|$,即 $|\sin\alpha|<|\sin\beta|$,故 $\sin\alpha<\sin\beta$.

又在同圆中,大弦所对弦的弦心距反而小,得 $|OM_1|>|OM_2|$,即 $|\cos\alpha|>|\cos\beta|$,故 $\cos\alpha>\cos\beta$.

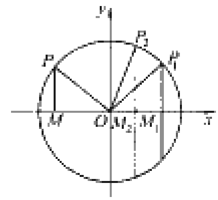


图 20

注 由(Ⅲ)知,正弦函数在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 内是增函数,余弦函数在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 内是减函数.

例 2 在 $(0,2\pi)$ 内,使 $\sin x>\cos x$ 成立的 x 取值范围为( ).

(A)$(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2})\cup(\pi,\frac{5\pi}{4})$ (B)$(\frac{\pi}{4},\pi)$ (C)$(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4})$ (D)$(\frac{\pi}{4},\pi)\cup(\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2})$

解 应选(C).理由为:作单位圆如图 21 所示,在 $(0,2\pi)$ 内,分别作 $x=\frac{\pi}{4}$ 与 $x=\frac{5\pi}{4}$ 的正弦线、余弦线,则由等腰直角三角形性质,知 $\sin\frac{\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}$,$\sin\frac{5\pi}{4}=\cos\frac{5\pi}{4}$.当 $\frac{\pi}{4}<x<\frac{5\pi}{4}$ 时,作角 x 的正弦线、余弦线则知 $\sin x>\cos x$.故选(C).

注 作第一、三象限的平分线 P_1P_2,则知角 x 的终边在直线 P_1P_2 的上方时,满足 $\sin x>\cos x$;角 x 的终边在直线 P_1P_2 的下方时,满足 $\sin x<\cos x$.

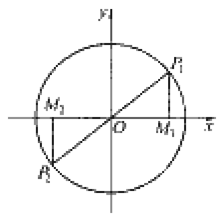


图 21

例 3 若 $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{4}$,$\sin\alpha+\cos\alpha=a$,$\sin\beta+\cos\beta=b$,则( ).

(A)$a<b$ (B)$a>b$ (C)$ab<1$ (D)$ab>2$

解 应选(A).理由为:作单位圆如图 22,作 $\angle BOQ=\alpha$,$\angle AOP=\beta$,分别作角 α,β 的正弦线 BQ,AP 和余弦线 OB,OA.在 x 轴的正半轴上取点 C,D,使 $|BC|=|BQ|$,$|AD|=|AP|$,则由 $PD/\!/QC$,$|AP|>|BQ|(\beta>\alpha)$,知点 C 在线段 BD 的两端点之间,即 $|OC|<|OD|$.

而 $|OC|=|OB|+|BQ|=|\cos\alpha|+|\sin\alpha|=|a|=a$,$|OD|=|OA|+|AP|=|\cos\beta|+|\sin\beta|=|b|=b$,故 $a<b$.

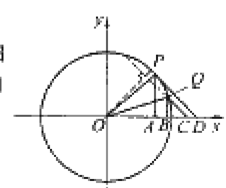


图 22

例 4 已知 $\sin\alpha>\sin\beta$,那么下列命题成立的是( ).

(A)若 α,β 是第一象限角,则 $\cos\alpha<\cos\beta$

(B)若 α,β 是第二象限角,则 $\tan\alpha>\tan\beta$

(C)若 α,β 是第三象限角,则 $\cos\alpha>\cos\beta$

(D)若 α,β 是第四象限角，则 $\tan\alpha>\tan\beta$

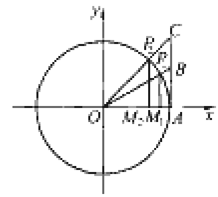


图 23

解 应选(D). 理由如下：作单位圆如图 23，在第一象限内作 $\angle AOP_1=\beta$，$\angle AOP_2=\alpha$，分别作 α,β 的正弦线、余弦线、正切线.

由 $\sin\alpha>\sin\beta$，有 $|M_2P_2|>|M_1P_1|$，从而有 $|AC|>|AB|$，$|OM_2|<|OM_1|$，即

若 α,β 是第一象限角，且 $\sin\alpha>\sin\beta$ 时，则有 $\cos\alpha<\cos\beta$，$\tan\alpha>\tan\beta$. 从而排除(A)；

同理，若 α,β 是第二象限角，且 $\sin\alpha>\sin\beta$，则有 $\cos\alpha>\cos\beta$，$\tan\alpha<\tan\beta$. 从而排除(B)；

若 α,β 是第三象限角，且 $\sin\alpha>\sin\beta$，则有 $\cos\alpha<\cos\beta$，$\tan\alpha<\tan\beta$. 从而排除(C)；

若 α,β 是第四象限角，且 $\sin\alpha>\sin\beta$，则有 $\cos\alpha>\cos\beta$，$\tan\alpha>\tan\beta$. 故选(D).

例 5 已知函数 $f(x)=\tan x$，$x\in(0,\frac{\pi}{2})$，若 $x_1\neq x_2$，证明：$\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]>f(\frac{x_1+x_2}{2})$.

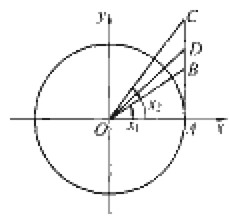


图 24

证明 如图 24，在单位圆中作 $\angle AOB=x_1$，$\angle AOC=x_2$，作角 x_1，x_2 的正切线 AB，AC，又作 $\angle BOC$ 的平分线交 AC 于 D，则 $\angle AOD=\frac{x_1+x_2}{2}$，且角 $\frac{x_1+x_2}{2}$ 的正切线为 AD. 即 $\tan x_1=AB$，$\tan x_2=AC$，$\tan\frac{x_1+x_2}{2}=AD$.

由 $0<x_1<x_2<\frac{\pi}{2}$，则由直角三角形性质，知 $|OB|<|OC|$.

又由角平分线性质，知 $\frac{|OC|}{|OB|}=\frac{|CD|}{|BD|}$，从而 $|CD|>|BD|$. 于是 $|AB|+|AC|=|AB|+|CD|+|AD|>|AB|+|BD|+|AD|=2|AD|$. 即 $AB+AC>2AD$，故 $\frac{1}{2}(\tan x_1+\tan x_2)>\tan\frac{x_1+x_2}{2}$.

例 6 解不等式 $4\cos^2x+2(\sqrt{3}-1)\cos x-\sqrt{3}\leqslant 0$.

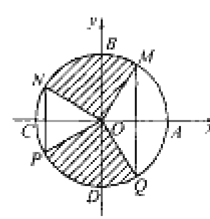


图 25

解 原不等式可变形为 $(2\cos x+\sqrt{3})(2\cos x-1)\leqslant 0$，从而 $-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant\cos x\leqslant\frac{1}{2}$.

如图 25 作单位圆，设单位圆分别与 x 轴、y 轴交于点 A，C 和 B，D. 作直线 $x=\frac{1}{2}$ 和 $x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，分别与单位圆交于点 M，Q 和 N，P. 联结 OM，ON，OP，OQ，则弧 $\overset{\frown}{NBM}$ 和弧 $\overset{\frown}{ODP}$ 上所有点的横坐标都在 $[-\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}]$ 内. 因此，满足 $-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqslant\cos x\leqslant\frac{1}{2}$ 的角 x 的终边在图 25 阴影部分. 故原不等式的解集为

$$\{x\mid 2k\pi+\frac{\pi}{3}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{5\pi}{6}\}\cup\{x\mid 2k\pi+\frac{7\pi}{6}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{5\pi}{3}\}, k\in\mathbf{Z}$$

5.4.6 三角函数的性质及应用——特殊与一般转换思想的运用

三角函数是一类特殊的函数,研究其性质时应注意它的特殊性.而每一个具体的三角函数相对于一般的三角函数更具特殊性,此时,既要注意到三角函数性质的一般性,又要注意到在其特定条件下这个具体函数性质的特殊性.

(1)三角函数的单调性及应用

在研究函数的单调性时,要先确定区间,但在三角中,引进了象限角,这时就要区别象限角与区间.例如,正弦函数 $y=\sin x$ 在每一个闭区间$[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}]$$(k\in\mathbf{Z})$上是增函数;在每一个闭区间$[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}]$$(k\in\mathbf{Z})$上是减函数,但不能说正弦函数在第一、四象限是增函数,在第二、三象限是减函数.如当 $\alpha=\frac{\pi}{6},\beta=-\frac{11}{6}\pi$ 都是第一象限角且 $\alpha>\beta$,但$\sin\alpha=\sin\beta$,又 $\alpha=\frac{\pi}{6},\beta=-\frac{5\pi}{3}$都是第一象限角且 $\alpha>\beta$ 但 $\sin\alpha<\sin\beta$.

例 1 求函数 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$的单调增区间.

解 因函数 $y=\sin x$ 在$[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}]$上是增函数,从而有

$$2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant 2x+\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$$

即
$$2k\pi-\frac{5\pi}{6}\leqslant 2x\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{6}$$

亦即
$$k\pi-\frac{5\pi}{12}\leqslant x\leqslant k\pi+\frac{\pi}{12},(k\in\mathbf{Z})$$

故函数 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$的单调增区间是$[k\pi-\frac{5\pi}{12},k\pi+\frac{\pi}{12}]$$(k\in\mathbf{Z})$.

例 2 已知 $\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$时,试比较 $\cos(\sin\theta)$,$\sin(\cos\theta)$的大小.

解 因 $\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$,则 $\theta>\sin\theta$.把 $\cos\theta$ 看作$(0,\frac{\pi}{2})$上的角,则得 $\cos\theta>\sin(\cos\theta)$,又 $\frac{\pi}{2}>\theta>\sin\theta>0$,在$(0,\frac{\pi}{2})$内余弦函数 $\cos x$ 是减函数,则 $\cos\theta<\cos(\sin\theta)$,故 $\sin(\cos\theta)<\cos(\sin\theta)$.

例 3 求函数 $y=\tan(x+\frac{\pi}{3})$,$x\in[2k\pi+\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{\pi}{3}]$$(k\in\mathbf{Z})$的取值范围.

解 由

$$2k\pi+\frac{\pi}{4}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{3},k\in\mathbf{Z}$$

知
$$2k\pi+\frac{7\pi}{12}\leqslant x+\frac{\pi}{3}\leqslant 2k\pi+\frac{2\pi}{3},k\in\mathbf{Z}$$

因正切函数在$[2k\pi+\frac{7\pi}{12},2k\pi+\frac{2\pi}{3}]$$(k\in\mathbf{Z})$上是增函数,则

$$\tan(2k\pi+\frac{7\pi}{12})\leqslant y\leqslant\tan(2k\pi+\frac{2\pi}{3}),\quad k\in\mathbf{Z}$$

又
$$\tan\frac{7\pi}{12}=\tan\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{3}+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\frac{\pi}{3}\cdot\tan\frac{\pi}{4}}=-(2+\sqrt{3})$$

故函数 $y=\tan\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$在$\left[2k\pi+\frac{\pi}{4},2k\pi+\frac{\pi}{3}\right]$上的取值范围为$[-2-\sqrt{3},-\sqrt{3}]$.

(2)三角函数的周期性及应用

由于函数 $y=\sin\omega x$ 与 $y=\cos\omega x$ 的最小正周期为 $T=\frac{2\pi}{|\omega|}$，$y=\tan\omega x$ 与 $y=\cot\omega x$ 的最小正周期为 $T=\frac{\pi}{|\omega|}$，因而在求解三角函数的周期时，应将三角函数式化简为一个函数后再求其周期.在化简时，应特别注意化简前后的定义域有无变化.

例 4 求函数 $y=\sin^4x-\cos^4x$ 的最小正周期.

解 因
$$y=\sin^4x-\cos^4x=(\sin^2x+\cos^2x)\cdot(\sin^2x-\cos^2x)=\sin^2x-\cos^2x=-\cos 2x$$
则函数 $y=\sin^4x-\cos^4x$ 的最小正周期为 π.

例 5 求 $y=\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$的最小正周期.

解 因
$$y=\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\tan\left[\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\right]\cdot\left[1-\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\right]=$$
$$\tan 2\alpha\cdot\left\{1-\cot\left[\frac{\pi}{2}-\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\right]\cdot\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\right\}=2\tan 2\alpha$$
故 $y=\tan\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)+\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$的最小正周期为$\frac{\pi}{2}$.

(3)三角函数的奇偶性及应用

由于"函数 $f(x)$的定义域是关于原点对称的实数集"是"函数 $f(x)$是奇函数(或偶函数)"的必要条件，因而在讨论三角函数的奇偶性时，特别在判断一个三角函数式所构成的函数的奇偶性时，要注意定义域的对称性，特别是要注意函数式变形过程中其定义域是否扩大或缩小，变形后的解析式与原函数是否具有相同的奇偶性.

例 6 讨论函数 $y=\lg(\sin x+\sqrt{\sin^2x+1})$的奇偶性.

解 令 $f(x)=\lg(\sin x+\sqrt{\sin^2x+1})$，则
$$f(-x)=\lg[\sin(-x)+\sqrt{\sin^2x+1}]=\lg(-\sin x+\sqrt{\sin^2x+1})=$$
$$\lg(\sin x+\sqrt{\sin^2x+1})^{-1}=-\lg(\sin x+\sqrt{\sin^2x+1})=-f(x)$$
而 $f(x)$的定义域为 $\mathbf{R}$ 关于原点对称，故函数 $y=\lg(\sin x+\sqrt{\sin^2x+1})$是奇函数.

例 7 判断函数 $f(x)=\frac{\sin x+\cos x}{1+\cot x}$的奇偶性.

解 虽然 $f(x)=\frac{\sin x+\cos x}{1+\cot x}=\frac{\sin x+\cos x}{1+\frac{\cos x}{\sin x}}=\sin x$，但由于 $f(x)$的定义域$\{x\mid x\neq k\pi,k\in\mathbf{Z}\}\cap\{x\mid x\neq k\pi+\frac{3\pi}{4},k\in\mathbf{Z}\}$不关于原点对称，所以函数 $f(x)=\frac{\sin x+\cos x}{1+\cot x}$是非奇非偶函数.

例 8 判断函数 $f(x)=\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin x+\cos x}$在下列区间的奇偶性:(1)$x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq 2k\pi+\pi$、$x\neq 2k\pi-\dfrac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$;(2)$x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$.

解 函数 $f(x)=\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin x+\cos x}$可变形为

$$f(x)=\frac{1-\cos x+\sin x}{1+\cos x+\sin x}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}\left(x\neq 2k\pi-\frac{\pi}{2}\right)}{2\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\tan\frac{x}{2}$$

(i)由于 $x\in\mathbf{R}$ 且 $x\neq 2k\pi+\pi$、$x\neq 2k\pi-\dfrac{\pi}{2}$,$k\in\mathbf{Z}$ 是不关于原点对称的实数集,故原函数是非奇非偶函数;

(ii)由于 $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$时,有 $f(x)=\tan\dfrac{x}{2}$,又因$\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$关于原点对称.故原函数是奇函数.

5.4.7 角的代换与变换——化归思想的运用

角的代换与变换是处理三角问题的两种重要技巧.运用角的代换与变换是运用等价化归来将未知三角问题化归为已知三角问题的重要途径.

课本中有很多公式就是利用角的代换进行等价化归来推导的.例如:

(Ⅰ)利用诱导公式二:$\sin(180^\circ+\alpha)=-\sin\alpha$,$\cos(180^\circ+\alpha)=-\cos\alpha$ 及公式三:$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$,$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$,再用 $-\alpha$ 来代换公式二、三中的 α,便得公式四:

$$\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha,\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha$$

(Ⅱ)利用诱导公式一:$\sin(\alpha+k\cdot 360^\circ)=\sin\alpha$,$\cos(\alpha+k\cdot 360^\circ)=\cos\alpha$ 及公式三,再用 $-\alpha$ 来代换公式一、三中的 α,取 $k=1$,便得公式五

$$\sin(360^\circ-\alpha)=-\sin\alpha,\cos(360^\circ-\alpha)=\cos\alpha$$

(Ⅲ)在公式 $C_{(\alpha+\beta)}$中用 $-\beta$ 代换β,得到 $C_{(\alpha-\beta)}$;在公式 $S_{(\alpha+\beta)}$中,用 $-\beta$ 代换β,得到 $S_{(\alpha-\beta)}$;在公式 $T_{(\alpha+\beta)}$中用 $-\beta$ 代换β,得到 $T_{(\alpha-\beta)}$,……

例 1 很多书中以习题的形式,证明了公式

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)] \quad ①$$

由①请用角的代换推导出这类关于积的三个结论,及关于和、差的几个结论.

解 用 α 代换β,用 β 代换α,由①得

$$\cos\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)] \quad ②$$

又在①中,用$\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ 代换α,用$\dfrac{\pi}{2}-\beta$ 代换β,也可得②.

在①中,用$\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ 代换α,得

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)] \quad ③$$

在①中,用$\dfrac{\pi}{2}-\beta$ 代换β,得

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)] \quad ④$$

在①,②,③,④中,用$\frac{\alpha+\beta}{2}$代换 α,用$\frac{\alpha-\beta}{2}$代换 β,得

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \quad ⑤$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \quad ⑥$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \quad ⑦$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \quad ⑧$$

例 2 设 $\beta\neq 0$,求证

$$\sin\alpha+\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha+2\beta)+\sin(\alpha+3\beta)=\frac{\sin 2\beta\cdot\sin(\alpha+\frac{3}{2}\beta)}{\sin\frac{\beta}{2}} \quad ⑨$$

并由⑨用角的代换推导出一些结果来.

解 由

$$左边=\csc\frac{\beta}{2}[\sin\alpha\cdot\sin\frac{\beta}{2}+\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin\frac{\beta}{2}+\sin(\alpha+2\beta)\cdot\sin\frac{\beta}{2}+\sin(\alpha+3\beta)\cdot\sin\frac{\beta}{2}]$$

运用④式及⑧式,得

$$\begin{aligned}左边=&\csc\frac{\beta}{2}\{-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\frac{\beta}{2})-\cos(\alpha-\frac{\beta}{2})]-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\frac{3\beta}{2})-\cos(\alpha+\frac{\beta}{2})]-\\&\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\frac{5\beta}{2})-\cos(\alpha+\frac{3\beta}{2})]-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\frac{7\beta}{2})-\cos(\alpha+\frac{5\beta}{2})]\}=\\&\csc\frac{\beta}{2}[\frac{1}{2}\cos(\alpha-\frac{\beta}{2})-\frac{1}{2}\cos(\alpha+\frac{7\beta}{2})]=\frac{\sin 2\beta\cdot\sin(\alpha+\frac{3}{2}\beta)}{\sin\frac{\beta}{2}}=右边\end{aligned}$$

故⑨式得证.

在⑨式中,用$\frac{\pi}{2}+\alpha$ 代换α,得

$$\cos\alpha+\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)+\cos(\alpha+3\beta)=\frac{\sin 2\beta\cdot\cos(\alpha+\frac{3\beta}{2})}{\sin\frac{\beta}{2}} \quad ⑩$$

在⑨中,用$\frac{\pi}{2}+\alpha$ 代换α,用 $\pi+\beta$ 代换β,得

$$\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha+2\beta)-\cos(\alpha+3\beta)=\frac{\sin 2\beta\cdot\sin(\alpha+\frac{3\beta}{2})}{\cos\frac{\beta}{2}} \quad ⑪$$

在⑨中,用 2α 代换β,得

$$\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\sin 7\alpha=\frac{\sin^2 4\alpha}{\sin\alpha} \quad ⑫$$

书本中也有许多问题是利用角的变换进行等价化归来处理的.例如:

(i)在一些书本中求解 $\sin 75°$、$\sin 15°$、$\cos 15°$ 等的值时,是利用 $75° = 45° + 30°$,$15° = 45° - 30°$ 或 $15° = 90° - 75°$ 等角的变换处理的.

(ii)在利用诱导公式求解很多问题时,都利用了角的变换.

(iii)有些问题求解时,利用 $2\alpha = (\alpha - \beta) + (\alpha + \beta)$,$\beta = (\alpha + \beta) - \alpha$ 来求解,……

运用角的恒等变换,发现角与角之间的关系,如 $\alpha = 2 \cdot \frac{\alpha}{2}$,$\alpha = \frac{2\alpha}{2}$,$\alpha = \alpha + \beta - \beta$,$2\alpha = (\alpha + \beta) + (\alpha - \beta)$,$2\alpha + \beta = (\alpha + \beta) + \alpha$,$(\frac{\pi}{4} + \alpha) + (\frac{\pi}{4} - \alpha) = \frac{\pi}{2}$ 等,常常在解决三角问题中起到重要的作用.

例 3 利用诱导公式证明:$\sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = -\cos\alpha$.

证明 由 $\sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = \sin[\pi + (\frac{\pi}{2} - \alpha)] = -\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = -\cos\alpha$,即证.

注 有的书中上述公式是要求利用和(差)公式证明的,这里利用角的变换而证.

例 4 利用和角公式证明:$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2}$.

证明 由

$$\cos\alpha = \cos(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}) = \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\alpha}{2} =$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = \cos^2\frac{\alpha}{2} - (1 - \cos^2\frac{\alpha}{2}) = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$$

有

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos\alpha}{2}$$

注 有的书中是利用 $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ 及角的代换而证的.

例 5 已知 $\frac{\pi}{2} < \beta < \alpha < \frac{3\pi}{4}$,$\cos(\alpha - \beta) = \frac{12}{13}$,$\sin(\alpha + \beta) = -\frac{3}{5}$,求 $\sin 2\alpha$ 的值.

解 因 $\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{3\pi}{4}$,$\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{4}$,$\beta < \alpha$,则 $0 < \alpha - \beta < \frac{\pi}{4}$,$\pi < \alpha + \beta < \frac{3\pi}{2}$,即

$$\sin(\alpha - \beta) = \sqrt{1 - \cos^2(\alpha - \beta)} = \frac{5}{13}$$

$$\cos(\alpha + \beta) = -\sqrt{1 - \sin^2(\alpha + \beta)} = -\frac{4}{5}$$

故

$$\sin 2\alpha = \sin[(\alpha - \beta) + (\alpha + \beta)] = \sin(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) \cdot \sin(\alpha + \beta) =$$

$$\frac{5}{13} \times (-\frac{4}{5}) + \frac{12}{13} \times (-\frac{3}{5}) = -\frac{56}{65}$$

例 6 已知 $3\sin\beta = \sin(2\alpha + \beta)$,求证:$\tan(\alpha + \beta) = 2\tan\alpha$.

证明 注意到题中涉及角 α,β,$\alpha + \beta$,$2\alpha + \beta$,如果运用角的变换 $2\alpha + \beta = (\alpha + \beta) + \alpha$,$\beta = (\alpha + \beta) - \alpha$,则可简捷证明如下:

由 $3\sin\beta = \sin(2\alpha + \beta)$,有 $3\sin[(\alpha + \beta) - \alpha] = \sin[(\alpha + \beta) + \alpha]$,即

$$3\sin(\alpha + \beta) \cdot \cos\alpha - 3\cos(\alpha + \beta) \cdot \sin\alpha = \sin(\alpha + \beta) \cdot \cos\alpha + \cos(\alpha + \beta) \cdot \sin\alpha$$

亦即

$$\sin(\alpha + \beta) \cdot \cos\alpha = 2\cos(\alpha + \beta) \cdot \sin\alpha$$

因 $\cos(\alpha + \beta) \cdot \sin\alpha \neq 0$,故有 $\tan(\alpha + \beta) = 2\tan\alpha$.

5.4.8 三角式余弦定理——特殊与一般转换思想的运用

有的书本在"三角函数的和差化积"中，有这样一道例题：求 $\sin^2 10° + \cos^2 40° + \sin 10°\cos 40°$的值.

书本中通过运用降幂公式、积化和差公式与和差化积公式求得了结果为$\frac{3}{4}$.其实此式也可改写成

$$\sin^2 10° + \sin^2 50° - 2\sin 10°\sin 50°\cos 120° = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \sin^2 120° \qquad ①$$

注意到 $10° + 50° + 120° = 180°$，若令 $a = \sin 10°$，$b = \sin 50°$，$c = \sin 120°$，则以 a，b，c 为边构成的三角形的余弦定理的形式之一即为①式. 由此，我们运用特殊向一般转换的思想方法，可知

若 $\alpha,\beta > 0$，且 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{3}$，则

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin\alpha\sin\beta = \frac{3}{4} \qquad ②$$

若 $\alpha,\beta > 0$，且 $\alpha + \beta = \frac{2\pi}{3}$，则

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos\alpha\cos\beta = \frac{3}{4} \qquad ③$$

若 $\alpha,\beta > 0$，且 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{6}$，则

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sqrt{3}\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{4} \qquad ④$$

若 $\alpha,\beta > 0$，且 $\alpha + \beta = \frac{5}{6}\pi$，则

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \sqrt{3}\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{4} \qquad ⑤$$

更一般地，由上述各式，可获得如下结论：

在$\triangle ABC$ 中，有

$$\sin^2 A + \sin^2 B - 2\sin A\sin B\cos C = \sin^2 C \qquad ⑥$$

②～⑥式均可用类似①式的证法来证明. 又由⑥式有

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos C(\sin A\sin B - \cos C) = 1$$

再注意到

$$\sin A\sin B - \cos C = \sin A\sin B + \cos(A + B) = \cos A\cos B$$

即可得到以下的结论：

在$\triangle ABC$ 中，有

$$\cos^2 A + \cos^2 B + 2\cos A\cos B\cos C = \sin^2 C \qquad ⑦$$

我们将⑥式或⑦式称为三角式余弦定理.

我们再运用一般向特殊转换的思想方法来看一看②～⑦式的应用.

例 1　求 $\sin^2 20° + \cos^2 80° + \sqrt{3}\sin 20°\cos 80°$的值.

解　由式④或式⑤，可得原式 $= \frac{1}{4}$.

例 2 求证：$\cos^2 A+\cos^2(60^\circ-A)+\cos^2(60^\circ+A)=\frac{3}{2}$.

证明 由式③，有

$$\cos^2(60^\circ-A)+\cos^2(60^\circ+A)=\frac{3}{4}-\cos(60^\circ-A)\cos(60^\circ+A)=$$

$$\frac{3}{4}-(\cos^2 60^\circ-\sin^2 A)(\text{弦函数的“平方差”公式})=$$

$$\frac{3}{4}-\frac{1}{4}+(1-\cos^2 A)=\frac{3}{2}-\cos^2 A$$

故原等式成立.

例 3 在$\triangle ABC$中，求证：$\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$.

证明 由⑤式，有

$$\sin^2 A+\sin^2 B+\cos^2 C-2\sin A\sin B\cos C=1 \qquad (*)$$

注意到$\frac{A}{2}+\frac{B}{2}+(\pi-\frac{A}{2}-\frac{B}{2})=\pi$，在以$\frac{A}{2}$、$\frac{B}{2}$、$\pi-\frac{A+B}{2}=\pi-\frac{\pi-C}{2}=\frac{\pi}{2}+\frac{C}{2}$为内角的三角形中运用式$(*)$，有

$$\sin^2\frac{A}{2}+\sin^2\frac{B}{2}+\sin^2\frac{C}{2}+2\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}=1 \qquad (*')$$

式$(*')$可化为

$$\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

例 4 若x,y,z均为锐角，且满足等式$\cos x+\cos y+\cos z=1+4\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\cdot\sin\frac{z}{2}$，求证$x+y+z=\pi$.

证明 由式$(*')$可知，已知等式可变形为

$$\sin^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{y}{2}+\sin^2\frac{z}{2}+2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2}\sin\frac{z}{2}=1 \qquad ①$$

注意到$\frac{x}{2}+\frac{y}{2}+(\pi-\frac{x+y}{2})=\pi$，则由式⑦，有

$$\cos^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{y}{2}+\cos^2\frac{x+y}{2}-2\cos\frac{x}{2}\cos\frac{y}{2}\cos\frac{x+y}{2}=1 \qquad ②$$

①+②得
$$\left(\sin\frac{z}{2}-\cos\frac{x+y}{2}\right)\left(\sin\frac{z}{2}+\cos\frac{x-y}{2}\right)=0$$

因x,y,z均为锐角，则

$$\sin\frac{z}{2}+\cos\frac{x-y}{2}\neq 0$$

即$\sin\frac{z}{2}-\cos\frac{x+y}{2}=0$. 从而得到$x+y+z=\pi$.

例 5 在$\triangle ABC$中，若$\sin C=\cos A+\cos B$，求证A,B中必有一直角.

证明 将$\sin C=\cos A+\cos B$两边平方，得

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B=1 \qquad ①$$

又由式⑦，有

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C+2\cos A\cos B\cos C=1 \qquad ②$$

①－②得 $\cos A\cos B(1-\cos C)=0$. 显然 $1-\cos C\neq 0$，则 $\cos A\cos B=0$. 故 A,B 中必有一个直角.

例 6 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\cos 3A+\cos 3B+\cos 3C=1$，求证 $\triangle ABC$ 必为一个含 120° 角的三角形.

证明 注意到 $\frac{3\pi-3A}{2}+\frac{\pi-3B}{2}+\frac{\pi-3C}{2}=\pi$，由式⑦，有

$$\cos^2\frac{3\pi-3A}{2}+\cos^2\frac{\pi-3B}{2}+\cos^2\frac{\pi-3C}{2}+$$
$$2\cos\frac{3\pi-3A}{2}\cos\frac{\pi-3B}{2}\cos\frac{\pi-3C}{2}=1$$

即
$$\sin^2\frac{3A}{2}+\sin^2\frac{3B}{2}+\sin^2\frac{3C}{2}-2\sin\frac{3A}{2}\sin\frac{3B}{2}\sin\frac{3C}{2}=1$$

又 $\cos 3A+\cos 3B+\cos 3C=1$，由半角公式可得

$$\sin^2\frac{3A}{2}+\sin^2\frac{3B}{2}+\sin^2\frac{3C}{2}=1$$

即
$$\sin\frac{3A}{2}\sin\frac{3B}{2}\sin\frac{3C}{2}=0$$

注意到 A,B,C 为三角形的内角，则上式左端因子中必有一个为零，所以 A,B,C 中必有一个为 120°.

5.4.9 弦函数的“平方差”公式——整体思想的运用

从整体结构入手来思考问题或用整体组合观点看待数学问题、把握数学问题的思想方法称为整体思想方法. 用整体思想考虑问题，能更容易看清问题的实质，提高“宏观调控”的能力.

例如，我们学习了两角和与差的三角函数后，从整体结构的组成来考虑 $\sin(\alpha+\beta)$，$\sin(\alpha-\beta)$，$\cos(\alpha+\beta)$，$\cos(\alpha-\beta)$之间的商时，可获得两角和与差的正切、余切公式，而考虑它们的乘积时，便可获得弦函数的“平方差”公式

$$\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) \quad ①$$
$$\cos^2\alpha-\cos^2\beta=\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha) \quad ②$$
$$\cos^2\alpha-\sin^2\beta=\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) \quad ③$$

这里，我们仅给出式①的推导

$$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=(\sin\alpha\cos\beta)^2-(\cos\alpha\sin\beta)^2=$$
$$\sin^2\alpha(1-\sin^2\beta)-(1-\sin^2\alpha)\sin^2\beta=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$$

以上的弦函数的“平方差”公式结构整齐，容易记忆. 灵活地运用它们，可减少一些繁杂的和差化积、积化和差、降幂等运算，对某些三角问题有化繁为简、化难为易的作用. 显然，在运用弦函数的“平方差”公式时，离不开整体思想方法的灵活运用.

例 1 求证 $\cos 3\theta=4\cos\theta\cos(60^\circ-\theta)\cos(60^\circ+\theta)$.

证明
$$\cos 3\theta=\cos(2\theta+\theta)=\cos 2\theta\cos\theta-\sin 2\theta\sin\theta=$$
$$(2\cos^2\theta-1)\cos\theta-2\cos\theta(1-\cos^2\theta)=$$
$$4\cos^3\theta-3\cos\theta=4\cos\theta(\cos^2\theta-\frac{3}{4})=$$

$$4\cos\theta(\cos^2\theta-\cos^2 30°)=4\cos\theta\sin(30°-\theta)\sin(30°+\theta)=$$
$$4\cos\theta\cos(60°-\theta)\cos(60°+\theta)$$

注 同理可证得

$$\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta=4\sin\theta\sin(60°-\theta)\sin(60°+\theta)$$

例 2 求 $\sin 10°\sin 30°\sin 50°\sin 70°$的值.

解 原式 $=\frac{1}{2}\sin 10°\sin(60°-10°)\sin(60°+10°)=\frac{1}{2}\sin 10°(\sin^2 60°-\sin^2 10°)=$

$$\frac{1}{8}(3\sin 10°-4\sin^3 10°)=\frac{1}{8}\sin 30°=\frac{1}{16}$$

例 3 (Ⅰ)求 $\sin^2 10°+\cos^2 40°+\sin 10°\cos 40°$的值;

(Ⅱ)求证 $\cos^2 A+\cos^2(60°-A)+\cos^2(60°+A)=\frac{3}{2}$.

(Ⅰ)解

原式 $=1-\cos^2 10°+\cos^2 40°+\sin(30°-20°)\cdot\sin(30°+20°)=$

$$1+\sin(10°+40°)\sin(10°-40°)+(\sin^2 30°-\sin^2 20°)=$$

$$1-\frac{1}{2}\sin 50°+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}(1-\cos 40°)=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\sin 50°+\frac{1}{2}\sin 50°=\frac{3}{4}$$

(Ⅱ)证明 由左边 $=\cos^2 A+\cos^2(60°-A)+1-\sin^2(60°+A)=$

$$\cos^2 A+1+\cos[(60°-A)+(60°+A)]\cos[(60°-A)-(60°+A)]=$$

$$\cos^2 A+1+\cos 120°\cos 2A=\cos^2 A+1-\frac{1}{2}(2\cos^2 A-1)=\frac{3}{2}=\text{右边}$$

故原式成立.

注 有的书在解答上述例题时,利用了和差化积等运算,这里却没有用到.

例 4 设 A,B,C 均为锐角,且 $\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2 C=1$,求证 $\frac{\pi}{2}<A+B+C<\pi$.

证明 因 $\sin^2 A=1-\sin^2 B-\sin^2 C=\cos^2 B-\sin^2 C=\cos(B-C)\cos(B+C)>0$,又由 $-\frac{\pi}{2}<B-C<\frac{\pi}{2}$,$\cos(B-C)>0$.有 $\cos(B+C)>0$.而 $0<B+C<\pi$,则 $B+C$ 也为锐角,故 $A+B+C<\pi$.

又 $|B-C|<\frac{\pi}{2}$,$|B-C|<B+C$,即

$$\cos(B-C)=\cos|B-C|>\cos(B+C)$$

则

$$\sin^2 A=\cos(B-C)\cos(B+C)>\cos^2(B+C)=\sin^2\left[\frac{\pi}{2}-(B+C)\right]$$

由 A 与 $B+C$ 均为锐角,可知 $\sin A>\sin\left[\frac{\pi}{2}-(B+C)\right]$,即 $A>\frac{\pi}{2}-(B+C)$,即 $A+B+C>\frac{\pi}{2}$,故 $\frac{\pi}{2}<A+B+C<\pi$.

5.4.10 三角中的三倍角公式——变换思想的运用

有的书本在"二倍角的正弦、余弦、正切"内容介绍时,也以习题的形式介绍了如下三倍角公式

$$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta \qquad ①$$

$$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \qquad ②$$

如果我们运用等价变换的思想方法对①、②进行因式分解，并运用和差化积(或弦函数的"平方差"公式)与二倍角公式，则有

$$\sin 3\theta = 4\sin\theta\left(\frac{3}{4} - \sin^2\theta\right) = 4\sin\theta\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \sin^2\theta\right] =$$

$$4\sin\theta(\sin 60^\circ + \sin\theta)(\sin 60^\circ - \sin\theta) =$$

$$4\sin\theta\sin(60^\circ - \theta)\sin(60^\circ + \theta) \qquad ③$$

(或 $\sin 3\theta = 4\sin\theta\sin(120^\circ + \theta)\sin(120^\circ - \theta)$)

同理 $$\cos 3\theta = 4\cos\theta\cos(60^\circ - \theta)\cos(60^\circ + \theta) \qquad ④$$

在求解某些正弦、余弦、正切函数连乘的问题时，若能运用等价变换的思想方法将其化为式③或式④右端的形式，则我们可根据式③或式④迅速求解.

例 1 求下列各式的值：

(Ⅰ)$\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ$；(Ⅱ)$\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 80^\circ$；(Ⅲ)$\tan 10^\circ\tan 50^\circ\tan 70^\circ$.

略解 直接由公式③、④，可求得(1)原式 $=\frac{1}{8}$；(2)原式 $=\frac{\sqrt{3}}{8}$；(3)原式 $=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

例 2 (Ⅰ)求证：$\sin 15^\circ\sin 30^\circ\sin 75^\circ = \frac{1}{8}$；

(Ⅱ)求 $\cos 10^\circ\cos 30^\circ\cos 50^\circ\cos 70^\circ$ 的值.

显然，直接由公式③、④即可求解(略).

例 3 三角函数 $\sin 15^\circ\sin 30^\circ\sin 75^\circ$ 的值等于(　　).

(A)$\frac{\sqrt{3}}{4}$　　(B)$\frac{\sqrt{3}}{8}$　　(C)$\frac{1}{8}$　　(D)$\frac{1}{4}$

解 选(B)，因为

$$\sin 15^\circ\sin 30^\circ\sin 75^\circ = \frac{4\cos 30^\circ\sin 15^\circ\sin 45^\circ\sin 75^\circ}{4\sin 45^\circ} = \frac{\cos 30^\circ\sin 45^\circ}{4\sin 45^\circ} = \frac{1}{4}\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

例 4 不查表，求值：$\tan 6^\circ\tan 42^\circ\tan 66^\circ\tan 78^\circ$.

解 $$\text{原式} = \frac{\tan 6^\circ\tan 54^\circ\tan 66^\circ}{\tan 54^\circ} \times \frac{\tan 18^\circ\tan 42^\circ\tan 78^\circ}{\tan 18^\circ} = \frac{\tan 18^\circ}{\tan 54^\circ} \times \frac{\tan 54^\circ}{\tan 18^\circ} = 1$$

例 5 不查表，求值：$\sin 105^\circ\cos 75^\circ$.

解 $$\text{原式} = \frac{4\sin 15^\circ\sin 105^\circ\sin 135^\circ}{4\sin 15^\circ\sin 45^\circ} \times \frac{4\cos 15^\circ\cos 45^\circ\cos 75^\circ}{4\cos 15^\circ\cos 45^\circ} =$$

$$\frac{\sin 45^\circ}{4\sin 15^\circ\sin 45^\circ} \times \frac{\cos 45^\circ}{4\cos 15^\circ\cos 45^\circ} = \frac{1}{8\sin 30^\circ} = \frac{1}{4}$$

例 6 求值：$\cos 24^\circ\cos 48^\circ\cos 72^\circ\cos 96^\circ\cos 120^\circ\cos 144^\circ\cos 138^\circ$.

解 $$\text{原式} = -\frac{1}{2} \times \frac{4\cos 48^\circ\cos 12^\circ\cos 72^\circ}{4} \times \frac{4\cos 24^\circ\cos 36^\circ\cos 96^\circ}{4} =$$

$$-\frac{1}{32} \times \cos 36^\circ \times \cos 108^\circ = \frac{1}{32} \times \cos 36^\circ \times \cos 72^\circ =$$

$$\frac{1}{64} \times \frac{\sin 72^\circ\cos 72^\circ}{\sin 36^\circ} = \frac{1}{128}$$

综上所述，等价变换思想实际上是保持实质不变的向所要求的方向转化的一种思维方

式. 等价变换思想也是中学两大基本数学思想中的对应思想的重要组成部分. 等价变换的思想方法的灵活运用常体现在我们对问题的透彻分析、善于恒等变形之中. 例如, 对于式③的推导, 我们也可以来用如下等价变换方式

$$\sin 3\theta = \sin 3\theta - \sin\theta + \sin\theta = 2\cos 2\theta\sin\theta + \sin\theta = 2\sin\theta(\cos 2\theta + \cos 60^\circ) =$$
$$2\sin\theta \times 2\cos(\theta + 30^\circ)\cos(\theta - 30^\circ) = 4\sin\theta\sin(60^\circ - \theta)\sin(60^\circ + \theta)$$

5.4.11　余弦定理的简单应用——转换思想的运用

余弦定理是三角中的一个重要定理. 如果我们运用转换思想方法来看待问题, 认识到数学问题之间是普遍联系的特点, 可以发现余弦定理的应用非常广泛. 这里, 介绍如何用余弦定理在处理书本中的几个问题.

(1)用余弦定理证公式 $C_{\alpha\pm\beta}$

课本中是通过作辅助角 $-\beta$, 然后根据两个三角形全等和两点间距离公式来证明公式 $C_{\alpha\pm\beta}$的. 这里, 我们运用单位圆和两点间距离公式, 应用余弦定理给出如下的证明:

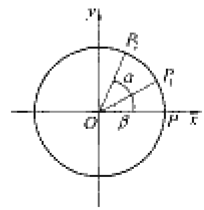


图 26

证明　如图 26 作单位圆 O, 设 α, β 角($\alpha > \beta$, 且 $\alpha - \beta \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}$)的始边为 Ox, 交圆 O 于 P, 终边分别交圆 O 于 P_1 和 P_2, 则它们的坐标是: $P_1(\cos\beta, \sin\beta)$, $P_2(\cos\alpha, \sin\alpha)$. 由余弦定理, 得

$$\cos(\alpha - \beta) = \frac{|OP_1|^2 + |OP_2|^2 - |P_1P_2|^2}{2|OP_1|\cdot|OP_2|} = \frac{2 - (\cos\alpha - \cos\beta)^2 - (\sin\alpha - \sin\beta)^2}{2} =$$
$$\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

将上式中的 $-\beta$ 用 β 代替, 就得到

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

(2)用余弦定理证明正弦定理与三角形面积公式(海伦公式)

在△ABC 中, 有

$$\sin A = \sqrt{1 - \cos^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)^2} = \frac{\sqrt{(2bc)^2 - (b^2 + c^2 - a^2)^2}}{2bc} =$$
$$\frac{\sqrt{[(b+c)^2 - a^2][a^2 - (b-c)^2]}}{2bc} =$$
$$\frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}}{2bc} =$$
$$\frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{bc}$$

其中
$$p = \frac{1}{2}(a + b + c)$$

即
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{abc}{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

同理可得

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{abc}{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

即
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{abc}{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$
$$S_{\triangle}=\frac{1}{2}bc\cdot\sin A=\frac{1}{2}bc\cdot\frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{bc}=$$
$$\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$
又因为$\frac{abc}{2S_{\triangle}}=2R$，从而有$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

(3)推导三角式余弦公式

将正弦定理代入余弦定理中，即将 $a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$ 代入 $a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos A$ 中，得
$$\sin^2A=\sin^2B+\sin^2C-2\sin B\sin C\sin A \tag{①}$$
同理，可得其余两式(略).

注意到 $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$，式①又可写为
$$1=\cos^2A+\cos^2B+\cos^2C+2\cos B\cos C\cos A \tag{②}$$
式①与式②的应用广泛，下面举两例加以说明.

例 1 在$\triangle ABC$ 中，$\sin^2A+\sin^2B+\sin^2C=2$，求证：$\triangle ABC$ 是直角三角形.

证明 由已知得 $\sin^2A+\sin^2B-\sin^2C=2\cos^2C$，由三角式余弦定理有
$$\sin^2A+\sin^2B-\sin^2C=2\sin A\sin B\cos C$$
则
$$2\sin A\sin B\cos C=2\cos^2C$$
即
$$\cos C(\cos C-\sin A\sin B)=0$$
但
$$\cos C=-\cos(A+B)=\sin A\sin B-\cos A\cos B$$
即
$$\cos A\cos B\cos C=0$$
故
$$\cos A=0,\text{或}\cos B=0,\text{或}\cos C=0$$
由于 A，B，C 是三角形的三个内角，所以 A，B，C 中有且只有一个等于$\frac{\pi}{2}$，于是结论获证.

例 2 设$\triangle ABC$ 的内角 $B=\frac{\pi}{3}$，求 $\cos A\cos C$ 的最大值.

解 $\cos A\cos C$ 取最大值时，A，C 必均为锐角，于是可以以$\frac{\pi}{2}-A$、$\frac{\pi}{2}-C$、$A+C$ 为三角形的三个内角作三角形，再注意到三角式余弦定理及 $B=\frac{\pi}{3}$，有
$$\cos A\cos C=2\cos A\cos C\cos B=-2\sin(\frac{\pi}{2}-A)\sin(\frac{\pi}{2}-C)\cos(A+C)=$$
$$\sin^2(A+C)-\sin^2(\frac{\pi}{2}-A)-\sin^2(\frac{\pi}{2}-C)=\sin^2B-(\cos^2A+\cos^2C)$$
又由 $\cos^2A+\cos^2C\geqslant 2\cos A\cos C$（当 $A=C$ 时等号成立），则 $\cos A\cos C\leqslant\sin^2B-2\cos A\cos C$. 即
$$\cos A\cos C\leqslant\frac{1}{3}\sin^2B=\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$$
故所求的最大值为$\frac{1}{4}$，此时 $A=C=\frac{\pi}{3}$.

最后,我们顺便指出,由式①可将下述问题,“求 $\sin^2 10° + \cos^2 40° + \sin 10° \cos 40°$ 的值”推广得到一般性结论:

结论 1 对角 α,β 及 $k\in\mathbf{R}$,若 $\cos(\alpha+\beta)=\frac{k}{2}$,或 $\cos(\alpha-\beta)=-\frac{k}{2}$,则

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+k\sin\alpha\sin\beta=1-(\frac{k}{2})^2$$

结论 2 对角 α,β 及 $k\in\mathbf{R}$,若 $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{k}{2}$,或 $\cos(\alpha-\beta)=\frac{k}{2}$,则

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+k\cos\alpha\cos\beta=1-(\frac{k}{2})^2$$

5.5 立体几何问题

5.5.1 平面的属性与描述——符号化与变元表示思想的运用

平面是几何中最基本的概念之一,在数学中,对这一类概念是不加以定义而只进行描述的.为了正确地掌握平面的概念,我们须深入理解平面的属性,并学会用各种方式描述这些属性:即用图形语言或文字语言的方式,特别是用符号语言的方式来描述.

(1)平面的非物属性

几何中的平面与点、直线一样,是一个抽象的概念,谁也看不见、摸不着它.日常生活中光滑的桌面,平静的水面,铺平了的纸张等虽然给我们平面的形象,但它们并不就是立体几何中的平面.作为几何概念的平面已经不再具有平面形象物体的一切具体属性,不计厚薄,不计质量.不能说铺得很平的一张白纸是一个平面,不能说一个平面的质量可以等于一个具体数值,不能说将 100 个平面重合在一起比 10 个平面重合在一起厚一些,等等.平面没有任何物理的或化学的等的属性,特别地,当两个平面重合时就形成一个平面,不存在什么“平面变厚”的问题,也不存在质量多少的问题等等.

(2)平面的延展属性

平面是无限延展的,这是平面最本质的一个属性,也是我们正确理解平面概念的关键,通常把平面画成平行四边形(有时也根据需要画成三角形或其他平面图形),这仅是用所画的图形表示一个无限延展的平面的位置,并不意味着平面就是平行四边形(或其他形状的平面图形),平面没有边界,也无所谓面积,更谈不上有面积数值了.不能把平面同具体的平面图形混同起来.

正因为平面是无限延展着的,也就无需再延展平面.“延展平面 α”与“延长直线 a”的说法都是错误的.所以,在以后的学习中,只要看到表示平面的图形、符号或文字,就应当立即联想到“平面是无限延展着的”.

例 1 对于图 5.5.1 有人认为:若表示直线在平面 α 内,则不恰当,否则应当延展平面 α,使图中的直线 a 画在平行四边形的内部;有人认为:它是表示直线 a 不在平面 α 内.你的认为是怎样的?

解 以上两种认为都有值得肯定的方面,但都存在不完善的方向.对于图 27 表示直线 a 在平面 α 内是不恰当的,应把图中的直线 a 画在平行四边形的内部,这是值得肯定的,但

说延展平面 α 则是不对的,应当把平行四边形画大一点.

对于第二种认为,图27所表示的是直线 a 不在平面 α 内是值得肯定的,但要指出应画成图28的情形.

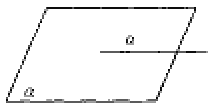


图 27

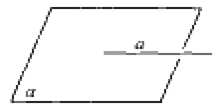


图 28

(3)平面的含线属性

在这里,平面的含线性就是指直线在平面内的性质:如果直线上所有的点都在某一个平面内,那么就称这条直线在这个平面内.但是,直线上有无数个点,怎样才能判定一条直线在某一个平面内呢?在日常生活中,我们看到,一根笔直的木条用两颗钉子就能钉在平的墙面上.因此,实践告诉我们:只要直线上有两个点在一个平面内时,这条直线上所有的点就都在这个平面内了,从而这条直线就在这个平面内.这是公理1给出的平面的第一个基本性质.

公理1是判定直线在平面内的依据,由于直线、平面都是无数个点组成的集合,因而公理1的含义如图29所示,也可以借用集合的语言符号表示为

$$A\in l, B\in l, A\in\alpha, B\in\alpha\Rightarrow l\subsetneq\alpha$$

图 29

根据直线在平面内的意义,我们可以进行如下的推理,判定某点在平面内:点在直线上,直线在平面内,则点在平面内,用符号表示为

$$A\in l, l\subsetneq\alpha\Rightarrow A\in\alpha$$

(4)平面的相交属性

如果两个平面 α 和 β 有一条公共直线 l,那么就称平面 α 和平面 β 相交,交线是 l,同样,借用集合语言符号表示为

$$l\subsetneq\alpha, l\subsetneq\beta\Rightarrow\alpha\cap\beta=l$$

要判定两个平面相交,如果找到两个平面的一个公共点,根据平面的无限延展性,那么这两个平面就有一条并且只有一条通过这个点的公共直线,即两个平面相交于通过这一点的一条直线.这是公理2给出的平面的第二个基本性质.

公理2是判定两个平面相交的依据.同样,公理2的含义如图30所示,也可以借用集合语言符号表示为

$$P\in\alpha\cap\beta\Rightarrow\alpha\cap\beta=l \text{ 且 } P\in l$$

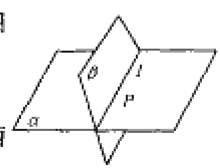


图 30

如果两个平面有两个公共点,那么这两个平面相交于由这两点确定的一条直线,这也可以借用集合语言符号表示为

$$A\in\alpha, B\in\alpha, A\in\beta, B\in\beta\Rightarrow\alpha\cap\beta=AB$$

根据两个平面相交的意义,我们可以进行如下推理:

分别在两个相交平面内的点一定在相交平面的交线上,用集合语言符号表示为

$$A\in\alpha, A\in\beta, \text{且 } \alpha\cap\beta=l\Rightarrow A\in l$$

(5)平面的确定属性

"确定一个平面"指的是"有一个平面,且只有一个平面",即平面是存在的,并且也是唯一的.在这里,"确定"与"有且只有"是同义词.

经过不在同一条直线上的三点,有且只有一个平面.这是平面的第三个基本性质(即公理3).根据这条公理,还可推得三个结论:

经过一条直线和这条直线外的一点,有且只有一个平面;

经过两条相交直线,有且只有一个平面;

经过两条平行直线,有且只有一个平面.

公理3及其三个推论是确定平面的依据.它们也都可用集合的符号语言分别表示为:

A,B,C 不共线⇒有且只有一个平面 α,使 $A\in\alpha$,$B\in\alpha$,$C\in\alpha$;

$A\notin a$⇒有且只有一个平面 α,使 $A\in\alpha$,$a\subset\alpha$.

$a\cap b=P$⇒有且只有一个平面 α,使 $a\subset\alpha$,$b\subset\alpha$.

$a/\!/b$⇒有且只有一个平面 α,使 $a\subset\alpha$,$b\subset\alpha$.

在空间如何来确定一个平面呢?作为平面第三个基本性质的公理3及其三个推论给出了确定一个平面的方法.确定平面是我们以后将空间图形问题转化为平面图形问题来解决的重要前提.因此,我们牢牢掌握确定平面的方法.

例2 下面的命题中正确的个数为(　　).

甲:三点确定一个平面.

乙:一条直线和一点确定一个平面.

丙:两条直线确定一个平面.

丁:顺次首尾相接的四条线段一定在一个平面内.

戊:顺次联结四边形各边中点的四边形一定是平面图形.

己:三角形和梯形一定是平面图形.

(A)2　　　　(B)3　　　　(C)4　　　　(D)6

解 应选(A),因命题甲、乙、丙、丁均假.

最后,我们还须指出的是:公理3及其三个推论也是证明两个(或多个)平面重合的依据,还是证明多条直线共面的依据.

5.5.2 公理3的三个推论的证明——公理化思想的运用

在立体几何中,我们所用的研究方法仍是以公理为基础,直接依据图形的点、线、面的关系来研究图形的性质.

立体几何一开始,就给出了关于平面的基本性质的三个公理及公理3的三个推论.下面,我们运用这三个公理证明这三个推论.

推论1 经过一条直线和这条直线外的一点,有且只有一个平面.

证明 首先,设 A 是直线 a 外的一点,在 a 上任取两个不同的点 B,C,根据公理3,经过不共线的三点 A,B,C 有一个平面 α.因为点 B,C 都在平面 α 内,所以根据公理1,直线 a 在平面 α 内.这说明平面 α 是经过直线 a 和点 A 的平面.

其次，因为点 B，C 在直线 a 上，所以经过直线 a 和点 A 的平面一定经过点 A，B，C. 又根据公理3，经过不共线的三点 A，B，C 的平面只有一个，所以经过直线 a 和点 A 的平面只有一个.

推论2 经过两条相交直线，有且只有一个平面.

证明 首先，设两直线 a，b 相交于点 A. 在 a，b 上分别取不同于点 A 的点 B，C，且 $B\in a$，$C\in b$. 根据公理3，经过不在同一直线上的三点 A，B，C 有一个平面 α. 因为直线 a，b 上各有两点在平面 α 内，所以 a，b 均在平面 α 内. 因此，平面 α 是经过两条相交直线 a，b 的平面.

其次，如果过直线 a 和 b 还有另一个平面 β，那么 A，B，C 三点也一定都在平面 β 内. 这样，经过不在同一条直线上的三点 A，B，C 就有 α 和 β 两个平面了，这和公理3相矛盾. 所以，经过两条相交直线 a，b 的平面只有一个.

推论3 经过两条平行直线，有且只有一个平面.

证明 首先，设 a，b 为两条平行直线. 因为当两条直线在同一平面内，且不相交时叫做平行线，所以两条平行直线 a 和 b 必在某个平面 α 内，也就是说，过两条平行直线有一个平面.

其次，如果过两条平行直线 a，b 还有一个平面 β，那么在 a 上的任意一点 A 一定在 β 内，这样过点 A 和直线 b 就有 α 和 β 两个平面了，这与推论1相矛盾，所以过两平行直线 a 和 b 的平面只有一个.

最后，我们顺便指出，在解或证明每一道题时，每一步都应是非常严格、有充分根据的. 某些同学在进行推理或计算时，在没有理论依据的情况下，依靠直观或主观判断就下了结论. 而不少错误和漏洞恰恰就出在这种"明显"或"直观"上. 况且，即使你的直觉判断是正确的，严格的证明也是必不可少的，这是学好数学非常重要的一步.

5.5.3 空间直线位置关系的识别与证明——类分思想的运用

空间的两条直线有以下三种位置关系：

(i)相交直线——有且仅有一个公共点；

(ii)平行直线——在同一个平面内，没有公共点；

(iii)异面直线——不同在任何一个平面内，没有公共点.

根据如上两直线位置关系的界定，异面直线，指的是不可能找到一个平面能同时包含的两条直线. 但是分别在两个平面内的两条直线未必就是异面直线，因为在两个相交平面内的两条直线的位置关系有相交、平行和异面三种情形，如图31；分别在两个平行平面内的两条直线的位置关系有平行、异面两种情形，如图32中的 A_1B_1 与 DC 平行，A_1C_1 与 BD 异面，AD_1 与 B_1C_1 异面等等. 由此，对于空间中直线的位置关系的讨论应注意分类思想方法的运用.

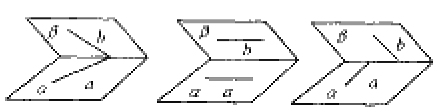


图31

例 1 在正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，与 AD_1 成 $60°$ 角的面对角线的条数是(   ).

(A)4 (B)6 (C)8 (D)10

解 如图 32，因为 $\triangle AD_1B$ 和 $\triangle AD_1C$ 都是正三角形，AB_1，B_1D，CD_1，AC 与 AD_1 均成 $60°$ 角，这四条与 AD_1 均为相交直线；与 AB_1，B_1D_1，CD_1，AC 分别平行的面对角线 C_1D，BD，A_1B，A_1C_1 与 AD_1 均为异面直线，也与 AD_1 成 $60°$ 角，所以应选择(C).

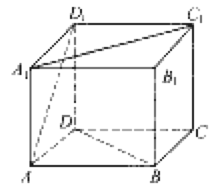


图 32

例 2 在正方体的一个面所在的平面内，任意画一条直线，则与它异面的正方体的棱的条数是(   ).

(A)4 或 5 或 6 或 7 (B)4 或 6 或 7 或 8 (C)6 或 7 或 8 (D)4 或 5 或 6

解 如图 32 所示，在正方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$ 中，在面 $ABCD$ 中画一条直线.

(i)若这直线为一条棱所在的直线，那么与它异面的正方体的棱有 4 条；

(ii)若这直线为一条面对角线所在直线，那么与它异面的正方体的棱有 6 条；

(iii)若这直线为过正方体的一个顶点且不与面对角线平行的直线，则与它异面的正方体的棱有 7 条；

(iv)若这直线为不过正方体顶点且平行于一条面对角线的直线，则与它异面的正方体的棱有 8 条.

所以选(B).

由于两条直线相交或平行时，确定一个平面，因而判定两直线的这两种位置关系可以转化为在一个平面内讨论，而要判定两条直线是异面直线，则需要说明两条直线不能同在任何一个平面内，这往往难以做到，我们常用反证法证明两条直线是异面直线，书本中在证明："过平面外一点与平面内一点的直线，和平面内不经过该点的直线是异面直线"的结论时，就是用反证法证明的.

例 3 如图 33，直线 a，b，c 不共面，且都经过同一点 O，设 M、P 是直线 a 上两点，N 是直线 b 上的一点，Q 是直线 c 上的一点，求证：MN 和 PQ 是异面直线.

证明 用反证法，假设 MN 和 PQ 不是异面直线，则它们必在同一个平面 α 内.

因 $M\in\alpha$，$P\in\alpha$，则 $a\subsetneq\alpha$. 又 $O\in a$，则 $O\in\alpha$. 而 $N\in\alpha$，且 $O\in b$，$N\in b$，则 $b\subsetneq\alpha$，同理 $c\subsetneq\alpha$.

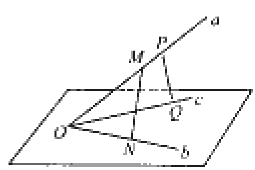


图 33

这样，a，b，c 都在平面 α 内，与已知条件 a，b，c 不共面矛盾. 故 MN 与 PQ 是异面直线.

判定两条直线是异面直线，除了运用反证法外，也可以将课本中已证明的前述结论，作为判别两条直线是异面直线的判定定理：平面内一点与平面外一点的连线和平面内不经过该点的直线是异面直线. 根据这个判定定理，例 3 中 MN 与 PQ 是异面直线也可以如下证明：

设相交直线 a，b 确定一个平面 β，因 $M\in a$，$N\in b$，则 $M\in\beta$，$N\in\beta$，从而 $MN\subsetneq\beta$. 又 $P\subsetneq a$，$a\subsetneq\beta$，则 $P\in\beta$，但 $P\notin MN$，$Q\notin\beta$. 故 MN 与 PQ 是异面直线.

例 4 如图 34，在空间有公共边为 AB 的两个不共面的 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ABD$，联结 CD，试判定 AB 和 CD 的位置关系.

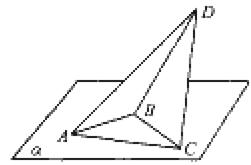


图 34

解 设△ABC 所在平面为 α，则 AB 在平面 α 内，D 在平面 α 外，C 点在平面 α 内，且不在直线 AB 上，根据前面介绍的判定定理，知 AB 和 CD 是异面直线.

5.5.4 线面垂直判定定理的证明——转化思想的运用

"如果一条直线和一个平面内的两条相交直线都垂直，那么这条直线垂直于这个平面."

这是立体几何中直线和平面垂直的判定定理，它是一个非常重要的定理. 同学们在学习这个定理时觉得较难，究其原因，主要是因为同学们尚未掌握解决空间问题的基本思想方法，不能将问题进行恰当的转化. 在该定理的证明过程中，有三个重要的转化步骤：一是根据线面垂直的定义将证明线面垂直转化为证明线线垂直，即教材中设 g 是平面 α 内的任意一条直线. 要证明 $l\perp\alpha$，根据定义，只要证明 $l\perp g$ 就可以了；二是设所给直线均过一点，将异面直线问题转化为相交直线问题. 如图 35，设 l,m,n,g 都通过点 B，从而建立 l,m,n,g 之间的直接联系；三是通过作辅助线将空间问题转化为平面几何问题. 如图 36，在 l 上点 B 的两侧分别取点 A,A'，使 $AB=A'B$，作直线 CD，分别交 m,n,g 于 C,D,E 三点，联结 AC，$AD,AE,A'C,A'D,A'E$，问题转化为证明直线 g 是 AA' 的垂直平分线，通过以上三个步骤，这一空间问题已分别转化为三个熟悉的问题，从而将空间问题转化为平面几何问题而得以解决.

书本中将证明 $l\perp g$ 转化为证明 g 是线段 AA' 的垂直平分线，由于 A、A' 取在 l 上，从而有课本上的证法. 如果将 A',A 取在 g 上，则可将证明 $l\perp g$ 转化为证明 l 是线段 AA' 的垂直平分线，因而有如下的证法：

证法 1 如图 37，在 g 上点 B 的两侧分别取点 A,A'，使 $AB=A'B$，过 A,A' 两点作平行线，分别与直线 m,n 交于点 C,E,D,F，联结 CF,DE. 易证得△$CBD\cong$△EBF，故四边形 $CDEF$ 为平行四边形，且 B 为其中心.

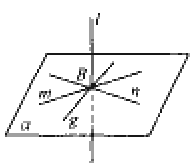


图 35

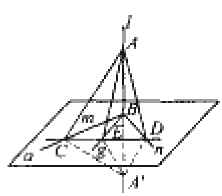


图 36

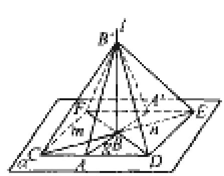


图 37

在 l 上取异于点 B 的另一点 B'，联结 $B'A,B'A',B'C,B'D,B'E,B'F$. 由 $l\perp m,l\perp n$，知 $B'C=B'E,B'D=B'F$，从而有△$CB'D\cong$△$EB'F$. 故 $\angle B'CA=\angle B'EA'$.

在▱$CDEF$ 中，可证得 $AC=A'E$，于是有△$B'CA\cong$△$B'EA'$，那么 $B'A=B'A'$，故 l 是 AA' 的垂直平分线. 即 $l\perp g$，故 $l\perp\alpha$.

转化是解决立体几何问题的基本思想方法之一，要证明 $l\perp g$，还有如下几种转化证法：

证法 2 如图 38，在 m,n 上取 $BC=BD$. 取 CD 的中点 F，联结 AF,BF，则 $BF\perp CD$，设 CD 交 g 于 E. 因 $AB\perp BC,AB\perp BD$，则△$ABC\cong$△ABD，即 $AC=AD$，所以 $AF\perp CD$，则

$$AF^2 = AC^2 - CF^2, \quad BF^2 = BC^2 - CF^2$$

则 $$AF^2 = BF^2 = AC^2 - BC^2 = AB^2$$

即 $$AB \perp BF$$

又 $$AE^2 = AF^2 + EF^2, BE^2 = BF^2 + EF^2$$

故 $$AE^2 - BE^2 = AF^2 - BF^2 = AB^2$$

即 $$AB \perp BE$$

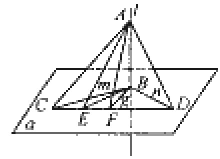


图 38

证法3 当 m,n 不垂直时，在 m 上取点 C，作 $CD \perp n$ 于 D，交 g 于 E，如图 39.

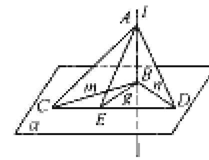


图 39

由 $AB \perp BC, AB \perp BD$，有

$$AC^2 = AB^2 + BC^2, \quad AD^2 = AB^2 + BD^2$$

则 $$AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2 = CD^2$$

即 $$AD \perp CD$$

故 $$AE^2 = AD^2 + DE^2$$

又由 $$AD^2 = AB^2 + BD^2$$

$$BE^2 = BD^2 + DE^2$$

可知 $$AE^2 = BE^2 + AB^2$$

即 $$AB \perp BD$$

当 m 与 n 垂直时，可按证法 1 或证法 2 的方法证明.

如果学了余弦定理，还有如下的简捷证法：

证法4 如图 40，在 l,m,n 上分别取 $AB = BC = BD = a$，设 $CD = b$，$CE = c$，则 $AC = AD = \sqrt{2}a$，有

$$\cos\angle ACE = \frac{\frac{1}{2}CD}{AC} = \frac{b}{2\sqrt{2}a}, \quad \cos\angle BCD = \frac{\frac{1}{2}CD}{BC} = \frac{b}{2a}$$

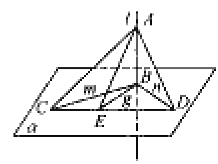


图 40

在 $\triangle ACE$ 和 $\triangle BCE$ 中，由余弦定理，得

$$AE^2 = 2a^2 + c^2 - 2\sqrt{2}ac\cdot\cos\angle ACE = 2a^2 + c^2 - bc$$

$$BE^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cdot\cos\angle BCD = a^2 + c^2 - bc$$

则 $AE^2 - BE^2 = a^2 = AB^2$，故 $AB \perp BE$.

5.5.5 直线和平面所成的角及其求解——转化思想的运用

直线和平面所成的角的概念，由三部分组成：

(i)一条直线和平面平行时，或直线在平面内时，规定直线和平面成 0°的角；

(ii)平面的垂线和平面所成的角规定为 90°；

(iii)平面的一条斜线和平面所成的角定义：这条斜线和它在平面内的射影所成的锐角.

斜线和平面所成的角是转化为用两条相交直线所成的锐角来定义的，其中一条直线就是斜线本身，另一条直线是斜线在平面内的射影. 由于在平面内过斜足的直线有无数条，它们和斜线都组成相交的两条直线，为什么选中射影和斜线这两条相交直线，用它们所成的锐角来定义斜线和平面所成的角？原因是斜线和平面内过斜足的直线所成的一切角中，它是最小的角. 对于已知的斜线来说这个角是唯一确定的，它的大小反映了斜线关于平面的"倾

斜程度".课本中也证明了斜线和平面所成的角具有最小性.

因此,直线和平面所成角 θ 的范围是 $0^\circ \leqslant \theta \leqslant 90^\circ$.

例 1 两条平行线和同一个平面所成的角相等.

证明 由于两条平行线 a、b 和平面 α 有如下几种形式,现分别讨论如下:

(i)当两条平行线中有一条直线 a 和平面 α 平行或在平面内时,过 a 作一平面 β 与 α 相交于 c,此时有 $b // c$,而 $c \subsetneqq \alpha$,则另一条直线 b 一定和此平面 α 平行或在平面内.此时两条直线 a、b 和平面 α 所成的角都是 0° 角,所以它们相等.

(ii)当两条平行线中有一条直线 a 和平面 α 垂直时,由课本例题所证结论,则另一条直线 b 也必定和平面 α 垂直.这时,两条直线和平面所成的角都是 90°,所以它们相等.

(iii)当两条平行线中有一条直线 a 是平面 α 的斜线时,则另一条直线 b 也是平面 α 的斜线.

如图 41,设 a,b 分别与 α 相交于 P,Q,在 a,b 上分别取点 A,C,使 A,C 在平面 α 的同侧,作 $AB \perp \alpha$ 于 B,作 $CD \perp \alpha$ 于 D.联结 PB,QD,则直线 PB、QD 分别是 a,b 在平面 α 内的射影,从而 $\angle APB$,$\angle CQD$ 分别是 a、b 和平面 α 所成的角.

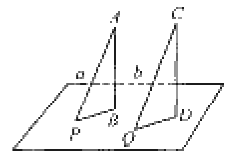


图 41

在 $\triangle APB$ 和 $\triangle CQD$ 中 $\angle ABP = \angle CDQ = 90^\circ$.因 $AP // CQ$,$AB // CD$,且 $\angle PAB$,$\angle QCD$ 的方向相同,从而 $\angle PAB = \angle QCD$,即 $\triangle APB \backsim \triangle CQD$,所以 $\angle APB = \angle CQD$.

故斜线 a,b 和平面 α 所成的角相等.

综上,两条平行线和同一平面所成的角相等.

例 2 如图 42,在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中,O_1 为上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 的中心,求 AO_1 与截面 B_1CD_1 所成的角.

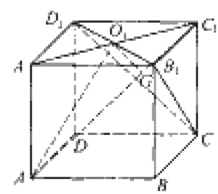


图 42

证明 联结 AC_1,A_1C_1,则 $A_1C_1 \perp B_1D_1$.

由 $AA_1 \perp$ 面 $A_1B_1C_1D_1$,知 A_1C_1 为 AC_1 在面 $A_1B_1C_1D$ 内的射影,由三垂线定理知,$AC_1 \perp B_1D_1$.同理,$AC_1 \perp B_1C$,故 $AC_1 \perp$ 截面 B_1CD_1.

设 AC_1 与面 B_1CD_1 的垂足为 G,联结 O_1G,则 O_1G 为 AO_1 在截面 B_1CD_1 内的射影,即 $\angle AO_1G$ 为 AO_1 与截面 B_1CD_1 所成的角.

设正方体的棱长为 1,则 $AO_1 = \frac{1}{2}\sqrt{6}$.由于 G 为正三角形的中心,则可求得 $O_1G = \frac{1}{6}\sqrt{6}$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle AGO_1$ 中,$\cos\angle AO_1G = \frac{O_1G}{AO_1} = \frac{1}{3}$,故 $\angle AO_1G = \arccos\frac{1}{3}$.从而 AO_1 与截面 B_1CD_1 所成的角为 $\arccos\frac{1}{3}$.

例 3 如图 43,在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中,M 为面对角线 BC_1 的中点,N 为对角线 B_1D 上的分点,且 $B_1N = \frac{1}{3}B_1D$.试求 BD 与平面 BNM 所成的角.

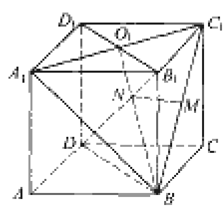


图 43

解 首先找出 $\triangle BMN$ 所在的平面与正方形相截的截面.

将对角面 D_1DBB_1 另画一平面图如图 44.

设 O_1 为上底面 $A_1B_1C_1D_1$ 的中心，则 O_1 为 B_1D_1 的中点，不难证明 BO_1 与 BN 重合且 $BN\perp DB_1$. 于是可知，$\triangle BMN$ 所在平面与正方体的截面就是正三角形截面 A_1BC_1.

再运用三垂线定理与"线面垂直"判定定理可证 $DB_1\perp$ 平面 BA_1C_1，垂足为 N，则 $\angle DBN$ 为 DB 和平面 BMN 所成的角. 从而把立体几何问题转化为对角面 D_1DBB_1 内的平面问题求解.

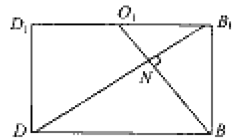


图 44

设正方体的棱长为 1，则 $DB_1=\sqrt{3}$，从而 $DN=\frac{2}{3}\sqrt{3}$，$BN=\frac{2}{3}BO_1=\frac{\sqrt{6}}{3}$. 在图 44 中，由 $\tan\angle DBN=\frac{DN}{BN}=\sqrt{2}$，或 $\sin\angle DBN=\frac{DN}{DB}=\frac{1}{3}\sqrt{6}$，即$\angle DBN=\arctan\sqrt{2}$或 $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}$为所求.

故 BD 与平面 BMN 所成的角为 $\arctan\sqrt{2}$或 $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{3}$.

5.5.6　平面与平面平行、垂直的判定与性质——归纳思想的运用

空间两个不重合的平面的位置关系，按照有无公共点来分，只有平行和相交两种，两平面垂直是相交的一种特殊情形. 如果两个平面没有公共点，则称两个平面互相平行；如果两个平面有一个公共点，则它们就相交于经过这一点的一条直线.

(1)两个平面平行的判定及性质

判定两个平面平行有如下几种方法：

方法 1　直接运用定义，说明两平面无公共点.

方法 2　运用判定定理. 即

$$a\subsetneqq\alpha,b\subsetneqq\alpha,a/\!/\beta,b/\!/\beta,a\cap b=O\Rightarrow\alpha/\!/\beta$$

简言为："线面平行，则面面平行".

方法 3　运用结论：垂直于同一条直线的两个平面平行，即

$$\alpha\perp l,\beta\perp l\Rightarrow\alpha/\!/\beta$$

两个平面平行时，具有以下性质：

(i)两个平行平面中一个平面内的直线必平行于另一个平面(即"面面平行，则线面平行").

(ii)若两个平行平面同时和第三个平面相交，则它们的交线平行(即 $\alpha/\!/\beta,\alpha\cap\gamma=a$，$\beta\cap\gamma=b\Rightarrow a/\!/b$. 简言为："面面平行，则线线平行").

(iii)一条直线垂直于两个平行平面中的一个平面，它也垂直于另一个平面，即

$$\alpha/\!/\beta,l\perp\alpha\Rightarrow l\perp\beta$$

要证明 $l\perp\beta$，根据线面垂直的定义，就是证明 l 和平面 β 内任何一条直线垂直.

如图 45，在平面 β 内任取一条直线 b，经过 b 作一个平面 γ，使 $\gamma\cap\alpha=a$. 由 $\alpha/\!/\beta,\gamma\cap\alpha=a,\gamma\cap\beta=b$，知 $a/\!/b$，又 $l\perp\alpha,a\subsetneqq\alpha$，则 $l\perp a,l\perp b$.

因为 b 是 β 内任意一条直线，所以 $l\perp\beta$.

(iv)夹在两个平行平面间的平行线段相等.

如图 46，若 $\alpha/\!/\beta,A\in\alpha,C\in\alpha,B\in\beta,D\in\beta$，且 $AB/\!/CD$. 此时，AB 与 CD 可确定平面 $\gamma,\gamma\cap\alpha=AC,\gamma\cap\beta=BD$.

因 $\alpha /\!/ \beta$,则 $AC /\!/ BD$,从而四边形 $ABCD$ 是平行四边形,故 $AB = CD$.

由于平行的线段 AB、CD 的任意性,故夹在两平行平面间的平行线段相等.

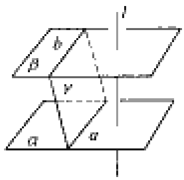


图 45

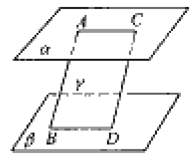


图 46

(2)两个平面垂直的判定与性质

判定两个平面垂直有如下几种方法:

方法 1 运用定义.首先找出两个相交平面所成二面角的平面角,再证明这个平面角是直角,最后根据定义,说明这两个平面互相垂直.

方法 2 运用判定定理.即 $AB\perp\beta$, $AB\subsetneqq\alpha\Rightarrow\alpha\perp\beta$.简言为:"线面垂直,则面面垂直".

方法 3 运用结论:若一个平面与另一个平面的平行线垂直,则这两个平面互相垂直.即 $\alpha\perp l$, $l /\!/ \beta\Rightarrow\alpha\perp\beta$.

事实上,可过 l 作与 β 相交的平面 γ,设 $\beta\cap\gamma=b$,则 $l /\!/ b$,即有 $b\perp\alpha$,故 $\alpha\perp\beta$.

方法 4 运用结论:若共点的三直线两两互相垂直,则它们中每两条确定的三个平面也两两互相垂直.即 $a\perp b\perp c$ 且共点于 O, $a\subsetneqq\alpha$, $c\subsetneqq\alpha$, $c\subsetneqq\beta$, $b\subsetneqq\beta$, $b\subsetneqq\gamma$, $a\subsetneqq\gamma\Rightarrow\alpha\perp\beta$, $\beta\perp\gamma$, $\gamma\perp\alpha$.

事实上,如图 47,由 $b\perp c$, $b\perp a$, $c\subsetneqq\alpha$, $a\subsetneqq\alpha$,有 $b\perp\alpha$,则 $\alpha\perp\beta$, $\gamma\perp\alpha$.

同理,有 $a\perp\beta$, $\gamma\perp\beta$, $\alpha\perp\beta$,故 $\alpha\perp\beta$, $\beta\perp\gamma$, $\gamma\perp\alpha$.

方法 5 运用结论:两平行平面中一个与第三个平面垂直,则另一个平面也与第三个平面垂直.即 $\alpha /\!/ \beta$, $\beta\perp\gamma\Rightarrow\alpha\perp\gamma$.

事实上,如图 48,可设 $\beta\cap\gamma=b$,在 β 内作 $c\perp b$.由 $\beta\perp\gamma$,知 $c\perp\gamma$.过 c 作面 δ 与 α 相交于 a,由 $\alpha /\!/ \beta$,有 $a /\!/ c$,即有 $a\perp\gamma$,而 $a\subsetneqq\alpha$,故 $\alpha\perp\gamma$.

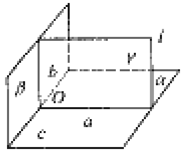


图 47

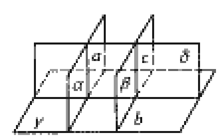


图 48

几个平面互相垂直时,具有如下性质:

(i)若两个平面垂直,则这两个平面所成的二面角都是直二面角.

(ii)若两个平面垂直,则在一个平面内垂直于它们交线的直线垂直于另一个平面.即 $\alpha\perp\beta$, $\alpha\cap\beta=CD$, $B\in CD$, $AB\subsetneqq\alpha$, $AB\perp CD\Rightarrow AB\perp\beta$.

简言为:"面面垂直,则线面垂直".

(iii)若两个平面垂直,那么经过第一个平面内的一点垂直于第二个平面的直线在第一

个平面内.即

$$\alpha\perp\beta, P\in\alpha, P\in a, a\perp\beta\Rightarrow a\subsetneqq\alpha$$

要证明 $a\subsetneqq\alpha$,可设 $\alpha\cap\beta=c$. $P\in\alpha$ 有两种情况,即 P 不在 c 上如图 49(a)和 P 在 c 上如图 49(b).

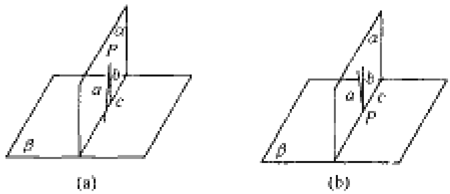


图 49

虽然有两种情形,都可以经过 P 在平面 α 内作直线 $b\perp c$,由上述性质 2 知 $b\perp\beta$,因为经过一点 P 只能有一条直线和平面 β 垂直,所以 a 和 b 重合,故 $a\subsetneqq\alpha$.

(iv)若两个相交平面都垂直于第三个平面,那么它们的交线垂直于第三个平面.即 $\alpha\cap\beta=l, \alpha\perp\gamma, \beta\perp\gamma\Rightarrow l\perp\gamma$.

如图 50,在 l 上任取一点 P,经过 P 作平面 γ 的垂线 c,根据如上性质 3,这条直线 c 在平面 α 内,又在平面 β 内,所以这条垂线就是 α,β 的交线,即 l 与 c 重合.故 $l\perp\gamma$.

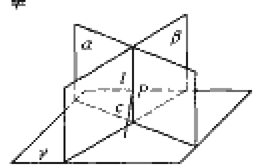


图 50

(v)三个两两互相垂直的平面的交线两两互相垂直.即

$$\alpha\perp\beta, \alpha\cap\beta=a; \beta\perp\gamma, \beta\cap\gamma=b; \gamma\perp\alpha$$
$$\gamma\cap\alpha=c\Rightarrow a\perp b, b\perp c, c\perp a$$

事实上,由上述性质 4,当 $\alpha\perp\gamma,\beta\perp\gamma,\alpha\cap\beta=a$ 时,则有 $a\perp\gamma$,而 $b\subsetneqq\gamma, c\subsetneqq\gamma$,故 $a\perp b, a\perp c$.

同理,$b\perp c, b\perp a; c\perp a, c\perp b$.

所以,$a\perp b, b\perp c, c\perp a$.

5.5.7 二面角的求解方法——归纳思想的运用

在数学中,许多典型问题的求解方法是从课本中的基础知识和基本技能归纳导出的,求解二面角的平面角的方法也是这样.

(1)定义法

应用课本二面角的平面角的定义,作出要求的角,解该角所在的三角形求得其值,叫定义法.

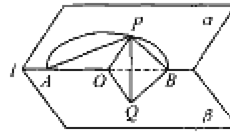


图 51

例 1 如图 51,A、B 是二面角 $\alpha-l-\beta$ 的棱 l 上的两点,平面 α 内以 AB 为直径的半圆上有一点 P,若 $PA=\sqrt{3}$, $PB=\sqrt{6}$, PB 和平面 β 成 30° 角,求二面角 $\alpha-l-\beta$ 的度数.

解 作 $PQ\perp\beta$ 于 Q,在 α 内作 $PO\perp l$ 于 O,联结 OQ.由三垂线定理的逆定理知 $OQ\perp l$,所以 $\angle POQ$ 就是二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角,或二面角 $\alpha-l-\beta$ 的平面角的补角.

联结 BQ,则 $\angle PBQ$ 就是 PB 和 β 所成的角

$$\angle PBQ = 30^\circ,\quad PQ = PB\cdot\sin\angle PBQ = \sqrt{6}\cdot\sin 30^\circ = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

由于点 P 在以 AB 为直径的半圆的圆周上，则 $\angle APB = 90^\circ$.

在 Rt$\triangle APB$ 中，$PA=\sqrt{3}$，$PB=\sqrt{6}$，$PO\perp AB$，则

$$AB = \sqrt{PA^2+PB^2} = 3,\quad PO = \frac{PA\cdot PB}{AB} = \sqrt{2}$$

在 Rt$\triangle PQO$ 中，$\sin\angle POQ = \frac{PQ}{PO} = \frac{\sqrt{3}}{2}$，所以 $\angle POQ = 60^\circ$. 故所求二面角 $\alpha-l-\beta$ 的度数为 60° 或 120°.

在定义法中，除了可以运用三垂线定理及其逆定理作出二面角的平面角外，还可根据所给图形的特点，运用直线三角形、等腰三角形、全等三角形的性质作出其平面角.

(2)垂面法

根据书本练习题中的结论"一个平面垂直于二面角的棱，它和二面角的两个面的交线所成的角就是二面角的平面角"，作出要求的角，解该角所在的三角形求得其值，叫垂面法.

例 2 如图 52 所示，在正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，求二面角 $A-BD-A_1$ 的正弦值或余弦值.

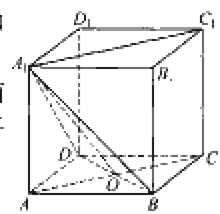


图 52

解 联结 AC，交 BD 于点 O，联结 A_1C_1，则平面 ACC_1A_1 与二面角 $A-BD-A_1$ 的棱 BD 垂直. 联结 A_1O，则 $\angle A_1OA$ 即为二面角的平面角.

设 $A_1A=a$，则 $AO=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，$A_1O=\frac{\sqrt{6}}{2}a$，从而 $\sin\angle A_1OA=\frac{A_1A}{A_1O}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

(3)平移法

由平行平面的性质可知，如果两个平行平面同时与第三个平面相交，那么这两个平行平面与第三个平面所成的二面角相等或互补. 因此，当所求二面角不易直接作出其平面角时，可利用此结论平移二面角的某一面到适当位置，以便作出其平面角. 这种方法叫平移法. 例如，在例 2 中，若要求平面 A_1BD 与平面 $A_1B_1C_1D_1$ 所成二面角的大小，就可根据平面 $ABCD$ // 平面 $A_1B_1C_1D_1$，运用平移法求出二面角 A_1-BD-A 的大小即可.

(4)垂线法

应用书本中的一道习题"自二面角内一点分别向两个面引垂线，则它们所成的角与二面角的平面角互补"这一结论，间接求得二面角的平面角的方法叫垂线法.

例 3 如图 53 所示，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle B=90^\circ$，$SA\perp$ 平面 ABC，DE 垂直平分 SC 于 E，交 AC 于 D，又 $SA=AB$，$SB=BC$，求二面角 $E-BD-C$ 的大小.

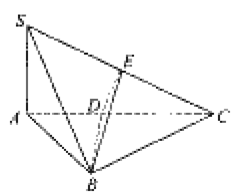


图 53

解 由于 $DE\perp SC$，且 E 为 SC 的中点，$SB=BC$，则 $BE\perp SC$. 故 $SC\perp$ 平面 BDE.

又 $SA\perp$ 平面 ABC，则 $\angle ASC$ 与二面角 $A-BD-E$ 的平面角互补，故 $\angle ASC$ 等于二面角 $E-BD-C$ 的平面角.

设 $SA=a$．由 $SA=AB$ 知 $SB=BC=\sqrt{2}a$．在 Rt△ABC 中，可求得 $AC=\sqrt{3}a$．在 Rt△SAC 中，$\tan\angle ASC=\dfrac{AC}{SA}=\sqrt{3}$，即$\angle ASC=60°$．

故二面角 $E-BD-C$ 的平面角的度数为 $60°$．

(5)平行线法

由书本中的一道习题"三个平面两两相交，有三条交线，如果其中两条交线互相平行，则三条交线都互相平行"可知，如果分别位于二面角的两个平面内的两条直线互相平行，那么这两条直线与二面角的棱都互相平行．于是，我们得到求二面角的平面角的又一种方法：当题目没有给出二面角的棱时，如果能找到分别位于二面角的两个平面内的两条平行直线，那么，分别在两个平面内垂直于这两条平行直线的垂线必垂直于二面角的棱，从而这两条垂线所成的角与所求二面角的平面角相等．这种间接求出二面角的平面角的方法叫平行线法．

例 4　如图 54，△ABC 是边长为 a 的正三角形，$CE\perp$平面 ABC 于 C，且 $CE=a$，$DB\perp$平面 ABC 于 B，且 $DB=\dfrac{1}{2}a$，求△ADE 所在平面与△ABC 所在平面所成二面角的大小．

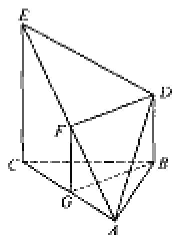


图 54

解　由 $CD \underline{\underline{\parallel}} 2BD$ 知△ACE 的中位线 $FG \underline{\underline{\parallel}} 2BD$，从而 $DF \underline{\underline{\parallel}} BG$，且 DF 与 BG 分别位于所求二面角的两个平面内．又 $BG\perp AC$，则 $BG\perp$平面 AEC．从而 $DF\perp$平面 AEC，$DF\perp AE$．所以$\angle CAE$ 即为所求二面角的平面角（DF，BG 平行于二面角的棱）．由等腰Rt△ACE可知$\angle CAE=45°$即为所求．

(6)公式法

由书本中求异面直线上任意两点间的距离公式 $EF=\sqrt{d^2+m^2+n^2\pm 2mn\cos\theta}$间接地求出二面角的平面角．这种方法叫公式法．

(7)射影面积法

如果将斜线段 l 与它在平面上的射影线段长 l' 之间的关系 $l'=l\cos\theta$ 推广到三角形与它在平面上的射影之间的关系 $S_{射}=S_{\triangle ABC}\cdot\cos\theta$，也可以利用这个关系式来求二面角的平面角．这种方法叫射影面积法．例如，对于例 2，由

$$S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}a^2,\quad S_{\triangle A_1BD}=\frac{\sqrt{3}}{2}a^2$$

可求得

$$\cos\theta=\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle A_1BD}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

上述七种方法均是从书本中归纳导出，这说明学好并用活双基是提高解题能力的首要条件和基本途径．上述七种方法也可归纳为两类：一类是作出平面角直接求值，另一类是不作出平面角间接求值．无论哪一类都是以定义为依据，定义是方法的根本，定义理解得越深，方法的掌握与运用就越好．

5.5.8　立体几何求解题的规范化表述——最优化思想的运用

最优化思想方法是把整个系统分成不同的等级和层次，在系统运动中协调整体与局部

的关系，使部分的功能和目标服从于系统总体的最佳目标，从而使系统达到最优.

在求解立体几何问题时，有的同学经常发生跳步、省略关键步骤、图形与求解过程相脱离、书写混乱、只算不证、条理不清等表述毛病.为了使同学们在求解问题时表述更加有条理、更加规范，养成良好的思维品质，我们应运用最优化思想方法来探讨表述的关键环节.在解题的表述实践中，我们发现，关键环节为“寻—证—点—算”四个.“寻”，即由题意作出正确的图形，根据需要作出辅助线和辅助平面.有的题目辅助线与辅助平面较多，还要写清成图过程，注明字母，或根据题意在已给出的图中寻找所需要的图形.“证”，就是从题设条件出发，根据已学过的公理、定理、定义论证所求的角、距离等，这是解题的根据与重点所在，不能一笔带过.“点”，就是在前面证明的基础上，点明所求的对象.“算”，就是根据题设条件及已论证清楚的结论计算出所要求的最后结果.一般来说，计算过程不要写得太冗长，突出主要过程即可.

例1 如图55，过正方形 $ABCD$ 的顶点 A 作 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，设 $PA=AB=a$.

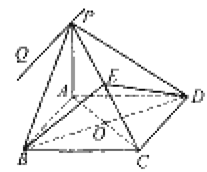


图55

(Ⅰ)求二面角 $B-PC-D$ 的大小；

(Ⅱ)求平面 PAB 和平面 PCD 所成二面角的大小.

解 (Ⅰ)(寻)在平面 PBC 内，作 $BE\perp PC$ 于 E，联结 DE.

(证)由于 $PA\perp$ 平面 $ABCD$，$BD\perp AC$，所以由三垂线定理可知 $BD\perp PC$.于是 $PC\perp$ 面 BED，$DE\perp PC$.

(点)故 $\angle BED$ 就是二面角 $B-PC-D$ 的平面角.

(算)在 $\mathrm{Rt}\triangle PAB$ 中，由 $PA=AB=a$，得 $PB=\sqrt{2}a$.

由 $PA\perp$ 面 $ABCD$，$BC\perp AB$，知 $BC\perp PB$.故在 $\mathrm{Rt}\triangle PBC$ 中

$$PC=\sqrt{PB^2+BC^2}=\sqrt{3}a,\quad BE=\frac{PB\cdot PC}{PC}=\frac{\sqrt{6}}{3}a$$

由 $\triangle PBC\cong\triangle PDC$ 可知 $BE=DE$.联结 OE，则 $OE\perp BD$.

因 $\cos\angle EBO=\dfrac{OB}{BE}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，则 $\angle EBO=30^\circ$，$\angle BEO=60^\circ$，$\angle BED=120^\circ$.

故所求二面角 $B-PC-D$ 的大小为 120°.

(Ⅱ)(寻)过 P 作 $PQ/\!/AB$，则 $PQ\subset$ 平面 PAB.

因 $AB/\!/CD$，则 $PQ/\!/CD$，$PQ\subset$ 平面 PCD.

故面 $PAB\cap$ 面 $PCD=PQ$.

(证)由 $PA\perp AB$，$AB/\!/PQ$，知 $PA\perp PQ$.又 $PA\perp$ 面 $ABCD$，$CD\perp AD$，则由三垂线定理知 $CD\perp PD$.由 $PQ/\!/CD$，有 $PD\perp PQ$.

(点)则 $\angle APD$ 就是平面 PAB 和平面 PCD 所成二面角的平面角.

(算)由 $PA=AB=AD$，知 $\angle APD=45^\circ$.故所求二面角是 45°.

例2 如图56，在长方形 $ABCD$ 中，$AB=a$，$BC=b(a>b)$，把这个长方形沿对角线 AC 折成等于 φ 的二面角，求此时顶点 B，D 之间的距离.

解 (寻)作 $BE\perp AC$ 于 E，$DF\perp AC$ 于 F.

(证)由 $\triangle ABC\backsim\triangle BEC$，得 $\dfrac{BE}{AB}=\dfrac{BC^2}{AC}=\dfrac{CE}{BC}$.从而

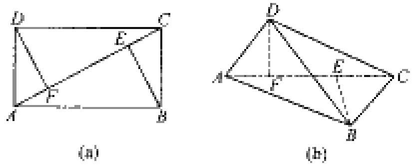


图 56

$$BE=\frac{AB\cdot BC}{AC}=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad CE=\frac{BC^2}{AC}=\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

显然
$$DF=BE,\quad AF=CE$$

故
$$EF=AC-2CE=\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

(点)在图 56(b)中,EF 是异面直线 BE,DF 的公垂线,BD 是两条异面直线上 B,D 两点间的距离.

(算)由二面角 $D-AC-B$ 等于 φ,$0°<\varphi<180°$,可知:

当 φ 为锐角时,异面直线 BE、DF 所成的角就等于 φ

$$BD=\sqrt{EF^2+BE^2+DF^2-2BE\cdot DF\cdot\cos\varphi}=\sqrt{\frac{a^4+b^4-2a^2b^2\cdot\cos\varphi}{a^2+b^2}}$$

当 φ 为钝角时,异面直线 BE、DF 所成的角等于 φ 的补角

$$BD=\sqrt{\frac{a^4+b^4+2a^2b^2\cos(180°-\varphi)}{a^2+b^2}}=\sqrt{\frac{a^4+b^4-2a^2b^2\cdot\cos\varphi}{a^2+b^2}}$$

当 φ 为直角时,$BD=\sqrt{\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2}}$,故 $BD=\sqrt{\frac{a^4+b^4-2a^2b^2\cdot\cos\varphi}{a^2+b^2}}$ 即为所求.

5.5.9 立体几何中的反证法证明——补集思想的运用

若已知集合 A 是某个与之相关的全集的子集,当直接求解 A 困难时,可考虑先求解 A 的补集 $\bar{A}$,再求解 $\bar{A}$ 的补集 $\bar{\bar{A}}$,即得 $A=\bar{\bar{A}}$,这种在顺向思维受阻后而改用逆向思维的求解问题的方法,就是数学中的补集思想方法.中学数学中常用的割补法、反证法即是这种思想方法的具体表现.

对于命题的结论直接证明较难或不可能时,从"否定命题的结论"出发,这时把否定的结论纳入到已知条件中,由此通过正确的逻辑推理"导致矛盾",即与题设矛盾,或与已知课本公理、定理、定义相矛盾,或与证题过程中临时所作的假设相矛盾,或推出两个互相矛盾的结果等等,达到"推倒了结论的反面",从而"肯定原命题真实",这就是用反证法完成一个命题的证明.

例 已知:$a\not\subset\alpha$,$b\subset\alpha$,$a/\!/b$.求证:$a/\!/\alpha$.

证法 1 如图 57,因 $a\not\subset\alpha$,则 $a/\!/\alpha$ 或 $a\cap\alpha=A$.

假设 $a\cap\alpha=A$,由 $a/\!/b$ 知 $A\notin b$,可在平面 α 内过点 A 作直线 $c/\!/b$.

根据公理 4 知 $a/\!/c$,这与 $a\cap c=A$ 矛盾.故 $a\cap\alpha$ 不可

图 57

能，即 $a /\!/ \alpha$.

这里推出与公理 4 矛盾.

该题还有如下各种推导矛盾的方法：

证法 2 假设 $a \cap \alpha = A$，由 $a /\!/ b$ 知 $A \notin b$，设 a 和 b 确定一个平面 β，则平面 α 与平面 β 都满足：过直线 b 和直线 b 外一点 A，故 α 与 β 重合，从而 $a \subset \alpha$，这与 $a \not\subset \alpha$ 矛盾，故 $a /\!/ \alpha$.

证法 3 假设 $a \cap \alpha = A$，由 $a /\!/ b$ 知 $A \notin b$.

设 a 和 b 确定一个平面 β，因 $b \subset \alpha$，则 b 是 α 和 β 的交线. 又 $A \in \beta$，$A \in \alpha$，则 $A \in b$，这与 $A \notin b$ 矛盾. 故 $a /\!/ \alpha$.

证法 4 假设 $a \cap \alpha = A$，由 $a /\!/ b$ 知 $A \notin b$. 因 $a \not\subset \alpha$，则存在一点 $B \in a$ 且 $B \notin \alpha$. 又 $b \subset \alpha$，于是，由于平面内一点与平面外一点的连线和平面内不经过该点的直线是异面直线，这就推出 a 与 b 异面，这和已知 $a /\!/ b$ 矛盾，所以 $a /\!/ \alpha$.

如果先证明了如下命题："如果两条平行线中的一条和一个平面相交，那么另一条也和这个平面相交."则还可有：

证法 5 假设 $a \cap \alpha = A$. 因 $a /\!/ b$，则 b 和平面 α 相交（根据上述命题），但这与已知 $b \subset \alpha$ 矛盾，故 $a /\!/ \alpha$.

上面的例题，就是教材或有关书本中直线和平面平行的判定定理，在这一部分内容中，还有许多定理、例题、习题都是运用反证法证明的. 一般地说，由假设命题结论的反面成立来推出矛盾比直接证明原命题更容易时，就应该用反证法，从课本中实例告诉我们，尽管用反证法证明的命题难以精确归类，但在以下几种情况下，我们常使用反证法.

(i)证明两条直线为异面直线宜用反证法，由于异面直线的概念是用否定形式的语句给出的，所以也启示我们，命题的结论以否定形式出现时宜用反证法. 例如，上述的例题证直线和平面平行，亦即是证直线和平面没有公共点.

(ii)一些基本定理或某章节的起始定理常宜用反证法. 例如，直线和平面平行的判定定理，两平面平行的判定定理等都是运用反证法证明的.

(iii)某些命题的结论属于唯一型的，宜用反证法，例如公理 3 的推论 2、3，证明"过一点和一条直线（或一个平面）垂直的平面（或直线）只有一个（或条）""经过平面（或直线）外一点只有一个平面和已知平面（或直线）平行（或垂直）"等均应运用反证法.

(iv)某些命题的结论属存在型的，宜用反证法，例如，"如果两条直线同垂直于一个平面，那么这两条直线平行""如果一条直线与一个平面平行，那么过这个平面内的一点与这条直线平行的直线必在这个平面内"等等宜运用反证法证明.

5.5.10 平面图形的翻折问题及求解——运动变化思想的运用

将平面图形沿某直线折起构成一个空间图形，并对其中有关元素翻折前后的位置关系及数量关系进行论证或计算的问题，称为平面图形的翻折问题. 平面图形翻折问题是立体几何的常见题型，也是历届高考命题热点，它能较好地考察学生的逻辑推理能力和空间想象能力. 解答这类问题时，关键是要搞清楚翻折前后图形中哪些元素的位置和数量关系发生了变化，然后再利用有关知识进行解答. 现举例解析如下：

例 1 将边长为 a 的正方形 $ABCD$ 沿着 AD，BC 的中点 M，N 的连线折成直二面角，原正

方形的对角线 AC 被折成折线 AOC，如图 58.求：

(Ⅰ)$\angle AOC$ 的大小；

(Ⅱ)AC 和 MN 所成的角；

(Ⅲ)AC 和 MN 的距离.

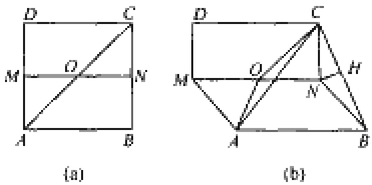


图 58

解 如图 58(b)是翻折成直二面角后的图形.翻折后 $AM\perp MN$，$CN\perp MN$ 的关系未变，且 $AM=CN=\frac{1}{2}a$，但 AM 与 CN 已变成异面直线，且 $CN\perp$ 面 $ABNM$，$CN\perp AM$，MN 变为 AM 与 CN 的公垂线段.

(Ⅰ)在 $\mathrm{Rt}\triangle MNC$ 和 $\mathrm{Rt}\triangle AMC$ 中，或由异面直线上两点间距离公式，求得

$$AC^2=MN^2+CN^2+AM^2=\frac{3}{2}a^2$$

在 $\triangle AOC$ 中，$AO=OC=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，由余弦定理，得

$$\cos\angle AOC=\frac{AO^2+OC^2-AC^2}{2AO\cdot OC}=-\frac{1}{2}$$

即

$$\angle AOC=120^\circ$$

(Ⅱ)在图 58(b)中，由 $AB/\!/MN$，知 AC 和 AB 所成的锐角就是异面直线 AC 和 MN 所成的角.

由 $CN\perp$ 面 $ABNM$，$AB\perp BN$，则 $AB\perp BC$(三垂线定理).

在 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$ 中，$AB=a$，$AC=\frac{\sqrt{6}}{2}a$，则

$$\cos\angle BAC=\frac{AB}{AC}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

故 AC 和 MN 所成的角为 $\arccos\frac{\sqrt{6}}{3}$.

(Ⅲ)在图 58(b)中，因 $MN/\!/AB$，$AB\subset$ 平面 ABC，则 $MN/\!/$ 平面 ABC.从而 MN 和平面 ABC 的距离等于异面直线 MN 和 AC 的距离.

在 $\triangle BNC$ 中，作 $NH\perp BC$ 于 H，由 $AB\perp BC$，知 $AB\perp$ 平面 BNC，从而 $AB\perp NH$，即有 $NH\perp$ 平面 ABC，故 NH 为 MN 到平面 ABC 的距离.

在 $\triangle BNC$ 中，$\angle BNC=90^\circ$，$BN=CN=\frac{a}{2}$，$NH\perp BC$，则 $NH=\frac{BN\cdot CN}{BC}=\frac{\sqrt{2}}{4}a$，故 AC 和 MN 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{4}a$.

例 2 将等腰直角 $\triangle ABC$，沿斜边 AB 上的高 CD 折成一个 60° 的二面角，使 B 到 B' 的位置如图 59，已知斜边 $AB=2$，求：

(Ⅰ)顶点 C 到平面 $AB'D$ 的距离；

(Ⅱ)顶点 A 到平面 $CB'D$ 的距离；

(Ⅲ)AC 和平面 $CB'D$ 所成的角；

(Ⅳ)二面角 $C-AB'-D$ 的大小.

解 (Ⅰ)因 $CD\perp AD$，$CD\perp B'D$，则 $CD\perp$ 平面 $AB'D$，即 CD 的长是 C 点到平面 $AB'D$ 的

距离.而等腰直角△ABC斜边$AB=2$,故$CD=1$.

(Ⅱ)过A作$AE\perp$平面$CB'D$于E,由$CD\perp$平面$AB'D$,知平面$CB'D\perp$平面$AB'D$,从而垂足E一定落在$B'D$上.此时$\angle ADB'$为二面角$A-CD-B'$的平面角.而$\angle ADB'=60^\circ$,则△$AB'D$为正三角形.由于$AD=1$,则$AE=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

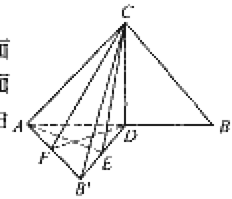


图 59

故点A到平面$CB'D$的距离为$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(Ⅲ)联结CE,由$AE\perp$平面$CB'D$,则$\angle ACE$为AC和平面$CB'D$所成的角.在Rt△AEC中,$\sin\angle ACE=\frac{AE}{AC}=\frac{\sqrt{6}}{4}$.故$AC$和平面$CB'D$所成的角为$\arcsin\frac{\sqrt{6}}{4}$.

(Ⅳ)过D作$DF\perp AB'$于F,则F为AB'的中点,连CF,由于$CD\perp$平面$AB'D$,则知$CF\perp AB'$(三垂线定理),从而$\angle CFD$为二面角$C-AB'-D$的平面角.

在正△$AB'D$中,可求得$DF=\frac{\sqrt{3}}{2}$,在Rt△AFC中,可求得$CF=\frac{\sqrt{7}}{2}$,在Rt△CDF中,有

$$\cos\angle CFD=\frac{DF}{CF}=\frac{\sqrt{21}}{7}$$

即

$$\angle CFD=\arccos\frac{\sqrt{21}}{7}$$

故所求二面角$C-AB'-D$的大小为$\arccos\frac{\sqrt{21}}{7}$.

例3 长方形$ABCD$的长AB是宽BC的$2\sqrt{3}$倍,把它折成无底的正三棱柱,使AD与BC重合,折痕线EF,GH分别交长方形$ABCD$的对角线AC于M,N.求翻折后截面AMN与底面AFH所成的角.

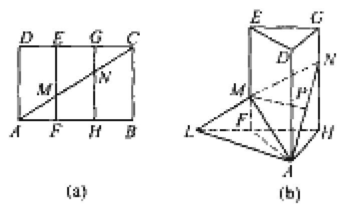


图 60

解法1 设$AD=a$,则$AB=2\sqrt{3}a$,由图60(a)知,$AC=\sqrt{13}a$,$AM=MN=\frac{\sqrt{13}}{3}a$,$AF=FH=HB=\frac{2\sqrt{3}}{3}a$,$MF=\frac{a}{3}$,$MN=\frac{2}{3}a$.

翻折后,仍有$AF=FH=HB$,$AM=MN=NC$,设平面AMN与平面AFH所成的角为θ,可求得

$$S_{\triangle AFH}=\frac{1}{2}\cdot AF^2\cdot\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}a^2$$

在Rt△NHA中,求得$AN=\sqrt{AH^2+HN^2}=\frac{4}{3}a$.

取AN的中点P,由$AM=MN$,知$MP\perp AN$.在Rt△MPA中,求得

$$MP=\sqrt{AM^2-(\frac{1}{2}AN)^2}=a$$

从而

$$S_{\triangle AMN}=\frac{1}{2}AN\cdot MP=\frac{2}{3}a^2$$

故
$$\cos\theta=\frac{S_{\triangle AFH}}{S_{\triangle AMN}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

从而 $\theta=30°$.

解法 2 如图 60(b),延长 NM 交 HF 的延长线于 L,联结 AL,则 AL 为截面 AMN 所在平面与底面 AFH 所在平面的交线.

同解法 1 所设,可求得 $FM=\frac{a}{3}$, $AF=\frac{2\sqrt{3}}{3}a$.

可证得 $LF=AF$, $\angle LFA=120°$,在底面 AFL 内,过 F 作 $FK\perp AL$ 于 K,联结 MK,则由 $FM\perp$ 面 LFA,有 $MK\perp AL$,从而 $\angle MKF$ 为二面角 $N-AL-H$ 的平面角.

在 $\triangle AFL$ 中,可求得 $FK=\frac{\sqrt{3}}{3}a$,在 $\mathrm{Rt}\triangle MKF$ 中, $\tan\angle MKF=\frac{MF}{KF}=\frac{\sqrt{3}}{3}$,从而 $\angle MKF=30°$.

故截面 AMN 与底面 AFH 所成的角为 $30°$.

5.5.11 异面直线上两点间的距离公式——化归思想的运用

通过对问题的题设进行分析,挖掘其内部的联系,将其转化为熟悉的或易于处理的问题.其实质就是实现问题的规范化,化归到某一定理、某一公式、某一方法上去解决.

大家知道,异面直线上两点间的距离公式为

$$EF=\sqrt{d^2+m^2+n^2\pm 2mn\cos\theta} \qquad ①$$

由于以上公式涉及的量比较多,演变形式多样化,因而应用比较广泛,我们应学会将有关问题化归到这个公式上去求解.

例 1 将矩形 $ABCD$ 沿对角线 AC 折起,使两个三角形所在的平面成 θ 角,若 $AB=a$, $BC=b$,求折起后顶点 B 和 D 之间的距离.

解 如图 61,过 B, D 分别作 $BM\perp AC$ 于 M, $DN\perp AC$ 于 N,则

$$BM=DN=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$MN=|AC-AN-CM|=\frac{|a^2-b^2|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

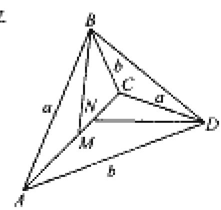


图 61

显然,当二面角 $B-AC-D$ 的平面角 $0<\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$ 时, ND 与 MB 所成的角即为 θ;当二面角 $B-AC-D$ 的平面角 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 时, ND 与 MB 所成的角为 $\pi-\theta$.由公式①得

$$BD^2=MN^2+BM^2+DN^2-2BM\cdot DN\cdot\cos\theta=$$
$$\frac{(a^2-b^2)^2}{a^2+b^2}+\frac{2a^2b^2}{a^2+b^2}-2\cdot\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\cdot\cos\theta=\frac{a^4+b^4-2a^2b^2\cos\theta}{a^2+b^2}$$

故
$$BD=\sqrt{\frac{a^4+b^4-2a^2b^2\cos\theta}{a^2+b^2}}$$

注 取 $a=4$, $b=3$, $\theta=90°$,可得 $BD=\frac{1}{5}\sqrt{337}$.

例 2 若 M, N 分别为正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $A_1B_1C_1D_1$ 及侧面 BCC_1B_1 的

中心，求异面直线 DM 与 AN 所成的角．

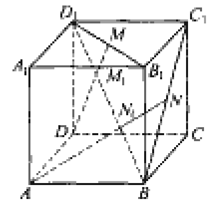


图 62

解 如图 62，联结 BC_1，BD_1，B_1D_1，设 BD_1 分别与 AN，DM 交于 N_1，M_1．由 $\frac{AB}{BC_1}=\frac{BN}{C_1D_1}=\frac{AN}{BD_1}=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 可知 $\triangle ABN \backsim \triangle BC_1D_1$，故 $AN=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$BD_1=\frac{\sqrt{6}}{2}$，且 $\angle ANB=\angle BD_1C_1$，则 $\triangle NN_1B \backsim \triangle D_1C_1B$．

从而 $NN_1 \perp BD_1$，且 $NN_1=\frac{BN}{BD_1}\cdot C_1D_1=\frac{\sqrt{6}}{6}$，$BN_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$．同理可证 $MM_1 \perp BD_1$，易求得 $MM_1=\frac{\sqrt{6}}{6}$，$D_1M_1=\frac{\sqrt{3}}{3}$．又可求得 $MN=\sqrt{(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$．

设 DM 与 AN 所成的角为 θ，则由公式①有

$$\cos\theta=\frac{(BD_1-BN_1-D_1M_1)^2+M_1M^2+N_1N^2-MN^2}{2MM_1\cdot NN_1}=\frac{1}{2}$$

故 $\theta=60°$ 即为所求．

5.5.12 底面为矩形的棱锥的一个美妙结论——化归思想的运用

底面为矩形的棱锥有如下一个美妙结论：

底面为矩形的棱锥的相对侧棱长的平方和相等．

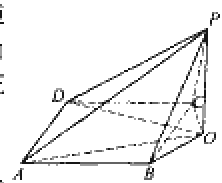


图 63

事实上，如图 63，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，底面四边形 $ABCD$ 为矩形，设 P 在底面所在平面内的射影为 O，联结 AO，BO，CO，DO，则由矩形的性质，易证得 $AO^2+OC^2=BO^2+DO^2$（此结论请同学们自己证明），从而有

$$(AO^2+PO^2)+(OC^2+PO^2)=(BO^2+PO^2)+(DO^2+PO^2)$$

故
$$AP^2+PC^2=BP^2+PD^2 \qquad ①$$

立体几何中有许多问题可化归到用这个结论去求解．

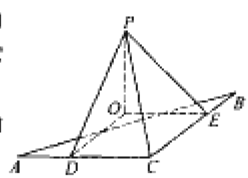


图 64

例 1 如图 64，Rt$\triangle ABC$ 所在的平面外一点 P 到直角顶点 C 的距离为 24 cm，到两直角边的距离为 $6\sqrt{10}$ cm，求点 P 到平面 ABC 的距离．

解 如图，设 O 为 P 在平面 ABC 内的射影，则 PO 即为所求的距离．

作 $PD \perp AC$ 于 D，作 $PE \perp CB$ 于 E，则 $PD=PE=6\sqrt{10}$ cm．联结 OD，OE，则 $OD \perp AC$，$OE \perp BC$，且 $OD=OE$，于是四边形 $ODCE$ 为正方形，由式①，有 $OP^2+PC^2=PD^2+PE^2$，即 $OP^2=144$．故 $PO=12$ cm．

例 2 棱锥的底面是正方形，有相邻的两个侧面垂直于底面，另外两个侧面与底面成 45° 角，最长的侧棱长为 15 cm．求这个棱锥的高．

解 参见上图．在四棱锥 $P-DCEO$ 中，底面四边形 $DCEO$ 为正方形，侧面 PDO 和侧面 PEO 垂直于底面 $DCEO$，侧面 PDC、侧面 PEC 与底面 $DCEO$ 均成 45° 角，则知 $PO \perp$ 底面 $DCEO$，即 PO 为棱锥的高，且 $\angle PDO=\angle PEO=45°$．可推知 $PC=15$ cm，$PD=PE=\sqrt{2}PO$．由式①，有

$$PO^2+PC^2=PD^2+PE^2=2PD^2=4PO^2$$

故 $$PO=5\sqrt{3}$$

例 3 如图 65,把长、宽各为 4,3 的长方形 $ABCD$ 沿对角线 AC 折成直二面角.求顶点 B 和 D 的距离.

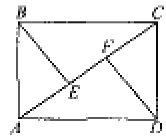


图 65

解 如图,可求得

$$BE=DF=\frac{12}{5},EF=\frac{7}{5},BF=\frac{1}{5}\sqrt{193}$$

如图 66,过 E 作 $EG\parallel FD$,过 D 作 $DG\parallel FE$,交 EG 于 G,则四边形 $EGDF$ 为矩形.联结 BG,则 $BG=\frac{12}{5}\sqrt{2}$.由式①有 $BD^2=BG^2+BF^2-BE^2=\frac{337}{25}$,故 $BD=\frac{\sqrt{337}}{5}$.

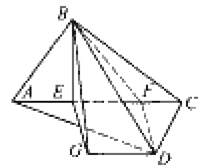


图 66

例 4 如图 67,在直二面角的棱上有两点 A,B,AC 和 BC 各在这个二面角的一个面内,并且都垂直于棱 AB.设 $AB=8$ cm,$AC=6$ cm,$BD=24$ cm,求 CD 的长.

解 如图,过 D 点作 $DE\parallel AB$,过 A 点作 $AE\parallel BD$ 交 DE 于 E,则四边形 $AEDB$ 为矩形,即 $AE=BD=6$ cm,$DE=AB=8$ cm.

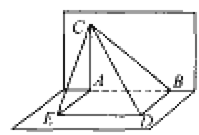


图 67

联结 CE,BC,可知

$$EC^2=AC^2+AE^2,\quad BC^2=AC^2+AB^2$$

由式①有

$$AC^2+CD^2=EC^2+BC^2=2AC^2+AE^2+AB^2,\quad CD^2=AC^2+AE^2+AB^2$$

即 $$CD=\sqrt{6^2+24^2+8^2}=26\text{ cm}$$

例 5 如图 68,有一个长方体,它的三个面的对角线长分别是 a,b,c.求它的对角线长.

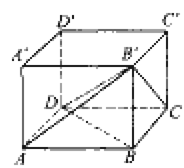


图 68

解 如图,在长方形 $ABCD-A'B'C'D'$ 中,设 $AB'=a$,$B'C=b$,$BD=c$.联结 DB'.由式①,有

$$B'D^2+(B'D^2-BD^2)=AB'^2+B'C^2$$

则 $$2B'D^2=AB'^2+B'C^2+BD^2=a^2+b^2+c^2$$

故 $B'D=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$即为所求.

5.5.13 平行六面体的妙用——模型思想的运用

在求解某些数学问题时,若常规思路受阻,你不妨换一个角度,尽可能开阔视野,把问题放到整个数学知识的大背景中去,抓住题目的已知条件和欲求结论所提供的信息,通过分析、化归、类比、构造等方法,在与问题相联的知识点中寻求一个合适的模型,利用模型的特征量的关系,求得原问题的解决.这种思路常给人一种意想不到的结果.这种求解问题的思维方式称为模型思想方法.数学模型思想方法也可以看作是借用数学模型来处理各类问题的思维方式.

(1)利用平行六面体这一模型处理两个三棱柱问题和一个代数不等式问题.

例 1 如图 69,已知 $ABC-A_1B_1C_1$ 是直三棱柱,$\angle BAC=90°$,点 D_1,F_1 分别是 A_1B_1,B_1C_1 的中点.若 $AB=CA=AA_1$,求 BD_1 与 CF_1 所成的角的余弦值.

解 如图,将题中所给直三棱柱补形成平行六面体 $ABPC-A_1B_1P_1C_1$,由 $AB=CA=AA_1$,$\angle BAC=90^\circ$ 知此平行六面体为正方体.联结 CF_1,分别取 BP,CF_1 的中点 E,H,联结 EF_1,CE,EH,则 $BD_1 /\!/ EF_1$,故$\angle EF_1H$ 即为 BD_1 与 CF_1 所成的角.

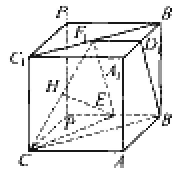


图 69

设正方体的棱长为 2,则 $EF_1=BD_1=EC=\sqrt{5}$,$F_1H=\frac{1}{2}\sqrt{C_1C^2+C_1F_1^2}=\frac{\sqrt{6}}{2}$,且 $EH\perp CF_1$.故

$$\cos\angle EF_1H=\frac{F_1H}{EF_1}=\frac{\sqrt{30}}{10}$$

例 2 斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 各条棱的长均为 2,侧棱与底面所成的角为 60°,且侧面 ABB_1A_1 垂直于底面.求证:$B_1C\perp C_1A$.

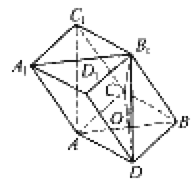


图 70

解 如图 70,将斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 补形成平行六面体$ADBC—A_1D_1B_1C_1$.因斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 各棱的长为 2,则$\square ADBC$为菱形.

设 AB 与 DC 交于 O,则 $CD\perp AB$,O 为 AB 的中点,联结 B_1O.由侧面 $ABB_1A_1\perp$ 底面 ABC,又 B_1B 与底面 ABC 成 60°,$B_1B=AB$,则 $B_1O\perp AB$.从而 $B_1O\perp$平面 $ADBC$,即 $B_1O=B_1B\cdot\sin 60^\circ=\sqrt{3}$,$OB=\frac{1}{2}B_1B=1$.

在$\triangle OCB$ 中,可求得 $OC=\sqrt{3}$.又 $OC=OD=B_1O$,则$\triangle DB_1C$ 为等腰直角三角形,从而 $DB_1\perp B_1C$.

由于 $AC_1 /\!/ B_1D$,故 $B_1C\perp C_1A$.

例 3 已知 a,b,c 均为正实数,且 $a^2+b^2+c^2=1$.求证:$\sqrt{1-a^2}+\sqrt{1-b^2}+\sqrt{1-c^2}+a+b+c>3$.

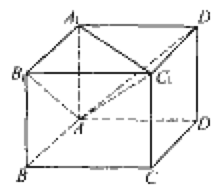


图 71

证明 根据所给条件 $a^2+b^2+c^2=1$,可将欲证式变为$\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{a^2+c^2}+\sqrt{a^2+b^2}+a+b+c>3$.

根据长方体的性质及已知条件 $a^2+b^2+c^2=1$,作长方体 $ABCD—A_1B_1C_1D_1$,如图 71,使其对角线长为 1,共顶点的三条棱 $AA_1=a$,$A_1B_1=b$,$A_1D_1=c$,则面对角线

$$AB_1=\sqrt{a^2+b^2},\quad AD_1=\sqrt{a^2+c^2},\quad A_1C_1=\sqrt{b^2+c^2}$$

于是,在$\triangle AB_1C_1$ 中,$AB_1+B_1C_1>AC_1$,即$\sqrt{a^2+b^2}+c>1$.同理可证

$$\sqrt{a^2+c^2}+b>1,\sqrt{b^2+c^2}+a>1$$

以上三式相加、变形,即证得原不等式成立.

从上述三例可以看出,将原问题的三棱柱中看得不甚明显的点、线、面的位置关系或有关数量关系放到平行六面体中,就表现得比较清晰了.

(2)利用平行六面体处理三棱锥、四棱锥问题

平行六面体与三棱锥、四棱锥有着密切的联系.某些三棱锥、四棱锥问题如果借用平行六面体模型去讨论,往往会大为简化,有时还可收到出奇制胜的效果.

例 4　在四棱锥的四个侧面中，直角三角形最多可有几个？

解　如图 72 作正方体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，图中四棱锥 D_1—$ABCD$ 的四个侧面均为直角三角形，故答案为 4 个.

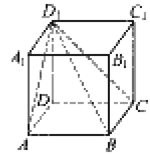


图 72

注：借助于正方体模型，使得此题的解答直观而快捷.

例 5　在三棱锥 D—ABC 中，$BA\perp CA$，$BC\perp CD$，平面 $ABC\perp$平面 DBC，$AC=AB$，$\angle DBC=30°$，求 AC 与 BD 所成的角的余弦值.

解　因为 $AC=AB$，$BA\perp CA$，所以$\triangle ABC$ 为等腰直角三角形. 又平面 $ABC\perp$平面 DBC，且 $BC\perp CD$，所以 $CD\perp$平面 ABC. 如图 73，将三棱锥 D—ABC 补形成平行六面体 $ABEC$—$A_1B_1E_1D$，则此平行六面体为长方体. 显然，$\angle DBE$ 即为异面直线 AC 与 BD 所成的角. 在 Rt$\triangle DBE$ 中

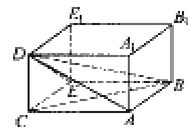


图 73

$$\cos\angle DBE=\frac{BE}{BD}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}BC}{\frac{BC}{\cos 30°}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$$

即 AC 与 BD 所成角的余弦值为$\frac{\sqrt{6}}{4}$.

例 6　已知四边形 $ABCD$ 是边长为 4 的正方形，E，F 分别是 AB，AD 的中点，$GC\perp$面 $ABCD$，且 $GC=2$，求点 B 到面 EFG 的距离.

解　以正方形 $ABCD$ 为底面，GC 为侧棱作平行六面体 $ABCD$—$A'B'GD'$，如图 74 所示. 由题设可知此平行六面体为长方体.

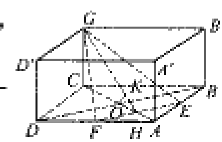


图 74

由于 BD∥面 EFG，所以点 B 到面 EFG 的距离等于直线 BD 到面 EFG 的距离，即正方形 $ABCD$ 的中心 O 到面 EFG 的距离.

联结 AC，交 EF 于 H. 过 O 作 $OK\perp GH$ 于 K，则 $OK\perp$面 EFG，线段 OK 就是点 O 到面 EFG 的距离. 由题设有 $GC=2$，$CH=3\sqrt{2}$，$OH=\sqrt{2}$，则 $GH=\sqrt{GC^2+CH^2}=\sqrt{22}$，又 $\frac{OK}{GC}=\frac{OH}{GC}$，故

$$OK=\frac{OH\cdot GC}{CH}=\frac{2\sqrt{11}}{11}$$

例 7　正三棱锥 S—ABC 的侧棱与底面边长相等(即为正四面体)，如果 E，F 分别为 SC，AB 的中点，求异面直线 EF 与 SA 所成的角.

解　如图 75，作三棱锥(或四面体)S—ABC 的外接平行六面体，使三棱锥的各棱成为平行六面体侧面的对角线，因三棱锥所有棱的长均相等，则此平行六面体为正方体，且 E，F 分别为正方体上、下底面的中心，从而 EF∥SS'，EF 与 SA 所成的角即为 SS' 与 SA 所成的角.

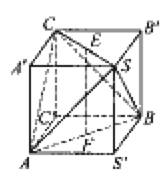


图 75

而$\angle S'SA=45°$，故异面直线 EF 与 SA 成 45°的角.

例 8　证明：有两对对棱垂直的四面体，其第三对对棱必垂直.

证明　设在四面体 $SABC$ 中，$AC\perp BS$，$AS\perp BC$. 如图 75 所示，作四面体 $SABC$ 的外接平行六面体 $AS'BC'$—$A'SB'C$，使四面体的各棱均成为平行六面体侧面的对角线.

由侧面 $AC'CA'$∥侧面 $S'BB'S$，知 AC∥$S'B'$，$A'C'$∥BS.

又由 $AC\perp BS$，知侧面 $AC'CA'$ 与侧面 $S'BB'S$ 为全等的菱形.

同理，由 $AS\perp BC$ 可知侧面 $AS'SA'$ 与侧面 $C'BB'C$ 为全等的菱形. 由此可推知上底面 $A'SB'C$ 与下底面 $AS'BC'$ 也是全等的菱形，从而有 $A'B'\perp SC$. 而 $A'B'\parallel AB$，故 $AB\perp SC$.

即有两对对棱垂直的四面体，其第三对对棱必垂直.

注 此例通常利用三垂线定理及其逆定理来证明，而借用平行六面体模型来证明则别有一番风味.

从上述 5 例我们可以看到：在例 4～例 6 的平行六面体模型中，原三棱锥或四棱锥的棱有一部分仍是平行六面体的棱；在例 7、例 8 的平行六面体模型中，原三棱锥（或四面体）的六条棱均成为平行六面体的侧面对角线，在这种情形下，平行六面体与四面体之间有着特殊的对应关系，特殊的四面体对应着一个特殊的平行六面体. 正因为这样，在讨论四面体问题时，常常借助于这样的外接平行六面体模型，使问题易于处理.

5.5.14 立体几何中的几何变换——运动变化思想的运用

一个几何图形按照某种法则或规律运动变化成另一状态的过程称为几何变换. 几何变换有时是将原图形变换一个位置，有时是将原图形变换成一个新图形，这可以更加清晰地显示出有关几何元素间的相互关系及有关几何量间的数量关系，便于快捷地求解某些问题. 立体几何中常用到的几何变换一般是平移、对称、旋转等.

例 1 如图 76，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，E 在 BB_1 上，截面 $A_1EC\perp$ 侧面 AC_1，若 $AA_1=A_1B_1$，求平面 A_1EC 与平面 $A_1B_1C_1$ 所成二面角（锐角）的度数.

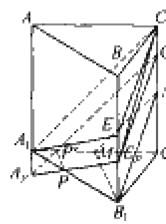


图 76

解 令点 P 沿折线 $A_1B_1-B_1C_1$ 运动，设 P 点在棱 A_1C_1 上的射影为点 P'，则由题设截面 $A_1EC\perp$ 侧面 AC_1 知，PP' 与二面角 $CE-A_1-B_1C_1$ 的棱平行. 不妨尝试将 CE，CA_1 分别在平面 B_1C，A_1C 内沿 CC_1 方向平移. 记平面 $A_PE_PC_P$ 为平面 A_1EC 在平移过程中的任一位置，$PP'=$ 面 $A_PE_PC_P\cap$ 面 $A_1B_1C_1$，易知 PP' 是二面角 $CE-A_1-B_1C_1$ 的同位二面角 $C_P-PP'-C_1$ 的棱，且 $PP'\perp$ 平面 A_1C. 当平面 A_1EC 平移至平面 B_1MN 的位置时，这里 M，N 分别是 A_1C_1，C_1C 的中点，易知二面角 $N-B_1M-C_1$ 是二面角 $CE-A_1-B_1C_1$ 的同位二面角，且 B_1M 与二面角 $CE-A_1-B_1C_1$ 的棱平行.

由 $B_1M\perp A_1C_1$，且面 $A_1C\perp$ 面 $A_1B_1C_1$，有 $B_1M\perp$ 面 A_1C. 从而 $\angle NMC_1$ 就是二面角 $N-B_1M-C_1$ 的平面角，故平面 A_1EC 与平面 $A_1B_1C_1$ 所成二面角的度数是 $45°$.

例 2 如图 77，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$\angle ACB=90°$，$\angle BAC=30°$，$BC=1$，$AA_1=\sqrt{6}$，M 是 CC_1 的中点，求证：$AB_1\perp A_1M$.

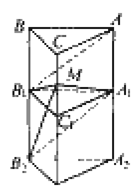


图 77

证明 为了证明 $AB_1\perp A_1M$，只需将 AB_1 向下平移至 A_1B_2 后，看看 $\triangle A_1B_2M$ 是否为直角三角形即可. 为此，将直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 向下平移，使上底面 ABC 移到下底面 $A_1B_1C_1$ 的位置，得到三棱柱 $A_1B_1C_1-A_2B_2C_2$，如图 77.

联结 B_2M. 在 $\triangle ABC$ 中，由 $\angle ACB=90°$，$\angle BAC=30°$，$BC=1$，求得

$AB=2, AC=\sqrt{3}$. 又由于 M 是 CC_1 的中点, $CC_1=\sqrt{6}$, 则 $C_1M=\frac{\sqrt{6}}{2}$, $C_2M=\frac{3}{2}\sqrt{6}$. 而

$$A_1M^2=A_1C_1^2+C_1M^2=3+\frac{3}{2}=\frac{9}{2}$$

$$A_1B_2^2=A_1A_2^2+A_2B_2^2=6+4=10$$

$$B_2M^2=B_2C_2^2+C_2M^2=1+\frac{27}{2}=\frac{29}{2}$$

从而有 $A_1M^2+A_1B_2^2=B_2M^2$, 故 $A_1B_2\perp A_1M$, 又 $AB_1/\!/A_1B_2$, 故 $AB_1\perp A_1M$.

例 3　如图 78, 已知 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是棱长为 a 的正方体, E, F 分别为棱 AA_1 与 CC_1 的中点, 求四棱锥 A_1-EBFD_1 的体积.

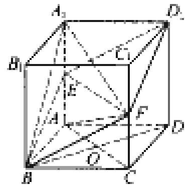


图 78

解　若直接求点 A_1 到截面 $EBFD_1$ 的距离及截面 $EBFD_1$ 的面积, 再求其体积是较困难的. 但若注意到 $\triangle A_1FA$、四边形 $EBFD_1$ 都是关于 EF 成轴对称的图形, 且 $S_{\triangle A_1FA}$ 是 $S_{四边形ACC_1A_1}$ 的一半, $V_{A_1-BEF}=V_{A_1-D_1EF}=V_{A-BEF}=V_{B-AEF}$, 则由 $BO\perp$ 面 AFA_1 (O 为 BD 与 AC 的交点), 及 $S_{\triangle A_1FA}=\frac{\sqrt{2}}{2}a^2$, 有 $V_{A_1-EBFD_1}=V_{B-A_1FA}=\frac{1}{6}a^3$.

例 4　如果空间四边形(四个顶点不共面)的两组对边分别相等, 则两条对角线中点的连线垂直于两对角线. 反之, 如果空间四边形两条对角线中点的连线垂直于两对角线, 则空间四边形的两组对边相等.

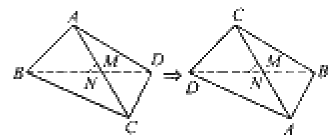


图 79

证明　如图 79, 在空间四边形 $ABCD$ 中, $AB=CD$, $BC=AD$, M, N 分别为 AC, BD 的中点.

依题意, 可交换 A 与 C, B 与 D 而得到同一空间四边形. 因而两空间四边形又可看作是绕某轴旋转 $180°$ 而得到的. 由 A 与 C 关于点 M 对称, B 与 D 关于点 N 对称可知, 对称轴必过 M, N 两点, 从而 $MN\perp AC$, $MN\perp BD$.

反之, 若 MN 是 AC 与 BD 的中垂线, 则将整个图形绕 MN 旋转 $180°$, 交换 A 与 C, B 与 D 的位置, 故得 $AB=CD$, $AD=BC$.

注　例 4 也可借用平行六面体模型来证.

5.5.15　一种重要的思维方式——类比思想的运用

类比是指由一类事物所具有的某种属性, 可以推测与其相类似的事物也具有这种属性的思考与处理问题的方法. 类比思想方法在数学中有着广泛的应用. 立体几何中有好多内容都是相应的平面几何内容在空间的延伸和拓广, 所以在求解立体几何问题时, 运用类比思想方法就显得尤为重要.

例 1　如图 80, 设正三棱锥 $P—ABC$ 的高为 PO, M 为 PO 的中点, 过 AM 作与棱 BC 平行的平面, 将三棱锥截为上、下两部分, 试求这两部分的体积之比.

解　我们先来看平面上的类似的问题: "设正三角形 ABC 的高为 AD, M 为 AD 的中点, 直线 CM 将该三角形截为两部分, 求这两部分的面积之比."

如图 81, 设直线 CM 交 AB 于 E. 显然, 只要求出 AE 与 EB 之比即可. 为此, 过 D 作 $DN/\!/$

AB，交 CE 于 N. 由 M 为 AD 的中点，知 $DN=AE$，又由 D 为 BC 的中点，知 $DN=\frac{1}{2}BE$，从而 $S_{\triangle CAE}:S_{\triangle CEB}=1:2$.

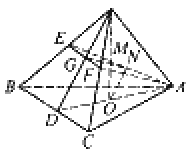


图 80

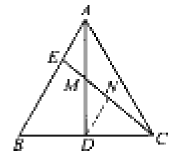


图 81

再回到空间的情形，如图 80，设过 AM 平行于 BC 的平面交 PB 于 E，交 PC 于 F，则 $EF/\!/BC$. 与平面的情形类似，上、下两部分体积之比等于 $S_{\triangle PEF}$ 与 $S_{四边形EFCB}$ 之比. 为此先求出 $S_{\triangle PEF}:S_{\triangle PBC}$，设 D 为 BC 的中点，联结 PD，交 EF 于 G，则

$$\frac{EF}{BC}=\frac{PG}{PD},\quad \frac{S_{\triangle PEF}}{S_{\triangle PBC}}=(\frac{PG}{PD})^2$$

类似于平面的情形，现在我们来求 $PG:PD$. 在 $\triangle PDA$ 中，过 O 作 PD 的平行线，交 AG 于 N，则

$$\frac{PG}{GD}=\frac{ON}{GD}=\frac{AO}{AD}=\frac{2}{3},\quad \frac{PG}{PD}=\frac{2}{5}$$

从而

$$\frac{S_{\triangle PEF}}{S_{\triangle PBC}}=\frac{4}{25},\quad \frac{S_{\triangle PEF}}{S_{四边形EFCB}}=\frac{4}{21}$$

故上、下两部分的体积之比为$\frac{4}{21}$.

例 2 如图 82，在四面体 $ABCD$ 中，四个顶点到对面的垂线的长依次为 h_A,h_B,h_C,h_D，四面体内的任意一点 P 到四个面的距离分别为 d_A,d_B,d_C,d_P. 求证：$\frac{d_A}{h_A}+\frac{d_B}{h_B}+\frac{d_C}{h_C}+\frac{d_D}{h_D}=1$.

证明 可以先看平面上类似的问题：在 $\triangle ABC$ 中，三边上的高分别是 h_A,h_B,h_C，$\triangle ABC$ 内的任意一点 P 到三边的距离分别为 d_A,d_B,d_C，求证：$\frac{d_A}{h_A}+\frac{d_B}{h_B}+\frac{d_C}{h_C}=1$.

这个平面问题，可利用面积法来证，如图 83，由于

$$\frac{d_A}{h_A}=\frac{S_{\triangle PBC}}{S_{\triangle ABC}},\quad \frac{d_B}{h_B}=\frac{S_{\triangle PAC}}{S_{\triangle ABC}},\quad \frac{d_C}{h_C}=\frac{S_{\triangle PAB}}{S_{\triangle ABC}}$$

此三式相加即可证得结论. 再来看空间问题，类似地，对四面体用体积法，有

$$\frac{d_A}{h_A}=\frac{V_{P-BCD}}{V_{ABCD}},\quad \frac{d_B}{h_B}=\frac{V_{P-ACD}}{V_{ABCD}},\quad \frac{d_C}{h_C}=\frac{V_{P-ABD}}{V_{ABCD}},\quad \frac{d_D}{h_D}=\frac{V_{P-ABC}}{V_{ABCD}}$$

以上四式相加，即可证得所要证的结论.

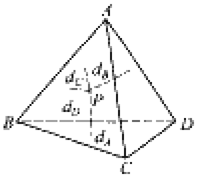


图 82

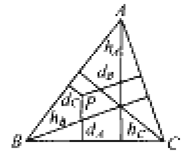


图 83

例 3　过球面上的一点 P 作球的三条两两垂直的弦 PA，PB，PC，求证：$PA^2+PB^2+PC^2$ 为定值.

解　将球与圆作类比. 在平面中，过圆上的一点 P 作圆的两条相互垂直的弦 PA，PB，以 PA，PB 为两邻边的圆的内接矩形的对角线 AB 为圆的一条直径，从而有 $PA^2+PB^2=(2r)^2=4r^2$（r 为圆的半径）为定值. 类似地，过球面上的一点 P 作球的三条两两互相垂直的弦 PA，PB，PC，以 PA，PB，PC 为长、宽、高的球的内接长方体的对角线是球的一条直径，则有 $PA^2+PB^2+PC^2=(2R)^2=4R^2$（$R$ 为球的半径）为定值.

例 4　A，B 是半径为 R 的球面上的两点，它们的球面距离是 $\frac{\pi R}{3}$，求过 AB 的平面中与球心的距离的最大值.

解　将球与圆进行类比. 在平面中，同一圆中的弦心距小的则弦较长，弦心距较大的则弦较短. 类似地，在空间中，同一球中的离球心较近的截面圆较大，离球心较远的截面圆较小. 要使过 AB 的截面圆与球心有最大距离，则需使得过 AB 的截面圆最小. 因为 AB 已定，过 AB 的所有球的截面圆中，以 AB 为直径的圆最小.

设这个最小截面圆的半径为 r，则 $AB=2r$. 球心为 O，依题意有 $\frac{\pi R}{3}=R\cdot\angle AOB$，则 $\angle AOB=\frac{\pi}{3}$，$AB=R$，即 $r=\frac{1}{2}R$.

设过 AB 的最小截面圆离球心 O 的距离为 d，则 $d=\sqrt{R^2-r^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}R$. 故过 AB 的平面中与球心的距离的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}R$.

综上所述可知，在立体几何中，我们常将三棱锥与三角形类比，平行六面体与平行四边形类比，球与圆类比，体积法与面积法类比，以获得问题的求解途径与简捷解答.

5.5.16　一种有效的处理途径——转换思想的运用

进行降维转换和等积转换是求解立体几何问题时一种有效的处理途径，这是因为立体几何中的许多概念是用平面几何知识来定义的. 例如，异面直线间的距离与所成的角、直线和平面所成的角、二面角的大小、平行平面间的距离、球面距离等，都是用平面几何知识定义的. 所以在求解立体几何问题时，有时要善于降维转换，将立体几何问题转化为平面几何问题处理.

例 1　如图 84，已知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，点 E 在棱 D_1D 上，截面 $EAC\,/\!/\,D_1B$，且面 EAC 与底面 $ABCD$ 所成的角为 $45°$，$AB=a$.

（Ⅰ）求截面 EAC 的面积；

（Ⅱ）求异面直线 A_1B_1 与 AC 之间的距离；

（Ⅲ）求三棱锥 B_1-EAC 的体积.

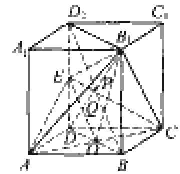


图 84

略解 （Ⅰ）由题设可推知$\angle EOD$ 是面 EAC 与底面 AC 所成二面角的平面角，由此可求得

$$DO=\frac{\sqrt{2}}{2}a,\quad EO=a,\quad S_{\triangle EAC}=\frac{\sqrt{2}}{2}a^2$$

（Ⅱ）可求得 $D_1D=\sqrt{2}a$ 为异面直线 A_1B_1 与 AC 间的距离.

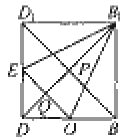


图 85

（Ⅲ）注意到 $V_{B_1-EAC}=2V_{A-EOB_1}$，$AO=\frac{\sqrt{2}}{2}a$ 是三棱锥 $A-EOB_1$ 的高.又注意到正方形 BB_1D_1D 中，E，O 分别是 D_1D，DB 中点，如图 85，则

$$S_{\triangle EOB_1}=\frac{3}{4}a^2$$

故
$$V_{B_1-EAC}=2\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}a^2\times\frac{\sqrt{2}}{2}a=\frac{\sqrt{2}}{4}a^3$$

为所求.

注 将几何体中的有关平面图形单独画出来有助于清晰地处理问题.

例 2 圆台的母线长为 l，母线和高所成的角为 θ，轴截面的对角线垂直于母线，求这个圆台的侧面积.

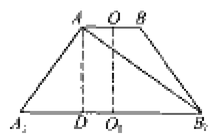


图 86

略解 如图 86，作出圆台的轴截面，则轴截面为等腰梯形 AA_1B_1B，且 $AA_1=l$，$AD\,/\!/\,OO_1$，$\angle A_1AO=\theta$，$\angle A_1AB_1=\frac{\pi}{2}$.

在 $Rt\triangle A_1AB_1$ 中，$A_1B_1=\frac{l}{\sin\theta}$.

又因为 $A_1D=l\sin\theta$，所以 $AO=\frac{l}{\sin\theta}-l\sin\theta$.

故 $S_{圆台侧}=\pi(r_1+r_2)l=\pi l^2\cos^2\theta\csc\theta$ 为所求.

注 轴截面能将各种数量关系和某些性质直观、明显、集中地表现出来，因此求解旋转体问题时，将其转换成求解轴截面的问题就抓住了问题的关键.

例 3 如图 87，圆柱底面半径为 3，高为 4，A 与 B 分别在两底面的圆周上，且 $AB=5$，求异面直线 AB 与 OO' 的距离.

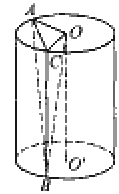


图 87

解 可将异面直线间的距离转换为点与平面的距离，再运用体积转换求解.作母线 BC，联结 OA，OB，OC，AC，则有等体积关系 $V_{O-ABC}=V_{B-AOC}$，且 $OO'\,/\!/$平面 ABC.设 O 到平面 ABC 的距离为 d，则由圆柱性质及已知数量关系，易知 $BC\perp AC$，且$\triangle AOC$ 为边长等于 3 的正三角形，则

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}AC\times BC\times d=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}AC^2\times\sin 60°\times BC$$

故 $d=\frac{3\sqrt{3}}{2}$为所求.

例 4 如图 88，在正方形 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 中，E，F 分别是 BB_1，CD 的中点.

（Ⅰ）证明 $AD\perp D_1F$；

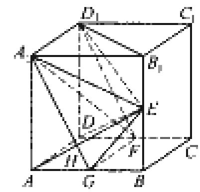


图 88

（Ⅱ）求 AE 与 D_1F 所成的角；

（Ⅲ）证明面 $AED\perp$ 面 A_1FD_1；

（Ⅳ）设 $AA_1=2$，求三棱锥 $F-A_1ED_1$ 的体积 $V_{F-A_1ED_1}$.

解　（Ⅰ）由 $AD\perp$ 面 DC_1，且 $D_1F\subset$ 面 DC_1，则 $AD\perp D_1F$.

（Ⅱ）取 AB 中点 G，联结 A_1G、FG，因为 F 是 CD 的中点，故 GF 与 AD 平行且相等. 又 A_1D_1 与 AD 平行且相等，所以 GF 与 A_1D_1 平行且相等. 故四边形 GFD_1A_1 是平行四边形，$A_1G/\!/D_1F$.

设 A_1G 与 AE 相交于点 H，则 $\angle AHA_1$ 是 AE 与 D_1F 所成的角. 因为 E 是 BB_1 的中点，所以 $\text{Rt}\triangle A_1AG\cong\text{Rt}\triangle ABE$，$\angle GA_1A=\angle GAH$，从而 $\angle AHA_1=90^\circ$，即直线 AE 与 D_1F 所成的角为直角.

（Ⅲ）由（Ⅰ）知 $AD\perp D_1F$，由（Ⅱ）知 $AE\perp D_1F$. 又 $AD\cap AE=A$，所以 $D_1F\perp$ 面 AED. 又 $D_1F\subset$ 面 A_1FD_1，故面 $AED\perp$ 面 A_1FD_1.

（Ⅳ）联结 GE、GD_1. 由 $FG/\!/A_1D_1$，有 $FG/\!/$ 面 A_1ED_1. 又因

$$V_{F-A_1ED_1}=V_{G-A_1ED_1}=V_{D_1-A_1GE},AA_1=2$$

$$S_{\triangle A_1GE}=S_{\square ABB_1A_1}-2S_{\triangle A_1AG}-S_{\triangle GBE}=\frac{3}{2}$$

故

$$V_{F-A_1ED_1}=V_{D_1-A_1GE}=\frac{1}{3}A_1D_1\cdot S_{\triangle A_1GE}=1$$

为所求.

5.5.17　一种常用的求解方法——分解组合思想的运用

分解组合思想方法就是在处理问题时将待处理问题的有关信息先分解后组合(或先分拆后迭加)或先组合后分解，从统一的角度用整体的观念来考虑如何达到目标的思想方法. 这可使我们更为透彻和更有条理地了解问题中所包含的各种信息，对于比较自然、比较有把握地获得问题的处理途径或方案无疑大有好处. 分解组合思想方法在立体几何中常体现于几何体的割补转化中.

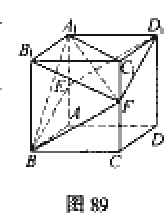


图 89

例 1　如图 89，已知 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是棱长为 a 的正方体，E，F 分别为棱 AA_1，CC_1 的中点，求四棱锥 A_1-EBFD_1 的体积.

解　如图，平面 $EBFD_1$ 将正方体 AC_1 截成体积相等的两部分，其上方部分多面体 $FC_1D_1-BB_1A_1E$ 由三棱锥 B_1-BFA_1、三棱锥 $C_1-FA_1D_1$ 和四棱锥 A_1-BFD_1E 组成，且 $V_{B_1-BFA_1}=2V_{C_1-FA_1D_1}$.

又可把三棱锥 B_1-BFA_1 看成三棱锥 $F-BB_1A_1$，则它的底面是 $\triangle BB_1A_1$，高是 F 到平面 A_1B_1BA 的距离，从而

$$V_{F-BB_1A_1}=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}a^2\times a=\frac{1}{6}a^3$$

故

$$V_{A_1-BFD_1E}=\frac{1}{2}a^3-(\frac{1}{6}a^3+\frac{1}{12}a^3)=\frac{1}{4}a$$

为所求.

例 2　在三棱锥 $P-ABC$ 中，$PA=a$，$CB=b$，PA，PC 所成的角为 θ，AP 与 BC 的距离为 d，求三棱锥 $P-ABC$ 的体积，如图 90.

解 如图,将三棱锥 $P-ABC$ 补形成斜三棱柱 $ABC-PB_1C_1$. 记三棱锥 $P-ABC$ 的体积为 V_1,三棱柱 $ABC-PB_1C_1$ 的体积为 V_2,则 $V_1=\frac{1}{3}V_2$.

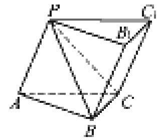


图 90

由 AP // 面 BCC_1B_1,知 AP 与 BC 的距离 d 即为 AP 与面 BCC_1B_1 的距离. 又 AP 与 BC 所成的角为 θ,则 $\angle B_1BC=\theta$,从而

$$V_2=\frac{1}{2}d\cdot S_{\square BCC_1B_1}=\frac{1}{2}d\cdot ab\sin\theta$$

故
$$V_1=\frac{1}{6}abd\sin\theta$$

例 3 在三棱台 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{1}{2}$,$G$ 为 CC_1 的中点,截面 A_1BG 将棱台分成上、下两部分,求这两部分体积之比.

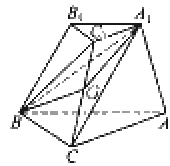


图 91

解 由于分成的两部分都是不规则的几何体,故需将其分割成几个锥体(特别是三棱锥)的组合体才便于计算体积之比.

联结 BC_1, A_1C,则棱台被分割成四个三棱锥的组合体. 如图 91. 注意到三个三棱锥 A_1-BC_1G, $A_1-BC_1B_1$, A_1-BCG 都等高,因而其体积之比为底面面积之比.

又在梯形 BCC_1B_1 中,由 $\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{1}{2}$,且 G 为 C_1C 的中点,有

$$S_{\triangle BGC}=S_{\triangle BGC_1}=S_{\triangle BC_1B_1}$$

即
$$V_{A_1-BGC}=V_{A_1-BGC_1}=V_{A_1-BC_1B_1}=V$$

从而
$$V_{上}=V_{A_1-BGC_1}+V_{A_1-BC_1B_1}=2V$$

在三棱锥 $B-A_1B_1C_1$ 与三棱锥 A_1-ABC 中,它们的高相等,且 $S_{\triangle ABC}=4S_{\triangle A_1B_1C_1}$,则

$$V_{A_1-ABC}=4V_{B-A_1B_1C_1}=4V_{A_1-BC_1B_1}=4V$$

从而
$$V_{下}=V_{A_1-ABC}+V_{A_1-BCG}=5V$$

故 $V_{上}:V_{下}=2:5$ 为所求.

例 4 已知直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$A_2B_2C_2$ 是用一平面截得的截面,且 $AA_2=h_1$, $BB_2=h_2$, $CC_2=h_3$,若 $\triangle ABC$ 的面积为 S,求证:介于截面与下底面之间的几何体的体积为 $V=\frac{1}{3}S(h_1+h_2+h_3)$,如图 92 所示.

分析 由于几何体 $A_2B_2C_2-ABC$ 是一个不规则的几何体,为求得其体积,不妨采用分割或补形的方法来求解.

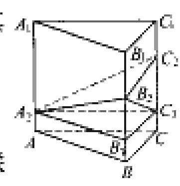


图 92

证法 1 为了讨论方便,不妨设 $h_1\leqslant h_2\leqslant h_3$,如图,可将几何体 $ABC-A_2B_2C_2$ 分割成一个小直三棱柱与两个三棱锥.

过 A_2 作 A_2B_3 // AB 交 B_2B 于 B_3,过 B_3 作 B_3C_3 // BC 交 C_2C 于 C_3,联结 A_2C_3, B_2C_3,则几何体 $ABC-A_2B_2C_2$ 被分割成直三棱柱 $ABC-A_2B_3C_3$,三棱锥 $B_2-A_2B_3C_3$,三棱锥 $A_2-B_2C_3C_2$.

设 $BC=x$, A 到 BC 的距离为 d,则 $S=\frac{1}{2}xd$. 由于

$$V_{ABC-A_2B_3C_3}=Sh_1,\quad V_{B_1-A_2B_3C_3}=\frac{1}{3}S(h_2-h_1)$$

$$V_{A_2-B_2C_3C_2}=\frac{1}{3}S_{\triangle B_2C_3C_2}\cdot d=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}(h_3-h_1)\cdot x\cdot d=\frac{1}{3}S(h_3-h_1)$$

故

$$V_{ABC-A_2B_2C_2}=V_{ABC-A_2B_3C_3}+V_{B_2-A_2B_3C_3}+V_{A_2-B_2C_3C_2}=\frac{1}{3}S(h_1+h_2+h_3)$$

证法 2 将几何体 $ABC-A_2B_2C_2$ 以 $\triangle ABC$ 为底面进行两次等几何体补形，使侧棱的长均为 $h_1+h_2+h_3$，这样就将不规则的几何体补形为新的直三棱柱．而原几何体的体积等于这个新直三棱柱体积的 $\frac{1}{3}$，故

$$V_{ABC-A_2B_2C_2}=\frac{1}{3}V_{\text{新直三棱柱}}=\frac{1}{3}S(h_1+h_2+h_3)$$

5.5.18 射影法与解析法的配合运用——转化思想的运用

在求解某些立体几何问题时，运用射影法将求解问题中的某些元素之间的关系转化到一个射影平面中，然后求解．有时还在射影平面内或某个特殊平面内建立平面直角坐标系，运用解析法求得射影平面或某特殊平面中这些元素之间的数量关系，从而求得原问题．我们称这种处理立体几何问题的方法为射影法与解析法的配合运用．

例 1 如图 93，已知正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D 是 AB 的中点．设 $DC=DA_1$，求二面角 $D-A_1C-A$ 的度数．

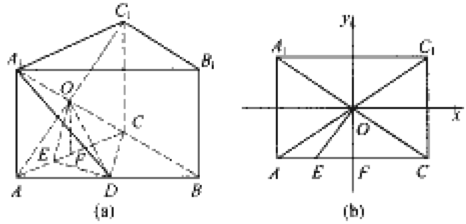


图 93

解 在平面 ABC 内，由 AB 的中点 D 作 $DE\perp AC$ 于 E，设 $AC=2$，则 $DE=AD\cdot\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$AE=\frac{1}{2}$．

因平面 $ABC\perp$ 平面 AC_1，平面 $ABC\cap$ 平面 $AC_1=AC$，则 $DE\perp$ 平面 AC_1．

设 O 为 AC_1 与 A_1C 的交点，联结 OE，则 OE 是 OD 在平面 AC_1 内的射影．又 $DC=DA_1$，知 $OD\perp A_1C$．

由三垂线定理的逆定理，可知 $OE\perp A_1C$，故 $\angle DOE$ 为二面角 $D-A_1C-A$ 的平面角．

在侧面 ACC_1A_1 内，以 O 为原点，过 O 平行于 AC 的直线为 x 轴建立平面直角坐标系，如图 93，设 $C(1,b)$，$E(-\frac{1}{2},b)$（因 $AC=2$，$AE=\frac{1}{2}$），设 OC 的方程为 $y=kx$，则 OE 的方程为 $y=-\frac{1}{k}x$（因 $OE\perp A_1C$），将点 C 坐标代入 $y=kx$ 求得 $b=k$，将点 E 坐标代入 $y=$

$-\frac{1}{k}x=-\frac{1}{b}x$，求得 $b=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. 故 $OE=\frac{\sqrt{3}}{2}$，在 $\mathrm{Rt}\triangle DEO$ 中，$DE=OE$，故 $\angle DOE=45^\circ$. 从而二面角 $D-A_1C-A$ 的度数为 45°.

例 2 如图 94，已知正四棱柱 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$，点 E 在棱 D_1D 上，截面 $EAC /\!/ D_1B$ 且面 EAC 与底面 $ABCD$ 所成的角为 45°，$AB=a$.

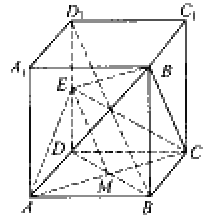


图 94

（Ⅰ）求截面 EAC 的面积；

（Ⅱ）求异面直线 A_1B_1 与 AC 之间的距离；

（Ⅲ）求三棱锥 B_1-EAC 的体积.

解 （Ⅰ）截面 $\triangle EAC$ 在底面 $ABCD$ 内的射影面为 $\triangle ACD$，而 $S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}a^2$. 故

$$S_{\triangle EAC}=\frac{S_{\triangle ACD}}{\cos 45^\circ}=\frac{\sqrt{2}}{2}a^2$$

（Ⅱ）异面直线 A_1B_1 与 AC 在面 DCC_1D_1 内的射影为两平行线 D_1C_1，DC，从而 D_1D 的长度为异面直线 A_1B_1 与 AC 间的距离. 由于 $ED=MD=\frac{\sqrt{2}}{2}=a$. 而由面 $EAC /\!/ D_1B$ 知 E 为 D_1D 的中点，故 $D_1D=\sqrt{2}a$ 为所求.

（Ⅲ）易知 $AC\perp$ 平面 BD_1，从而平面 $EAC\perp$ 面 BD_1. 三棱锥 B_1-EAC 的侧面在平面 BD_1 上的射影面为 $\triangle B_1EM$（其中 M 为 AC 与 BD 的交点），因而过 B_1 作 EM 的垂直相交线段就是三棱锥 B_1-EAC 的高 h. 在平面 B_1D 中，以 D 为原点，DB 所在直线为 x 轴建立平面直角坐标系，如图 95，则

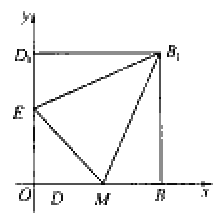


图 95

$$M\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a,0\right),E\left(0,\frac{\sqrt{2}}{2}a\right),B_1(\sqrt{2}a,\sqrt{2}a)$$

直线 ME 的方程为 $x+y-\frac{\sqrt{2}}{2}a=0$，从而

$$h=\frac{\left|\sqrt{2}a+\sqrt{2}a-\frac{\sqrt{2}}{2}a\right|}{\sqrt{2}}=\frac{3}{2}a$$

故

$$V_{B_1-EAC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a^2\cdot\frac{3}{2}a=\frac{\sqrt{2}}{4}a^3$$

例 3 如图 96，已知平行六面体 $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 的底面 $ABCD$ 是菱形，且 $\angle C_1CB=\angle C_1CD=\angle BCD=60^\circ$.

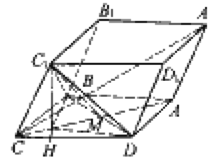


图 96

（Ⅰ）证明：$C_1C\perp BD$；

（Ⅱ）假定 $CD=2$，$CC_1=\frac{3}{2}$，记面 C_1BD 为 α，面 CBD 为 β，求二面角 $\alpha-BD-\beta$ 的平面角的余弦值；

（Ⅲ）当 $\frac{CD}{CC_1}$ 的值为多少时，能使 $A_1C\perp$ 平面 C_1BD？请给出证明.

解 （Ⅰ）证明由 $\angle C_1CB=\angle C_1CD=60^\circ$，知 C_1C 在底面 $ABCD$ 内的射影在 $\angle BCD$ 的角平分线 CA 上，而 $CA\perp BD$，则由三垂线定理知 $C_1C\perp BD$.

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 AC 为 C_1C 在面 BD 内的射影，设 AC 与 BD 交于 M，则 $C_1M\perp BD$.

在$\triangle C_1BC$ 中，$BC=2$，$C_1C=\frac{3}{2}$，$\angle BCC_1=60°$. 求得 $C_1B=C_1D=\frac{\sqrt{13}}{2}$，而 $BD=CD=2$，从而求得 $C_1M=\frac{3}{2}$，即 $S_{\triangle C_1BD}=\frac{1}{2}BD\cdot C_1M=\frac{3}{2}$.

在$\triangle C_1CM$ 中，$C_1C=\frac{3}{2}=C_1M$，$CM=\sqrt{3}$，又推证得 C_1 点在 CM 上的射影 H 为 CM 的中点，即知 $MH=\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故 $S_{\triangle BDH}=\frac{1}{2}BD\cdot MH=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

又$\triangle BDH$ 为$\triangle C_1BD$ 在面 $ABCD$ 内的射影，设它们两个面所成夹角为 θ，则 $\cos\theta=\frac{S_{\triangle BDH}}{S_{\triangle C_1BD}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$为所求.

（Ⅲ）可推证 $BD\perp$平面 A_1C，即有 $BD\perp A_1C$，要使 $A_1C\perp$平面 C_1BD，其充要条件是 $A_1C\perp C_1D$. 又 C_1D 在平面 A_1C 内的射影为 C_1M，从而其充要条件就是 $C_1M\perp A_1C$. 故在 C_1M 所在的平面 A_1C 中以 C 点为原点，CA 所在直线为 x 轴建立平面直角坐标系，如图 97.

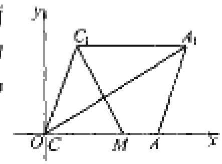


图 97

设 $CD=a$，$CC_1=b$，易求出各点坐标为

$$M(\frac{\sqrt{3}}{2}a,0),A(\sqrt{3}a,0),C_1(\frac{\sqrt{3}}{3}b,\frac{\sqrt{6}}{3}b),A_1(\sqrt{3}a+\frac{\sqrt{3}}{3}b,\frac{\sqrt{6}}{3}b)$$

由 $C_1M\perp A_1C$ 得

$$\frac{\frac{\sqrt{6}}{3}b}{\sqrt{3}a+\frac{\sqrt{3}}{3}b}\cdot\frac{\frac{\sqrt{6}}{3}b}{\frac{\sqrt{3}}{3}b-\frac{\sqrt{3}}{2}a}=-1$$

解得 $a=b$（舍去 $3a+2b=0$）.

故求得$\frac{CD}{CC_1}=1$.

5.5.19 三类角的珠联璧合关系——系统思想的运用

如图 98，AB 与平面 α 所成的角为 θ_1，AC 在平面 α 内，AC 与 AB 的射影 AB' 所成的角为 θ_2，设$\angle BAC=\theta$，则

$$\cos\theta=\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2 \quad ①$$

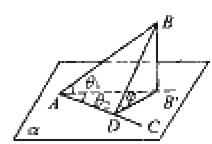


图 98

当 $0°<\theta_2<90°$时，过 B' 作 $B'D\perp AC$ 于 D，联结 BD，则由三垂线定理知 $BD\perp AC$，从而$\angle BDB'$ 为二面角 $B-AC-B'$ 的平面角，设$\angle BDB'=\varphi$，在 B 点运用式①，则推得

$$\sin\theta_1=\sin\theta\cdot\sin\varphi \quad ②$$

式①与式②把立体几何中的线线角、线面角、面面角有机地融合在一起，揭示了它们之间的数量关系及内在联系，形成了一个优美的三类角关系系统. 由于结构相似. 简单易记，故在求解立体几何有关角的问题时有重要作用. 解题时恰当地运用这个关系系统（即两式同时应用），使之珠联璧合、相得益彰，则会妙招迭出.

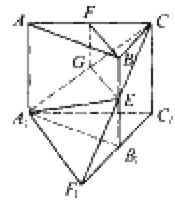


图 99

例 1 如图 99，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，E 在 B_1B 上，截面 $A_1EC\perp$ 侧面 A_1C_1CA．若 $A_1A=A_1B_1$，求平面 A_1EC 与平面 $A_1B_1C_1$ 所成角的度数．

解 延长 CE 交 C_1B_1 的延长线于 F_1，则平面 A_1EC 与平面 $A_1B_1C_1$ 所成的角即为平面 A_1F_1C 与平面 $A_1B_1C_1$ 所成的角，设为 φ．

在截面 A_1EC 内，过 E 作 $EG\perp A_1C$ 于 G，则 $EG\perp$ 面 AC_1．取 AC 中点 F，联结 BF，GF．

由 $AB=BC$ 知 $BF\perp AC$，故 $BF\perp$ 面 AC_1．于是 $BF /\!/ EG$．又 $BE /\!/$ 面 AC_1，所以 $GF /\!/ EB$，即四边形 $BEGF$ 为平行四边形，知 $BE=FG$，又 $GF /\!/ BE /\!/ AA_1$，知 $FG=\dfrac{1}{2}AA_1$，故 $BE=\dfrac{1}{2}BB_1$．

由此即知 $B_1F_1=BC=B_1C_1=B_1A_1$，即 $\angle F_1A_1C_1=90°$，于是有 $F_1A\perp$ 面 A_1C_1CA．

设 $A_1B_1=a$，则 $CF=\sqrt{5}a$，$A_1C=\sqrt{2}a$．又 $CC_1\perp$ 面 A_1FC_1，则由式②，得 $\sin\angle CF_1C_1=\sin\varphi\sin\angle CF_1A_1$，即 $\dfrac{1}{\sqrt{5}}=\sin\varphi\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$，从而 $\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，故 $\varphi=45°$ 为所求．

例 2 已知斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的侧面 A_1ACC_1 与底面 ABC 垂直，$\angle ABC=90°$，$BC=2$，$AC=2\sqrt{3}$，且 $AA_1\perp A_1C$，$AA_1=A_1C$．求侧面 A_1ABB_1 与底面 ABC 所成二面角的大小．

解 设 $\angle A_1AC=\theta_1$，$\angle BAC=\theta_2$，$\angle A_1AB=\theta$，所求二面角为 φ，则由①，②有

$$\begin{cases}\cos\theta=\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2\\ \sin\theta_1=\sin\theta\cdot\sin\varphi\end{cases}$$

利用 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，消去 $\sin\theta$，$\cos\theta$，得

$$\sin^2\varphi=\frac{\sin^2\theta_1}{1-\cos^2\theta_1\cdot\cos^2\theta_2}=\frac{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2}{1-(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}})^2}=\frac{3}{4}$$

则 $\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$（舍去负值），故 $\varphi=60°$ 即为所求．

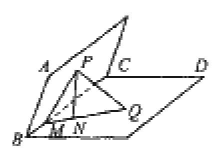


图 100

例 3 如图 100，设平面 AC 和平面 BD 相交于 BC，它们所成的二面角为 $45°$，P 为平面 AC 内的一点，Q 为面 BD 内的一点．已知直线 MQ 是直线 PQ 在面 BD 内的射影，且 M 在 BC 上，又设 PQ 与平面 BD 所成角为 β，$\angle CMQ=\theta(0°<\theta<90°)$，线段 $PM=a$，求线段 PQ 的长．

解 设 P 在平面 BD 内的射影为 N，则点 N 在 MQ 上．设 $\angle PMN=\alpha$，$\angle PMC=\theta_1$，而二面角 $A-BC-D$ 的平面角为 $45°$，由式①，②有

$$\begin{cases}\cos\theta_1=\cos\alpha\cdot\cos\theta\\ \sin\alpha=\sin\theta_1\cdot\sin 45°\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}\cos\theta_1=\cos\alpha\cdot\cos\theta\\ \sin\theta_1=\sqrt{2}\sin\alpha\end{cases}$$

由 $\sin^2\theta_1+\cos^2\theta_1=1$，得 $\sin^2\alpha=\dfrac{\sin^2\theta}{1+\sin^2\theta}$.

又 θ,α 均为锐角，则 $\sin\alpha=\dfrac{\sin\theta}{\sqrt{1+\sin^2\theta}}$.

在$\triangle PMQ$ 中，由正弦定理，有 $PQ=\dfrac{a\sin\theta}{\sin\beta\sqrt{1+\sin^2\theta}}$为所求.

5.5.20　立体几何中的"定比分点"公式——特殊向一般转换思想的运用

关于棱台、圆台中截面的问题统一起来为：设台体(棱台或圆台)的两底面积分别为 S、S'，它们的中截面的面积是 S_0，则

$$2\sqrt{S_0}=\sqrt{S}+\sqrt{S'} \quad ①$$

如果，我们运用特殊向一般转换的思想方法考虑问题，这里给出平行于底面的截面不是中截面，那么式①又如何变化呢？经过推导，我们有：

结论　设台体上、下底面积分别为 S 和 S' $(S<S')$，平行于两底面的截面把高自上而下分成两部分的比为 λ(即定比)，且截面面积为 S_0，则

$$\sqrt{S_0}=\frac{\sqrt{S}+\lambda\sqrt{S'}}{1+\lambda} \quad ②$$

事实上，台体可视为由锥体用平行于底面的平面截得的，设以 S,S_0,S' 为底面积的锥体的高分别为 h,h_0,h'，由锥体的截面性质，得

$$h:h_0:h'=\sqrt{S}:\sqrt{S_0}:\sqrt{S'}$$

则
$$\lambda=\frac{h_0-h}{h'-h_0}=\frac{\sqrt{S_0}-\sqrt{S}}{\sqrt{S'}-\sqrt{S_0}} \quad (*)$$

故
$$\sqrt{S_0}=\frac{\sqrt{S}+\lambda\sqrt{S'}}{1+\lambda}$$

显然，当 $\lambda=1$ 时，平行于两底面的截面即为中截面，此时式②即为式①.

如果我们再一次运用一般向特殊转换的思想方法考虑问题，可得：当 S 变为 0，台体变为锥体(棱锥或圆锥)时，则式②变为

$$\sqrt{S_0}=\frac{\lambda\sqrt{S'}}{1+\lambda} \quad ③$$

特别地当 $\lambda=1$ 时，有

$$S_0=\frac{1}{4}S' \quad ④$$

下面给出以上公式的应用例子：

例 1　已知正三棱锥的底面边长为 a，求过各侧棱中点的截面面积.

解　由题设知，过各侧棱中点的截面就是中截面，而正三棱锥的底面面积为$\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$，故由公式④，有

$$S_0=\frac{S'}{4}=\frac{\sqrt{3}}{16}a^2$$

为所求.

例 2 把一个棱锥用平行于底面的平面截成棱台,使棱台上、下底面积的比为 1:2,求截平面的位置.

解 设棱台上底面积为 Q,则下底面积为 $2Q$.由题设,棱台上底面可视为棱锥中的平行于底面的截面.设这个截面把棱锥的高自上而下分成两部分之比为 λ,则由式③,有

$$\sqrt{Q}=\frac{\lambda+\sqrt{2Q}}{1+\lambda}$$

即

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\lambda}{1+\lambda}$$

故 $\lambda=\sqrt{2}+1$ 为所求.

例 3 棱台的上、下底面的面积各是 Q' 和 Q.求证:这个棱台的高和截得这个棱台的原棱锥的高的比是 $\frac{Q-\sqrt{QQ'}}{Q}$.

证明 设棱台的高和截得这个棱台的原棱锥的高的比为 x,由题设条件可视棱台的上底面为棱锥的平行于底面的截面,则这个截面把棱锥的高自上而下分成的两部分之比 $\lambda=\frac{1-x}{x}$,显然 $0<x<1$.于是由式③,有

$$\sqrt{Q'}=\frac{\lambda\sqrt{Q}}{1+\lambda}=(1-x)\sqrt{Q}$$

即

$$Qx^2-2Qx+Q-Q'=0$$

从而

$$x=\frac{2Q\pm\sqrt{4Q^2-4Q(Q-Q')}}{2Q}=\frac{Q\pm\sqrt{QQ'}}{Q}$$

而 $0<x<1$,故 $x=\frac{Q-\sqrt{QQ'}}{Q}$.

例 4 已知台体的上、下底面积分别为 a^2 与 $b^2(0<a<b)$,一个平行于底面的截面将台体分成两个体积相等的小台体.求上、下两个小台体的高 h_1,h_2 之比.

解 设截面面积 $S_0=c^2(a<c<b)$,$S=a^2$,$S'=b^2$,$\lambda=\frac{h_1}{h_2}$.由式②,有

$$c=\sqrt{S_0}=\frac{\sqrt{S}+\lambda\sqrt{S'}}{1+\lambda}=\frac{a+\lambda b}{1+\lambda}$$

又由题设知,两个小台体体积相等,即

$$\frac{1}{3}(S+\sqrt{SS_0}+S_0)h_1=\frac{1}{3}(S_0+\sqrt{S_0S'}+S')h_2$$

则

$$(a^2+ac+c^2)h_1=(c^2+bc+b^2)h_2$$

即

$$(c^3-a^3)(b-c)h_1=(b^3-c^3)(c-a)h_2$$

即

$$\frac{c^3-a^3}{b^3-c^3}=\frac{c-a}{b-c}\cdot\frac{h_2}{h_1}=\frac{\frac{a+\lambda b}{1+\lambda}-a}{\left(b-\frac{a+\lambda b}{1+\lambda}\right)\lambda}=1$$

即 $c^3-a^3=b^3-c^3$，即 $c^3=\frac{a^3+b^3}{2}$，从而 $c=\frac{\sqrt[3]{a^3+b^3}}{\sqrt[3]{2}}$，即 $\frac{a+\lambda b}{1+\lambda}=\frac{\sqrt[3]{a^3+b^3}}{\sqrt[3]{2}}$. 故 $\lambda=\frac{\sqrt[3]{a^3+b^3}-\sqrt[3]{2}a}{\sqrt[3]{2}b-\sqrt[3]{a^3+b^3}}$即为所求.

最后，我们顺便指出，公式②还有更一般的形式：

设台体中平行于底面的截面及上、下底面面积分别为 S_0,S,S'，则有关系式

$$(\sqrt{S_0})^k=\frac{(\sqrt{S})^k+\lambda(\sqrt{S'})^k}{1+\lambda} \qquad (**)$$

其中当截面把台体的高自上而下分成两部分的比为 λ 时，取 $k=1$；当截面把台体的侧面积自上而下分成两部分的比为 λ 时，取 $k=2$；当截面把台体的体积自上而下分成两部分的比为 λ 时，取 $k=3$.

显然 $k=1$ 时，式（**）即为式②；$k=2$ 时，由于棱台和圆台没有统一的侧面积公式，证明时应分两种情况讨论（略）；$k=3$ 时，注意到台体的统一体积公式及式（*）即可证明（略）.

运用式（**），我们则可更简捷地求解例4.

显然，由式（**），有$(\sqrt{S_0})^3=\frac{(\sqrt{S})^3+(\sqrt{S'})^3}{2}$，即 $c^3=\frac{a^3+b^3}{2}$，亦即 $c=\frac{\sqrt[3]{a^3+b^3}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{a+\lambda b}{1+\lambda}$. 故有 $\lambda=\frac{\sqrt[3]{a^3+b^3}-\sqrt[3]{2}a}{\sqrt[3]{2}b-\sqrt[3]{a^3+b^3}}$为所求.

5.6 平面解析几何问题

5.6.1 解析法证题浅谈——数形结合思想的运用

数与形是现实世界中客观事物的抽象和反映，是数学的基石. 数形结合思想方法，是通过数形间的对应与互助来研究问题并解决问题的思想方法. 笛卡尔通过建立点与有序数组的对应实现了"位置的量化"，这是数形结合的一个根本点，解析几何的建立是数与形的"战略性"结合的标志. 数形结合不但使几何学由于代数化而获得了新的面貌和新的发展，而且给代数提供几何模型，并借助于几何的成果得到进一步的发展.

解析法证题的关键是选择恰当的坐标系，采用便于推导的图形（直线或曲线）方程式，并注意几何关系与代数关系的转换.

例1 设 A,B,C,D 是一直线上的四点，且$\frac{AC}{CB}+\frac{AD}{DB}=0$，求证：$\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}=\frac{2}{AB}$.

证明 以直线作数轴建立直线坐标系，设 A 为原点，B,C,D 三点对应的坐标为 b,c,d，则

$$AC=c,\quad CB=b-c,\quad AD=d,\quad DB=b-d$$

于是问题条件就转化为已知$\frac{c}{b-c}+\frac{d}{b-d}=0$，由此有 $c(b-d)+d(b-c)=0$，即 $bd+bc=2cd$. 所以$\frac{1}{c}+\frac{1}{d}=\frac{2}{b}$，亦即$\frac{1}{AC}+\frac{1}{AD}=\frac{2}{AB}$.

例2 求证：矩形的对角线相等.

证明 如图 101，取矩形 $OBCD$ 的两邻边 OB，OD 所在直线为 x 轴，y 轴，点 O 为原点建立直角坐标系.

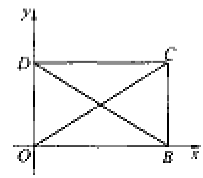


图 101

设 $O(0,0)$，$B(a,0)$，$D(0,b)$，则 C 为 (a,b). 因

$$|OC|=\sqrt{a^2+b^2},\ |BD|=\sqrt{(a-0)^2+(0-b)^2}=\sqrt{a^2+b^2}$$

则 $|OC|=|BD|$，故矩形的对角线相等.

注 选择坐标系时，应尽可能地减少设定字母的个数. A 与 O 重合且一般原点记为 O.

例 3 给定任一锐角 $\triangle ABC$ 及高 AH，在 AH 上任取一点 D，联结 BD 并延长交 AC 于点 E，联结 CD 且延长交 AB 于点 F，求证：$\angle AHE=\angle AHF$.

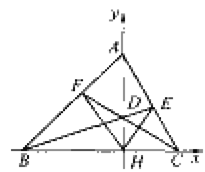


图 102

证明 取 BC 与 AH 所在直线为 x 轴，y 轴，点 H 为原点建立直角坐标系，如图 102，设 A，B，C，D 的坐标分别为 $(0,a)$，$(b,0)$，$(c,0)$，$(0,d)$，则 BD，AC 所在的直线的方程分别为

$$\frac{x}{b}+\frac{y}{d}=1,\quad \frac{x}{c}+\frac{y}{a}=1$$

它们的交点 E 的坐标为 $\left(\frac{bc(d-a)}{cd-ab},\frac{ad(b-c)}{ab-cd}\right)$，即 $k_{HE}=\frac{ad(b-c)}{bc(a-d)}$. 同理，$k_{HF}=\frac{ad(b-c)}{bc(a-d)}$. 故 $\angle AHE=\angle AHF$.

注 也可不求出 E，F 点的坐标，由两直线方程相减得 HE 的方程为

$$x\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)+y\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{a}\right)=0$$

同理得 HF 的方程为

$$x\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)+y\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{a}\right)=0$$

由此得斜率关系即证. 这是运用解析法解题避免繁杂计算常采用的技巧——设而不求.

例 4 在 $\triangle ABC$ 中，AO 是 BC 边上的中线，求证：$|AB|^2+|AC|^2=2(|AO|^2+|OC|^2)$.

分析 这曾是书本中的一道例题，书本中取 BC 所在直线为 x 轴，点 O 为原点建立直角坐标系而简捷求解证明的. 由于只涉及线段的长，也可任意建立直角坐标系. 如果任意建立直角坐标系，则计算要复杂得多.

证明 建立任意直角坐标系，设 $A(x_A,y_A)$，$B(x_B,y_B)$，$C(x_C,y_C)$，则 $O\left(\frac{x_B+x_C}{2},\frac{y_B+y_C}{2}\right)$. 于是

$$|AB|^2+|AC|^2=(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2+(x_A-x_C)^2+(y_A-y_C)^2$$

$$\begin{aligned}2(|AO|^2+|OC|^2)=&2\left[\left(x_A-\frac{x_B+x_C}{2}\right)^2+\left(y_A-\frac{y_B+y_C}{2}\right)^2+\left(\frac{x_B+x_C}{2}-x_C\right)^2+\right.\\&\left.\left(\frac{y_B+y_C}{2}-y_C\right)^2\right]=\frac{1}{2}[(2x_A-x_B-x_C)^2+\\&(2y_A-y_B-y_C)^2+(x_B-x_C)^2+(y_B-y_C)^2]=\\&\frac{1}{2}[4x_A{}^2-4(x_B+x_C)\cdot x_A+\end{aligned}$$

$$2x_B^2+2x_C^2+4y_A^2-4(y_B+y_C)\cdot y_A+2y_B^2+2y_C^2]=$$
$$(x_A-x_B)^2+(y_A-y_B)^2+(x_A-x_C)^2+(y_A-y_C)^2$$

故
$$|AB|^2+|AC|^2=2(|AO|^2+|OC|^2)$$

有些代数问题也可运用解析法来求解.

注 建立任意直角坐标系也可求解例2.

例5 求证:对任意实数 a_1,a_2,b_1,b_2,有不等式$\sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2}\leqslant\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}$成立.

证明 在平面直角坐标系中,设 O 为原点,又设 P_1,P_2 的坐标分别为(a_1,b_1),(a_2,b_2),则

$$|P_1P_2|=\sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2}$$
$$|OP_1|+|OP_2|=\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}$$

注意到联结两点 P_1,P_2 的所有线段中,以线段 P_1P_2 最短,即

$$|P_1P_2|\leqslant|OP_1|+|OP_2|$$

故
$$\sqrt{(a_1-a_2)^2+(b_1-b_2)^2}\leqslant\sqrt{a_1^2+b_1^2}+\sqrt{a_2^2+b_2^2}$$

5.6.2 定比分点公式浅析——公式所包含的多种思想

定比分点公式是解析几何中十分重要的一个公式,公式本身及证明过程包含了一系列的数学思想方法.在此,我们进行初步探索.

(1)模型思想

数学中的每一个公式都是一种数学模型.数学模型思想方法就是借用数学模型处理各类问题的思想方法.

例1 求函数 $y=\dfrac{2x^2}{1+x^2}$的值域.

解 由 $y=\dfrac{2x^2}{1+x^2}=\dfrac{0+x^2\cdot 2}{1+x^2}$,可令 $A(b,0),B(b,2),\lambda=x^2(b\in\mathbf{R})$.由 $\lambda=x^2\geqslant0$,知 $M(b,y)$为 A,B 的内分点(包括 A 点).故 $0\leqslant y<2$ 为所求.

(2)坐标转化思想

课本中推导定比分点公式时,设定点 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$,点 $P(x,y)$分有向线段$\overline{P_1P_2}$所成的比为 $\lambda(\lambda\neq-1)$.过点 P_1,P_2,P 分别作 x 轴的垂线 P_1M_1,P_2M_2,PM,垂足分别为 $M_1(x_1,0),M_2(x_2,0),M(x,0)$,则有

$$\lambda=\frac{P_1P}{PP_2}=\frac{M_1M}{MM_2}=\frac{x-x_1}{x_2-x}$$

从而
$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$$

这一推导过程,体现的正是坐标转化思想方法,即把线段 P_1P_2 转化为其在 x 轴的坐标来处理.运用这种思想方法,可给出某些问题的巧妙解法.

例2 已知 $x\in\mathbf{R}$,求证:$\dfrac{2}{3}\leqslant\dfrac{x^2-2x+2}{x^2-x+1}\leqslant2$.

证明 可将$\frac{2}{3}$，$\frac{x^2-2x+2}{x^2-x+1}$，2这三数转化为平面直角坐标系中x轴上三点的横坐标，即$(\frac{2}{3},0)$，$(\frac{x^2-2x+2}{x^2-x+1},0)$，$(2,0)$．由定比分点坐标公式可求得数量之比$\lambda$，则

$$\lambda=\frac{\frac{x^2-2x+2}{x^2-x+1}-\frac{2}{3}}{2-\frac{x^2-2x+2}{x^2-x+1}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{(x-2)^2}{x^2}$$

当$x=2$时，$\lambda=0$，原不等式左边取等号；

当$x=0$时，λ不存在，原不等式右边取等号；

当$x\neq2$、$x\neq0$时，$\lambda>0$，即$\frac{x^2-2x+2}{x^2-x+1}$是x轴上的两点$(\frac{2}{3},0)$和$(2,0)$的内分点的横坐标，介于$\frac{2}{3}$和2之间．故原不等式获证．

(3)对应思想

设点$P_1(x_1,y_1)$，$P(x,y)$，$P_2(x_2,y_2)$在平面直角坐标系中的x轴，y轴上的射影分别为点M_1，M，M_2和点N_1，N，N_2，线段M_1M_2上的点的横坐标的集合为$A=[x_1,x_2]$，线段N_1N_2上的点的纵坐标的集合为$B=[y_1,y_2]$．显然，集合A中任一元素$M(x)$均与集合B中唯一确定的元素$N(y)$对应，反之亦然．一一对应的存在是一目了然的，对应的法则也很容易找到，这只要从$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$，$y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$中消去$\lambda$即可得到，而事实上这恰是过点$P_1$，$P_2$的直线方程式

$$y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1\qquad(*)$$

$(*)$式圆满地解决了在任意两个区间$[x_1,x_2]$和$[y_1,y_2]$之间的一一对应问题，随之而产生的是我们对一一对应有了较高层次的认识．

(4)换元思想

若实数x_1，x_2，x满足$x_1\leqslant x\leqslant x_2$，则由定比分点公式知，存在常数$\lambda(\lambda\geqslant0)$，使$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}$，其中$\lambda=0$时，$x=x_1$；$\lambda=+\infty$时，$x=x_2$．这一公式反映了区间$[x_1,x_2]$与区间$(0,+\infty]$之间的对应关系．由于$\lambda$的范围比$x$的范围要广，讨论$\lambda$比讨论$x$有更大的余地，因此，这个公式常被作为一种换元的手段．

例3 已知$x,y,a,b\in\mathbf{R}^+$，且$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1$，求$x+y$的最小值．

解 由$x,y,a,b\in\mathbf{R}^+$，且$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}=1$，可知$0<\frac{a}{x}<1$，于是若令$\lambda>0$，可设$\frac{a}{x}=\frac{\lambda}{1+\lambda}$，则

$$x=\frac{1+\lambda}{\lambda}a,\quad \frac{b}{y}=1-\frac{a}{x}=\frac{1}{1+\lambda}$$

即

$$y=(1+\lambda)b$$

从而

$$x+y=\frac{1+\lambda}{\lambda}a+(1+\lambda)b=a+b+\frac{a}{\lambda}+\lambda b\geqslant a+b+2\sqrt{ab}$$

当且仅当$\frac{a}{\lambda}=\lambda b$，即$\lambda=\sqrt{\frac{a}{b}}$时，上式取等号.

故 $x+y$ 的最小值为$a+b+2\sqrt{ab}$.

(5)参数思想

由于定比分点公式表示的是过两定点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$所在直线上任一点$P(x,y)$(除点 P_2)的坐标，当$\lambda=\frac{P_1P}{PP_2}$为特殊值(不等于 -1)时，表示 P 为直线P_1P_2上的特殊点；当$\lambda=\frac{P_1P}{PP_2}$取连续实数(不等于$-1$)时，表示 P 为直线P_1P_2上的连续点.

因而$\begin{cases}x=\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\\ y=\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\end{cases}$是直线$P_1P_2$的一种参数方程形式(以 λ 为参数).

5.6.3 直线及直线方程的建立——数形结合思想的运用

直线，是解析几何要研究的第一种图形，通过对直线的研究，可初步形成曲线与方程的观点，感受数形结合思想方法的运用.

(1)直线的倾斜角和斜率

直线的倾斜角和斜率是建立直线方程的基础.对直线的倾斜角和斜率的理解要特别注意以下几点：

(i)直线倾斜角 α 的范围：$0\leqslant\alpha<180°$.

(ii)线的倾斜角和斜率都是直线方向的数量表示，它们反映了直线关于 x 轴正向的倾斜程度，从而决定了该直线具有某些特性.

(iii)每条直线都存在唯一的倾斜角，但并不是每一条直线都存在斜率(垂直于 x 轴的直线不存在斜率)，这就要求我们在解决与直线斜率有关的问题时，必须考虑斜率是否存在，否则会产生漏解.

(iv)设直线 l 的倾斜角为$\alpha(\alpha\neq 90°)$，$P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)(x_1\neq x_2)$是直线 l 上两点，则直线 l 的斜率为

$$k=\tan\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

当$\alpha=90°$或$x_1=x_2$时，直线 l 垂直于x轴，它的斜率不存在.

例 1 求下列直线的倾斜角.

(Ⅰ)$y=\tan\frac{4\pi}{3}\cdot x$；

(Ⅱ)$y=\tan\frac{4\pi}{3}$.

解 (Ⅰ)$k=\tan\frac{4\pi}{3}=\tan\frac{\pi}{3}$，从而倾斜角 $\alpha=60°$.

(Ⅱ)直线平行于 x 轴，从而倾斜角 $\alpha=0°$.

例 2 已知两点 $A(-3,4)$，$B(4,1)$，过点 $P(2,-1)$的直线 l 与线段AB有公共点.

(Ⅰ)求直线 l 的斜率k的取值范围；

(Ⅱ)求直线 l 的倾斜角 α 的取值范围.

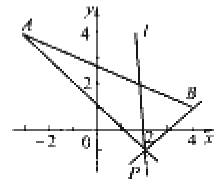


图 103

解 如图 103,易知

$$k_{PA}=\frac{4-(-1)}{-3-2}=-1$$

$$k_{PB}=\frac{1-(-1)}{4-2}=1$$

(Ⅰ)要使 l 与线段 AB 有公共点,必须 $k\geqslant k_{PB}$或$k\leqslant k_{PA}$.故 k 的取值范围是 $k\geqslant 1$ 或 $k\leqslant -1$.

(Ⅱ)直线 l 的倾斜角介于直线 PB 的倾斜角和直线 PA 的倾斜角之间,故直线 l 的倾斜角为$\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant\frac{3\pi}{4}$.

(2)直线方程的各种形式

直线方程的各种形式如下表:

名　称	条　　件	方　程　形　式
点斜式	点 $P_0(x_0,y_0)$,斜率 k 存在	$y-y_0=k(x-x_0)$
斜截式	斜率 k 存在,直线在 y 轴上的截距为 b	$y=kx+b$
两点式	两点 $P_1(x_1,y_1)$,$P_2(x_2,y_2)$,且 $x_1\neq x_2$	$\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$
截距式	x,y 轴上的截距分别为 a,b 且 $a\cdot b\neq 0$	$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$
参数式(一)	点 $P_0(x_0,y_0)$,方向向量 $u=(a,b)$	$\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\end{cases}$($t$ 为参数)
参数式(二)	点 $P(x_0,y_0)$,方向向量 $u=(\cos\alpha,\sin\alpha)$	$\begin{cases}x=x_0+t\cos\alpha\\y=y_0+t\sin\alpha\end{cases}$($t$ 为参数)
一般式	$A^2+B^2\neq 0$	$Ax+By+C=0$

对于上述各种形式,我们还须注意以下几点:

(i)点斜式方程是直线方程的最重要的形式,直线的斜截式、两点式、截距式方程都是通过点斜式方程来推导的.除参数式和一般式外,其他各种形式都有其局限性,如点斜式和斜截式不能表示与 x 轴垂直的直线;两点式不能表示坐标轴及与坐标轴平行的直线;截距式不能表示平行于坐标轴及过原点的直线.

(ii)"截距"并非"距离",截距可取一切实数,而距离只能是非负实数.

(iii)两个独立条件(如两个点,一个点和一方向,…)就可确定一条直线.在满足条件下,各种形式可以互化.

(3)直线方程的建立

直线方程的建立,一般是根据所给条件,或将几何条件转化为代数条件,设出所求直线

方程的形式，利用待定系数法而求得结果．有时也可运用参数法或直线系方程求解．

例3　过点 $M(2,1)$ 作直线 l，分别交 x 轴，y 轴的正半轴于点 A，B．若 $\triangle AOB$ 的面积 S 最小，试求直线 l 的方程．

解法1　设直线 l 的方程为 $y-1=k(x-2)$．令 $y=0$，得 $A\left(\frac{2k-1}{k},0\right)$．同理 $B(0,1-2k)$．由题设，有

$$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2k-1}{k}\cdot(1-2k)=2+\left(-2k-\frac{1}{2k}\right)$$

由题意知 $k<0$，故 $-2k>0$，$-\frac{1}{2k}>0$，从而 $S_{\triangle AOB}\geqslant 2+2=4$，其中等号当且仅当 $-2k=-\frac{1}{2k}$ 取得，即 $k=-\frac{1}{2}$（舍去 $k=\frac{1}{2}$）时，$(S_{\triangle AOB})_{\min}=4$．

故所求直线方程为 $x+2y-4=0$．

解法2　由题设，可设直线 l 的方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1\quad(a>0,b>0)$$

因点 $M(2,1)$ 在直线 l 上，有 $\frac{2}{a}+\frac{1}{b}=1$．由

$$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}ab=\frac{1}{\frac{2}{a}\cdot\frac{1}{b}}\geqslant\frac{1}{\left(\frac{\frac{2}{a}+\frac{1}{b}}{2}\right)^2}=4$$

当且仅当 $\frac{2}{a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{2}$ 取等号，即 $a=4$，$b=2$ 时，$S_{\min}=4$．

故直线 l 的方程是 $x+2y-4=0$．

解法3　由题设，可设直线 l 的方程为

$$Ax+By+C=0(A\neq0,B\neq0)\tag{$*$}$$

因点 $M(2,1)$ 在直线 l 上，有 $C=-(2A+B)$．

令 $x=0$，由式（$*$）知 $y=-\frac{C}{B}=1+\frac{2A}{B}>0$．

令 $y=0$，由式（$*$）知 $x=-\frac{C}{A}=2+\frac{B}{A}>0$．

从而由题设知 $C>0$，有 $A>0$，$B>0$．由

$$S_{\triangle AOB}=\frac{1}{2}xy=\frac{1}{2}\left(1+\frac{2A}{B}\right)\left(2+\frac{B}{A}\right)=\frac{1}{2}\left(4+4\cdot\frac{A}{B}+\frac{B}{A}\right)\geqslant$$
$$\frac{1}{2}\left(4+2\sqrt{4\cdot\frac{A}{B}\cdot\frac{B}{A}}\right)=4$$

其中等号当且仅当 $\frac{4A}{B}=\frac{B}{A}$，即 $A=\frac{1}{2}B$ 时取得，$S_{\min}=4$，此时 $C=-2B$．

故直线 l 的方程为 $x+2y-4=0$．

5.6.4　简单的线性规划及应用——最优化思想的运用

优化问题是我们经常碰到的问题．例如，在人力、物力、资金等资源一定的条件下，如何使用它们来完成最多的任务；若给定一项任务，又如何合理安排和规划，能以最少的人力、物

力、资金等资源来完成该项任务等，这些都是最优化问题.比较有效地求解优化问题的一个方法是线性规划.

(1)线性规划问题的可行解、可行域与最优解

求线性目标函数在线性约束条件下的最大值或最小值的问题，统称为线性规划问题.满足线性约束条件的解，叫做可行解；由所有可行解组成的集合，叫做可行域；使目标函数取得最大值或最小值的可行解，叫做问题的最优解.

例1 求 x,y 的值，使它们满足约束条件 $\begin{cases}0\leqslant x\leqslant 3\\0\leqslant y\leqslant 3\\x+2y\leqslant 8\end{cases}$，并且使目标函数 $z=2x+5y$ 的值最大.

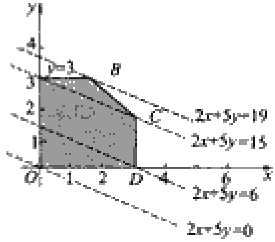


图 104

分析与解 把 x,y 看成坐标平面上的点的坐标，那么约束条件中每一个不等式的点集就是一个平面区域.因为约束条件是由三个不等式组成的，所以满足约束条件的点集是三个平面区域的相交部分，即多边形 $OABCD$，如图 104 中多边形 $OABCD$ 内任何一点的坐标，都同时满足约束条件中的三个不等式，多边形 $OABCD$ 外任何一点的坐标都不能同时满足这三个不等式.所以多边形 $OABCD$ 内(包括边界)的每个点的坐标都是这一线性规划问题的可行解，多边形 $OABCD$ 及其内部的点构成这一线性规划问题的可行域.

我们的目的是：在全体可行解中，找一个最优解，即找一个使目标函数值最大的可行解.由目标函数 $z=2x+5y$ 可知，给定一个 z 值，例如，$z=0$，则 $2x+5y=0$ 是一条直线，这条直线上的任何一点都使目标函数值为 0，这样的直线称为等值线.

显然，不同的 z 值，在坐标平面上就有相应不同的等值线.令目标函数值 z 分别为 0,6,15,19,…并作相应的平行直线，如上图.此时，z 的值越大，相应的直线离开原点越远.因此这一问题就变成：在这些平行线中，要找出一条直线 l，使 l 既与多边形 $OABCD$ 有公共点，而又尽可能地离原点最远，从图中显然可见，经过点 B 的直线符合上述要求，也就是说，点 B 的坐标既满足约束条件，又使目标函数取得最大值.

解方程组 $\begin{cases}x+2y=8\\y=3\end{cases}$，得最优解为 $x=2,y=3$，相应地，目标函数 z 的最大值为

$$z_{\max}=2\times 2+5\times 3=19$$

注 (i)线性约束条件除用一次不等式外，有时也可用一次方程表示.如上两个变量的线性规划问题是用图解的，涉及更多变量的线性规划问题是不能用图解法去解的.

(ii)最优解有时是唯一的，有时不是唯一的，甚至是无穷多的，如把上述问题中的目标函数改为 $z=x+2y$，那么线段 BC 上每一点的坐标都是最优解.对于二元一次不等式组所表示的区域，如果存在使 $ax+by$ 达最大或最小的点，那么最值一定在该区域的顶点或边界上达到.

(2)应用线性规划解决实际问题

例2 要将两种大小不同的钢板截成 A,B,C 三种规格，每张钢板可同时截得三种规格的小钢板的块数如下表所示：

钢板类型 \ 规格类型	A规格	B规格	C规格
第一种钢板	2	1	1
第二种钢板	1	2	3

今需要A,B,C三种规格的成品分别为15,18,27块,问各截这两种钢板多少张可得所需三种规格成品,且使所用钢板张最少.

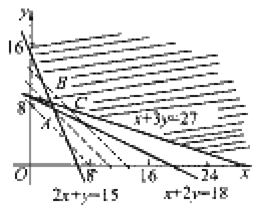


图105

解 (i)模型建立.

设需截第一种钢板 x 张,第二种钢板 y 张,可得 $\begin{cases}2x+y\geqslant 15\\ x+2y\geqslant 18\\ x+3y\geqslant 27\\ x\geqslant 0,y\geqslant 0\end{cases}$,且 x,y 都是整数,求 $z=x+y$ 取最小值时的 x,y.

(ii)模型求解.

首先作出可行域,其次平移直线 $z=x+y$,可知直线经过点 $A(\frac{18}{5},\frac{39}{5})$,此时 $x=\frac{18}{5}$,$y=\frac{39}{5}$,$z=\frac{57}{5}$,显然 $\frac{18}{5}$,$\frac{39}{5}$ 不是最优解(不为整数),如何求最优整数解?

解法1 打网格,平移找整点.

在可行域内打网格,并描出 $A(\frac{18}{5},\frac{39}{5})$ 附近的所有整点,接着平移直线 $l:x+y=0$,会发现当移至 $B(4,8)$,$C(3,9)$ 时直线与原点的距离最近,即 z 的最小值为12.

解法2 找界点,特值验证选优解.

由于目标函数取最小值的整点应分布在可行域的左下侧靠近边界,从而依次取满足条件的整点 $A_0(0,15)$,$A_1(1,13)$,$A_2(2,11)$,$A_3(3,9)$,$A_4(4,8)$,$A_5(5,8)$,$A_6(6,7)$,$A_7(7,7)$,$A_8(8,7)$,$A_9(9,6)$,$A_{10}(10,6)$,…,$A_{27}(27,0)$.将这些点的坐标分别代入 $z=x+y$,求出对应值,可知在 $A_3(3,9)$,$A_4(4,8)$ 处 z 取得最小值.

解法3 平移调整,筛选最优解.

由解法1有 $\frac{18}{5}+\frac{39}{5}>11$ 可知,当 x,y 都是正整数时,$z\geqslant 12$.令 $x+y=12$,即将 $y=12-x$ 代入约束条件整理有 $3\leqslant x\leqslant\frac{9}{2}$,从而 $x=3$,$x=4$,这时最优整点为(3,9)和(4,8).

(iii)模型应用.有两种截法(下略).

5.6.5 直线系方程——参数思想的运用

一般地说,具有某种共同性质的所有直线的集合叫做直线系,它的方程叫做直线系方程,在直线系方程里,除去主要变量 x,y 外,还可以根据具体条件取不同值的变量,它称为参变量,简称参数.运用直线系方程求解问题的方法称为直线系方法.

采用运动变化观点来分析直线方程中的参数,就得到直线系方程.例如,对于直线的斜截式方程 $y=kx+b$,就得到如下结论:

若 b 为常数，k 取不同的值，方程 $y=kx+b$ 就表示不同的直线，所有这些直线都经过同一点 $(0,b)$. 当 k 取遍实数值时，方程 $y=kx+b$ 就表示过点 $(0,b)$ 的除 y 轴以外的所有直线，这些直线的方程 $y=kx+b$ 就叫过定点 $(0,b)$ 的直线系方程.

若 k 为定值，b 取不同的值，就得到斜率均为 k 的一组平行直线，这些直线的方程 $y=kx+b$ 就叫斜率为 k 的直线系方程.

又例如，对于直线的截距式方程 $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$，当 a 为定值，b 取不同的值（异于 0）就得到在 x 轴上的截距为 a 的直线系方程；若 b 为定值，a 取不同的值（异于 0），就得到在 y 轴上的截距为 b 的直线系方程.

一般说来，两个独立条件确定的一条直线，一个独立条件虽不能确定直线的位置，但是可以对直线作一定的约束，即确定直线系方程.

例 1 直线 l 的斜率为 2，它在 x 轴与 y 轴上的截距之和为 10，求直线 l 的方程.

分析 直线 l 应满足的两个条件是：(i) 直线 l 的斜率为 2，(ii) 直线 l 在两轴上的截距之和为 10，可以根据其中一个条件设出直线系方程，利用另一个条件确定参数.

解法 1 依条件 (i)，设 l 的方程为

$$y=2x+b$$

其中 b 是它在 y 轴上的截距. 令 $y=0$，得 l 在 x 轴上的截距为 $-\frac{b}{2}$.

由条件 (ii)，得 $b-\frac{b}{2}=10$，即 $b=20$. 所以直线 l 的方程为

$$y=2x+20$$

解法 2 依条件 (ii)，设 l 的方程为

$$\frac{x}{10-b}+\frac{y}{b}=1$$

其中 b 为直线在 y 轴上的截距，故

$$y=\frac{b}{b-10}x+b$$

由条件 (i)，得

$$\frac{b}{b-10}=2 \quad 即\ b=20$$

所以直线 l 的方程为

$$y=2x+20$$

注 这就是使用直线系方法解题. 从静止的观点来看，直线系方法也是待定系数法；从运动的观点来看，直线系方法就是参数方法.

在直线系方程中，还有一类特殊的直线系方程：

设直线 l_1, l_2, l_3 的方程分别为：

$l_1: A_1x+B_1y+C_1=0$；

$l_2: A_2x+B_2y+C_2=0$；

$l_3: A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0$.

若 l_1 与 l_2 相交时，则 l_3 为过 l_1 与 l_2 交点的直线系方程，这个直线系方程包括过这个交点除直线 l_2 外的所有直线；若 l_1 与 l_2 平行时，则 l_3 为与 l_1, l_2 平行的直线系方程，这个直

线系方程包括所有与 l_1，l_2 平行（除开直线 l_2 外）的所有直线.

例 2　求经过两直线 $2x+y-8=0$ 和 $x-2y+1=0$ 的交点，且平行于直线 $4x-3y-7=0$ 的直线方程.

解　设过两直线 $2x+y-8=0$ 和 $x-2y+1=0$ 的交点的直线系方程为

$$2x+y-8+\lambda(x-2y+1)=0$$

即

$$(2+\lambda)x+(1-2\lambda)x-8+\lambda=0 \qquad (*)$$

又所求直线与直线 $4x-3y-7=0$ 平行，则

$$\frac{2+\lambda}{4}=\frac{1-2\lambda}{-3}\neq\frac{-8+\lambda}{-7}$$

由上求得 $\lambda=2$，代入式（＊），得 $4x-3y-6=0$ 即为所求.

5.6.6　直线与圆有公共点的运用——参数思想的运用

在一个数学问题中，决定其本质特征的量通常只有几个，叫做基本量，也称之为独立参数.在解决数学问题中，根据问题的结构形式，寻找出制约因素，抓住基本量，通过引入适当的参数以体现制约因素或联系已知条件，使问题得到简捷解决的思维方式，我们称之为参数思想方法.

圆心到直线的距离不超过圆的半径时，则表明直线和圆是有公共点的；反之亦是.在许多问题中，由于参变元的广泛使用使得如上的数学事实被遮掩起来，因此，在求解某些问题时，我们要善于运用参数思想方法，揭示出这样的事实本质.

例 1　如果正数 x,y,z 满足 $x+y+z=a$，$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{2}a^2(a>0)$.

求证：$0<x\leqslant\frac{2}{3}a$，$0<y\leqslant\frac{2}{3}a$，$0<z\leqslant\frac{2}{3}a$.

证明　将已知等式分别化为 $x+y=a-z$，$x^2+y^2=\frac{1}{2}a^2-z^2$.因两式同时成立，则直线 $x+y=a-z$ 和圆 $x^2+y^2=\frac{1}{2}a^2-z^2\left(|z|\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)$ 有公共点.故圆心（0，0）到直线的距离不大于圆的半径，即

$$\frac{|z-a|}{\sqrt{2}}\leqslant\sqrt{\frac{1}{2}a^2-z^2}$$

化简，得 $3z^2-2az\leqslant0$，又 $a>0$，$z>0$，则 $0<z\leqslant\frac{2}{3}a$.

同理可证 $0<x\leqslant\frac{2}{3}a$，　$0<y\leqslant\frac{2}{3}a$.

例 2　已知锐角 α,β，满足 $\cos\alpha+\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)=\frac{3}{2}$，求解 α,β.

解　由已知得

$$(1-\cos\alpha)\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta+\cos\alpha-\frac{3}{2}=0$$

设 $x=\cos\beta$，$y=\sin\beta$，则 $x^2+y^2=1$，点 (x,y) 是直线

$$(1-\cos\alpha)\cdot x+\sin\alpha\cdot y+\cos\alpha-\frac{3}{2}=0$$

与单位圆 $x^2+y^2=1$ 的公共点，故有

$$\frac{\left|\cos\alpha-\frac{3}{2}\right|}{\sqrt{(1-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}}\leqslant 1$$

化简，得 $(\cos\alpha-\frac{1}{2})^2\leqslant 0$，即 $\cos\alpha=\frac{1}{2}$. 而 α 为锐角，故求得 $\alpha=\frac{\pi}{3}$. 同理 $\beta=\frac{\pi}{3}$.

例 3 已知 $f(\theta)=\frac{2-\cos\theta}{2+\sin\theta}$，试求 $f(\theta)$ 的取值范围.

解 可视点 $(-\sin\theta,\cos\theta)$ 在圆 $x^2+y^2=1$ 上，则 $f(\theta)$ 是经过点 $(2,2)$，$(-\sin\theta,\cos\theta)$ 的直线斜率. 该直线的方程为 $y=2+f(\theta)\cdot(x-2)$.

而此直线与圆 $x^2+y^2=1$ 相切，即圆心 $(0,0)$ 到此直线的距离等于 1，即 $\frac{|2-2f(\theta)|}{\sqrt{1+f^2(\theta)}}=1$，

所以 $f(\theta)=\frac{4\pm\sqrt{7}}{3}$，故

$$\frac{4-\sqrt{7}}{3}\leqslant f(\theta)\leqslant\frac{4+\sqrt{7}}{3}$$

例 4 已知 $\cos\alpha+\cos\beta=2m$，$\sin\alpha+\sin\beta=2n$，求 $\cot\alpha\cdot\cot\beta$ 的值.

解 令 $A(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$B(\cos\beta,\sin\beta)$，则易知点 A，B 都在单位圆 O 上，设线段 AB 的中点为 C，则 $C(\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{2},\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{2})$，即 $C(m,n)$. 则

$$k_{OC}=\frac{n}{m},\quad k_{AB}=-\frac{m}{n}$$

故 AB 的方程为

$$y-n=-\frac{m}{n}(x-m)$$

即
$$y=-\frac{m}{n}x+\frac{m^2+n^2}{n}$$

将 AB 的方程代入单位圆 $x^2+y^2=1$ 消去 y，得

$$(1+\frac{m^2}{n^2})x^2-\frac{2m(m^2+n^2)}{n^2}x+\frac{(n^2+m^2)^2-n^2}{n^2}=0$$

而 $\cos\alpha$，$\cos\beta$ 为上述方程的根，即

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{(n^2+m^2)^2-n^2}{m^2+n^2}$$

同理
$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{(m^2+n^2)^2-m^2}{m^2+n^2}$$

故
$$\cot\alpha\cdot\cot\beta=\frac{(m^2+n^2)^2-n^2}{(m^2+n^2)^2-m^2}$$

上述 4 例中，例 1 是把题设中的参变元看作是问题中的制约因素，例 2～4 是引入圆中的点参数或圆的参数方程.

有人曾把平面解析几何的三块内容形象地概括为参数思想形成的三部曲：参数思想的酝酿渗透、参数思想的广用显现、参数思想的活用明确. 这说明了参数思想方法在平面解析几何中的重要地位.

5.6.7　圆的各种形式的方程及应用——符号化与变元表示思想的运用

(1)圆的各种形式的方程

标准式:圆心为(a,b),半径为r的圆的方程为

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$$

一般式

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

其中

$$D^2+E^2-4F>0$$

参数式:圆心为(a,b),半径为r的圆的参数方程为

$$\begin{cases}x=a+r\cdot\cos\theta\\ y=b+r\cdot\sin\theta\end{cases}\quad(\theta\text{ 为参数})$$

定点比例式(圆的第二定义):与两定点$(a,0)$,$(b,0)$$(a\neq b)$距离的比为$\frac{m}{n}$($n\neq m$,且$n>0$,$m>0$)的点的轨迹是圆

$$\left(x-\frac{an^2-bm^2}{n^2-m^2}\right)^2+y^2=\left[\frac{mn(a-b)}{n^2-m^2}\right]^2$$

与两定点$(a,0)$,$(0,c)$$(a\neq0)$距离的比为$\frac{m}{n}$($n\neq m$且$n>0$,$m>0$)的点的轨迹是圆

$$\left(x-\frac{an^2}{n^2-m^2}\right)^2+\left(y+\frac{cm^2}{n^2-m^2}\right)^2=\left[\frac{mn(a+c)}{n^2-m^2}\right]^2$$

事实上,上述两种形式都可由求轨迹方程的直接法得出,且均是课本(人教社实验修订本高二(上)P78)中的例题的推广.

直径式:以点$A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$为圆直径两端点的圆的方程为

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0$$

即

$$x^2+y^2-(x_1+x_2)x-(y_1+y_2)y+x_1x_2+y_1y_2=0\qquad(*)$$

圆系式:过两圆C_1,C_2或圆C_1与曲线C_2交点的圆的方程为

$$C_1+\lambda C_2=0(\lambda\neq-1)$$

(2)应用

例1　已知一圆在x轴上的截距为a,b,在y轴上的截距为c($c\neq0$),求此圆的方程.

解法1　运用标准式:由于圆过点$A(a,0)$,$B(b,0)$,$C(0,c)$三点,则圆心M在AB,AC的垂直平分线上,即M点是两直线

$$x=\frac{1}{2}(a+b),(x-a)^2+y^2=x^2+(y-c)^2$$

的交点,求得$M\left(\frac{a+b}{2},\frac{c^2+ab}{2c}\right)$,又可求得半径

$$r=|MA|=\sqrt{\left(\frac{a+b}{2}-a\right)^2+\left(\frac{c^2+ab}{2c}\right)^2}$$

故所求圆的方程为

$$\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2+\left(y-\frac{c^2+ab}{2c}\right)^2=\left(\frac{b-a}{2}\right)^2+\left(\frac{c^2+ab}{2c}\right)^2$$

即
$$x^2+y^2-(a+b)x-(c+\frac{ab}{c})y+ab=0$$

解法 2 运用一般式:设此圆的方程为

$$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$$

此圆在 x 轴上的截距是 a,b,则

$$a^2+Da+F=0 \quad ①$$

$$b^2+Db+F=0 \quad ②$$

由①,②知 a,b 是方程 $x^2+Dx+F=0$ 的两根,从而由韦达定理,有

$$a+b=-D,ab=F$$

又此圆在 y 轴上截距为 c,有

$$c^2+Ec+F=0 \quad ③$$

从而 $c^2+Ec+ab=0$,即 $E=-\frac{c^2+ab}{c}$.此时,显然满足 $D^2+E^2-4F>0$,故所求圆的方程为

$$x^2+y^2-(a+b)x-(c+\frac{ab}{c})y+ab=0$$

注 也可由①,②,③联立求出 D,E,F,但麻烦些.

例 2 设 $A(6,0)$ 为定点,P 为圆 $x^2+y^2=9$ 上一点,M 是 AP 上的一点,且满足 $\frac{AM}{MP}=\frac{1}{2}$.当点 P 在圆上运动时,求点 M 的轨迹方程.

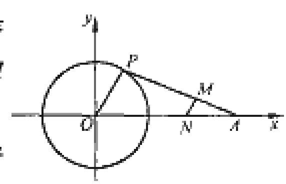


图 106

解法 1 运用标准式:作 $MN//PO$ 交 x 轴于 N,如图 106,显见 $|MN|$ 为定长,即 $|MN|=1$,且 N 为定点 $(4,0)$,由圆的定义,到定点的距离等于定长的点的轨迹是圆,定点为圆心,定长为半径.故所求圆的方程为 $(x-4)^2+y^2=1$.

解法 2 运用参数式:设点 M 的坐标是 (x,y),因为圆 $x^2+y^2=9$ 的参数方程为 $\begin{cases}x=3\cos\theta\\y=3\sin\theta\end{cases}$ (θ 为参数).所以可设点 P 的坐标为 $(3\cos\theta,3\sin\theta)$,由比例定理(或由定比分点坐标公式)得点 M 的轨迹的参数方程为 $\begin{cases}x=4+\cos\theta\\y=\sin\theta\end{cases}$ (θ 为参数).

所以,线段 AP 上的点 M 的轨迹是以点 $(4,0)$ 为圆心,1 为半径的圆.

例 3 已知一曲线是与两个定点 $O(0,0)$,$A(3,0)$ 的距离的比为 $\frac{1}{2}$ 的点的轨迹,求此曲线的方程,如图 107.

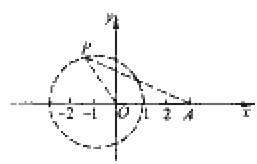


图 107

解法 1 运用定点比例式:由题设,有 $a=0,b=3,m=1,n=2$ 或 $a=3,c=0,n=1,m=2$,即均可求得曲线方程为 $(x+1)^2+y^2=4$.

解法 2 运用直径式:由题设及圆的轨迹第二定义(即定点比例式形式)可知,所求曲线为圆,并可推知其圆心在直线 OA 上,且圆与直线 OA 的两个交点即为直径的两端点.由平面几何知识得动点 P 满足 $\frac{|PO|}{|PA|}=\frac{1}{2}$ 的点为 $P(1,0)$,$Q(-3,0)$,从而所求方程为

$$(x-1)(x+3)+y\cdot y=0$$

即

$$(x+1)^2+y^2=4$$

例 4　求以相交两圆 $C_1:x^2+y^2+4x+y+1=0$ 及 $C_2:x^2+y^2+2x+2y+1=0$ 的公共弦为直径的圆的方程.

解法 1　运用圆系式:由两圆方程相减即得公共弦所在直线的方程 $l:2x-y=0$.

设所求圆的方程为

$$x^2+y^2+4x+y+1+\lambda(2x-y)=0$$

即

$$x^2+y^2+(4+2\lambda)x+(1-\lambda)y+1=0$$

其圆心$\left(-2-\lambda,\frac{\lambda-1}{2}\right)$必在直线 $2x-y=0$ 上,即由 $2(-2-\lambda)-\frac{\lambda-1}{2}=0$ 求得 $\lambda=-\frac{7}{5}$.

故所求方程为

$$5x^2+5y^2+6x+12y+5=0$$

解法 2　运用直径式:可得公共弦方程为 $2x-y=0$.由

$$\begin{cases}x^2+y^2+4x+y+1=0\\2x-y=0\end{cases}$$

分别消去 y,x 得

$$5x^2+6x+1=0\quad 及\quad 5y^2+12y+4=0$$

此两式相加得,以两交点为直径两端点的圆的方程为

$$5x^2+5y^2+6x+12y+5=0$$

5.6.8　谈圆的直径式方程——分解组合思想的运用

圆的直径式方程,在很多书本中是以习题给出的:已知圆的直径端点 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,证明:圆的方程是

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)=0 \qquad ①$$

事实上,若设 $M(x,y)$是圆上异于直径端点 A、B 的点,由$\frac{y-y_1}{x-x_1}\cdot\frac{y-y_2}{x-x_2}=-1$即得式①.显然 A,B 也满足式①,由此即证得式①.对于式①,可分解变形为

$$x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2+y^2-(y_1+y_2)y+y_1y_2=0 \qquad ②$$

而式②可看作是两式

$$x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0$$

与

$$y^2-(y_1+y_2)y+y_1y_2=0$$

迭加而成,且每一式中的一次项和常数项明确显露出韦达定理特征,据此着眼,对于某些直线与曲线相交问题,可将直线方程代入曲线方程分别得出关于 x 及 y 的一元二次方程,然后两式迭加即得直线被曲线所截弦长为直径的圆的方程.

下面取曲线为圆(也可以是抛物线、椭圆、双曲线等)$x^2+y^2=r^2$,取直线方程为 $y=kx+b(k\neq0)$为例证明之.

设直线 $y=kx+b$ 与圆 $x^2+y^2=r^2$ 有两个交点 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,将 $y=kx+b$ 代入 $x^2+y^2=r^2$ 消去 y,得

$$(1+k^2)x^2+2bkx+b^2-r^2=0 \qquad ③$$

将 $x=\frac{y-b}{k}$ 代入 $x^2+y^2=r^2$，消去 x，得

$$(1+k^2)y^2-2by+b_2-r^2k^2=0 \quad ④$$

由韦达定理得

$$x_1+x_2=-\frac{2bk}{1+k^2},\quad x_1\cdot x_2=-\frac{b^2-r^2}{1+k^2}$$

$$y_1+y_2=\frac{2b}{1+k^2},\quad y_1\cdot y_2=\frac{b^2-r^2k^2}{1+k^2} \quad ⑤$$

将⑤中各式代入②，得

$$(1+k^2)x^2+2bkx+b^2-r^2+(1+k^2)y^2-2by+b^2-r^2k^2=0 \quad ⑥$$

式⑥即为以弦长 AB 为直径的圆的方程．而式③＋式④即得式⑥．

由上可知，我们在求直线与曲线相交所得弦为直径的圆的方程时，均可这样简化处理．

例 1 求过直线 $4x-3y=20$ 与圆 $x^2+y^2=25$ 的交点且面积最小的圆的方程．

解 由题设可知所求圆即以直线被圆所截弦长为直径的圆，由 $4x-3y=20$ 及 $x^2+y^2=25$ 可得

$$5x^2-32x+35=0, 5y^2+24y=0$$

两式迭加得

$$5x^2+5y^2-32x+24y+35=0$$

为所求．

例 2 求经过两圆 $x^2+y^2+6x-4=0$ 和 $x^2+y^2+6y-28=0$ 的交点且面积最小的圆的方程．

解 由题设知所求圆以两圆交点为直径端点的圆．

由两式 $x^2+y^2+6x-4=0$ 与 $x^2+y^2+6y-28=0$ 相减得交点弦的方程 $x-y+4=0$．

由 $x-y+4=0$ 及 $x^2+y^2+6x-4=0$（或 $x^2+y^2+6y-28=0$）得 $x^2+7x+6=0$，$y^2-y-6=0$．

两式迭加得 $x^2+y^2+7x-y=0$ 为所求．

例 3 已知一椭圆中心在原点 O，焦点在坐标轴上，直线 $y=x+1$ 与该椭圆交于 P,Q，且 $OP\perp OQ$，$|PQ|=\frac{\sqrt{10}}{2}$，求椭圆的方程．

解 设椭圆方程为

$$ax^2+by^2=1(a>0,b>0,a\neq b)$$

由 $y=x+1$ 及 $ax^2+by^2=1$ 得

$$(a+b)x^2+2bx+b-1=0,\quad (a+b)y^2-2ay+a-1=0$$

上述两式相迭加得以 PQ 为直径的圆的方程

$$(a+b)x^2+(a+b)y^2+2bx-2ay+a+b-2=0 \quad ⑦$$

由 $OP\perp OQ$，知圆⑦必过原点，则有

$$a+b-2=0 \quad 即 \quad a+b=2$$

将 $a+b=2$ 代入式⑦，得

$$x^2+y^2+bx-ay=0$$

即
$$\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+\left(y-\frac{a}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(a^2+b^2)\left(\text{半径为}\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}\right)$$

又由 $|PQ|=\frac{\sqrt{10}}{2}$，即有 $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$，即 $a^2+b^2=\frac{5}{2}$.

解由 $a+b=2$ 与 $a^2+b^2=\frac{5}{2}$ 组成的方程组，得

$$\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\ b=\frac{3}{2}\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}a=\frac{3}{2}\\ b=\frac{1}{2}\end{cases}$$

故所求椭圆的方程为

$$\frac{x^2}{2}+\frac{3y^2}{2}=1\quad\text{或}\quad\frac{3x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=1$$

5.6.9　动点到两定点距离的和差最值——类比思想的运用

众所周知，当动点到两定点距离的差为定值 0 时，其轨迹是一条直线. 如果给定一直线和不在直线上两定点，就有“在直线上求一点，使它到直线外两定点的距离之和的最小值与距离之差的最大值”的问题. 显然，当两定点在已知直线的同侧时，利用点对称转化为异侧两点，可求得距离之和的最小值. 当两定点在已知直线的异侧时，利用点对称转化为同侧两点，可求得距离之差的最大值.

在课本中，我们已经学习了：当动点到两定点的距离之和(大于两定点间距离)或距离之差的绝对值(小于两定点间距离)为定值时，其动点轨迹是椭圆或双曲线. 如果我们运用类比思想方法来考虑问题，将直线类比为曲线，则就有“在曲线上求一点，使它到不在曲线上两定点的距离之和的最小值与距离之差的最大值”的问题. 为了讨论问题的方便，我们仅讨论两定点之一为曲线的特殊点(如圆心或焦点)时的情形. 下面以例题的形式介绍求距离之和的最小值问题，距离之差的最大值问题留作练习给读者.

例 1　在已知圆 O 上找一点 N，使它到圆心 O 和另一定点 M 的距离之和最小.

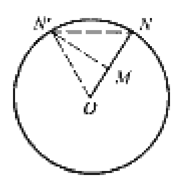


图 108

解　如图 108，设圆 O 的半径为 r.

当 M 点在圆外时，联结 MO 交圆于点 N，则点 N 为所求(证明略).

当 M 点在圆内时，设 M 与 O 的距离为 d，联结 OM 且延长交圆于点 N，则点 N 也即为所求. 此时

$$|NM|+|NO|=2|ON|-|OM|=2r-d$$

若不然，在圆上取异于点 N 的另一点 N'，则

$$|N'M|+|N'O|=|N'M|+r$$

因
$$|N'M|+|MO|>|ON'|=|ON|=|NM|+|MO|$$

知
$$|N'M|>|NM|$$

从而
$$|N'M|+|N'O|>|NM|+r=2r-d$$

注　点 M 在圆内时，MO 的延长线与圆 O 交于 P 点，则点 P 到 O,M 的距离之和为最大.

例 2 在已知椭圆上求一点 N，使点 N 到右焦点 F_2 与一定点 M(异于焦点)的距离之和最小.

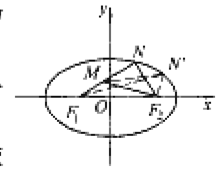


图 109

解 如图 109，设椭圆长轴长为 $2a$，半焦距为 c. 当点 M 在椭圆外时，联结 MF_2 交椭圆于点 N，则点 N 为所求(证明略).

当 M 点在椭圆内时，且点 M 异于点 F_1，F_2，联结 F_1M 并延长交椭圆于 N，联结 NF_2，则 N 点即为所求. 此时

$$|NF_2|+|NM|=|NF_2|+|NF_1|-|F_1M|=2a-|F_1M|$$

若不然，在椭圆上取异于 N 点的另一点 N'，联结 $N'F_1$，$N'F_2$，$N'M$，则

$$|N'F_2|+|N'M|=2a-|N'F_1|+|N'M|=2a-(|N'F_1|-|N'M|)\geqslant 2a-|MF_1|$$

注 点 M 在椭圆内时，延长 MF_1 与椭圆交于点 P，则点 P 到点 F_2，M 的距离之和最大，为 $2a+|MF_1|$.

例 3 在已知双曲线上找一点 N，使点 N 以双曲线右支焦点 F_2 与不在双曲线上的一已知点 M 的距离之和最小.

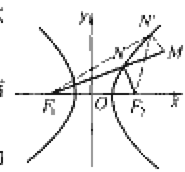


图 110

解 如图 110，设双曲线实轴长为 $2a$. 当 M 点不在右支内部，联结 MF_2 交双曲线右支于点 N，则点 N 为所求(证明略).

当 M 点在双曲线右支内部时，联结 F_1M 交右支于点 N，则点 N 即为所求. 此时

$$|NM|+|NF_2|=|NF_1|-2a+|NM|=|MF_1|-2a$$

若不然，在右支上取异于点 N 的另一点 N'，联结 $N'F_2$，$N'F_1$，$N'M$，则

$$|N'F_2|+|N'M|=|N'F_1|-2a+|N'M|>|MF_1|-2a$$

例 4 在已知抛物线上求一点 N，使它到焦点 F 及不在抛物线上一已知点 M 的距离之和最小.

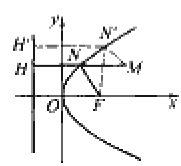


图 111

解 如图 111，若点 M 在抛物线外部时，联结 MF 交抛物线于点 N，则 N 点即为所求(证明略).

若点 M 在抛物线内部时，过 M 点作准线的垂线，交抛物线于点 N，垂足为点 H，联结 NF，则 N 点即为所求，此时最小距离为 $|MH|$. 若不然，在抛物线上取异于点 N 的另一点 N'，联结 $N'F$，$N'M$，作 $N'H'$ 垂直于准线，垂足为 H'，则有

$$|N'F|+|N'M|=|N'H'|+|N'M|>|HM|$$

5.6.10 圆、椭圆、双曲线的定义问题——纵向化归思想的运用

(1)圆的定义及标准方程的建立

我们知道，平面内与定点的距离等于定长的点的集合(轨迹)是圆. 定点是圆心，定长是半径.

若设定点在原点(0,0)，定长为 r，则圆的方程为

$$x^2+y^2=r^2 \qquad ①$$

由式①进一步化归有

$$x^2+y^2=\frac{1\cdot r^2(r^2-1)}{r^2-1}\quad(r^2\neq 1)$$

则 $$(r^2-1)x^2+(r^2-1)y^2-2r^2x=1\cdot r^2(r^2-1)-2r^2x$$

即 $$r^2(x^2-2x+1)+r^2y^2=(x^2-2r^2x+r^4)+y^2$$

故 $$\frac{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}{\sqrt{(x-r^2)^2+y^2}}=\frac{1}{r} \qquad ②$$

同理，由 $x^2+y^2=m^2n^2(m\neq n)$ 可得

$$\frac{\sqrt{(x-m^2)^2+y^2}}{\sqrt{(x-n^2)^2+y^2}}=\frac{m}{n} \qquad ③$$

由 $(x+a)^2+y^2=m^2n^2(m\neq n)$ 得

$$\frac{\sqrt{(x+a-m^2)^2+y^2}}{\sqrt{(x+a-n^2)^2+y^2}}=\frac{m}{n} \qquad ④$$

事实上，式④也可由式③用 $x+a$ 代换 x 即得.

在式④中，取 $a=m=1,n=2$，即得到一般性的结论. 这说明将例 2 条件改变成一般形式，则得到圆的另一定义：

与两个定点 $(a,0),(b,0)(a\neq b)$ 距离的比为常数 $\frac{m}{n}(n\neq m$ 且 $n>0,m>0)$ 的点的轨迹是圆

$$\left(x-\frac{an^2-bm^2}{n^2-m^2}\right)^2+y^2=\left[\frac{mn(a-b)}{n^2-m^2}\right]^2 \quad (a\neq b,n\neq m)$$

(2)椭圆的定义及标准方程的建立

把平面内与两个定点 F_1,F_2 的距离的和等于常数(大于 $|F_1F_2|$)的点的轨迹叫做椭圆. 这两个定点叫做椭圆的焦点，两焦点的距离叫做焦距.

以 F_1F_2 的中点为原点，F_1F_2 所在直线为 x 轴建立坐标系，设点 $M(x,y)$ 是椭圆上任意一点，椭圆的焦距为 $2c(c>0)$，点 M 与 F_1 和 F_2 的距离的和等于正常数 $2a$，则点 F_1,F_2 的坐标分别是 $(-c,0),(c,0)$，得方程

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a \qquad ⑤$$

由 $\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2}$ 两边平方，化简，得

$$a^2-cx=a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \qquad ⑥$$

或由 $\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$ 两边平方，化简，得

$$a^2+cx=a\sqrt{(x+c)^2+y^2} \qquad ⑦$$

再由式⑥或式⑦两边平方，并令 $a^2-c^2=b^2(b>0)$，整理，得

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0) \qquad ⑧$$

我们将上述过程中的有关式子进一步化归：

由式⑥，得

$$\frac{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}{\frac{a^2}{c}-x}=\frac{c}{a} \qquad ⑨$$

注意到 $|x|\leqslant a$，即

$$\frac{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}{\left|\frac{a^2}{c}-x\right|}=\frac{c}{a} \tag{⑩}$$

同样由⑦，得

$$\frac{\sqrt{(x+c)^2+y^2}}{\left|x-\left(-\frac{a^2}{c}\right)\right|}=\frac{c}{a} \tag{⑪}$$

由⑩(或式⑪)，我们得到：

与定点 $F(c,0)$(或 $F(-c,0)$)的距离和它到定直线 $l:x=\frac{a^2}{c}$(或 $x=-\frac{a^2}{c}$)的距离的比是常数$\frac{c}{a}$($a>c>0$)的点的轨迹是椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>c>0,b^2=a^2-c^2)$$

此即为一般性结论，可见这也是椭圆的定义，一般地，常称这个定义为椭圆的第二定义.

(3)双曲线的定义及标准方程的建立

把平面内与两个定点 F_1,F_2 的距离的差的绝对值是常数(小于$|F_1F_2|$)的点的轨迹叫做双曲线.这两个定点叫做双曲线的焦点，两焦点的距离叫做焦距.

以 F_1F_2 的中点为原点，F_1F_2 所在直线为 x 轴建立直角坐标系.设点 $M(x,y)$是双曲线上的任意一点，双曲线的焦距为 $2c(c>0)$，点 M 与 F_1 和 F_2 的距离的差等于正常数 $2a$，则 $F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$，得方程

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a \tag{⑫}$$

由$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=\pm 2a+\sqrt{(x-c)^2+y^2}$两边平方，化简，得

$$cx-a^2=\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2} \tag{⑬}$$

或由$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a+\sqrt{(x+c)^2+y^2}$两边平方，化简得

$$cx+a^2=\pm a\sqrt{(x+c)^2+y^2} \tag{⑭}$$

再由式⑬或式⑭两边平方，并令 $c^2-a^2=b^2(b>0)$，整理，得

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0) \tag{⑮}$$

我们也将上述过程中的有关式子进一步化归：

由式⑬并注意到$|x|\geqslant a$，得

$$\frac{\sqrt{(x-c)^2+y^2}}{\left|x-\frac{a^2}{c}\right|}=\frac{c}{a} \tag{⑯}$$

同样由式⑭，得

$$\frac{\sqrt{(x+c)^2+y^2}}{\left|x-\left(-\frac{a^2}{c}\right)\right|}=\frac{c}{a} \tag{⑰}$$

由式⑯(或式⑰)，我们得到：

与定点 $F(c,0)$（或 $F(-c,0)$）$(c>0)$ 的距离和它到定直线 $l:x=\frac{a^2}{c}$（或 $x=-\frac{a^2}{c}$）的距离的比是常数 $\frac{c}{a}(c>a>0)$ 的点的轨迹是双曲线

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0,c^2-a^2=b^2)$$

此即为一般性结论.可见这也是双曲线的定义,一般称这个定义为双曲线的第二定义.

综上所述,我们运用纵向化归的思想方法从圆、椭圆、双曲线的定义出发推导出标准方程,再得到相应的3道例题,并以此得到它们各自的第二定义.

5.6.11 利用圆锥曲线的定义解题——化归思想的运用

定义是反映数学对象的本质属性和特征的思维形式.对定义的深刻理解是提高解题能力的坚实基础.有关圆锥曲线的问题,有相当多的问题是可以化归到运用定义而简捷求解的.

例1 一动圆过定点 $F_2(c,0)$,且与定圆 $(x+c)^2+y^2=4a^2(a>0,c>0)$ 相切.试求动圆圆心 P 的轨迹.

解 (i)当 $a>c$ 时,定点 $F_2(c,0)$ 在定圆(设其圆心为 F_1)内,动圆只能与定圆 F_1 内切于 Q.这时

$$|PF_1|+|PF_2|=|PF_1|+|PQ|=2a$$

由椭圆定义知,点 P 的轨迹是椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$$

(ii)当 $a<c$ 时,定点 $F_2(c,0)$ 在定圆 F_1 外,动圆只能与定圆 F_1 外切于 W.这时,有

$$|PF_1|-|PF_2|=|PF_1|-|PW|=2a$$

由双曲线定义知,点 P 的轨迹是双曲线

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1$$

(iii)当 $a=c$ 时,定圆 F_1 恰过定点 F_2,要使 F_2 为切点,与定圆 F_1 内切或外切的圆的圆心 P 只能在 F_1F_2 的连线所在直线上,这时轨迹为直线 $y=0$.

例2 设 $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的两个焦点, $P(x_0,y_0)$ 是椭圆上任一点,求 $|PF_1|$ 和 $|PF_2|$ 的长.

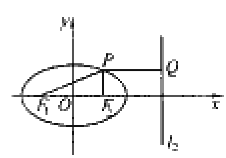


图 112

解 如图112,设椭圆的右准线为 $l_2:x=\frac{a^2}{c}$,作 $PQ\perp l_2$ 于 Q,则

$$|PQ|=\left|\frac{a^2}{c}-x_0\right|=\frac{a^2}{c}-x_0\left(\frac{a^2}{c}>x_0\right)$$

由椭圆第二定义知 $\frac{|PF_2|}{|PQ|}=e$,从而

$$|PF_2|=e|PQ|=e\left(\frac{a^2}{c}-x_0\right)=a-ex_0$$

又 $|PF_1|+|PF_2|=2a$,故 $|PF_1|=a+ex_0$.

注 (i)所求上述两式即为椭圆的焦半径公式. 类似地,椭圆$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$(焦点$F_1(0,-c)$,$F_2(0,c)$)的焦半径公式为

$$|PF_1|=a+ey_0,\quad |PF_2|=a-ey_0$$

(ii)双曲线$\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{a^2}=1(a>0,b>0)$(焦点$F_1(-c,0)$,$F_2(c,0)$,点$P$在双曲线右支上时)的焦半径公式为$|PF_1|=ex_0+a$,$|PF_2|=ex_0-a$,或$|PF_1|=-(ex_0+a)$,$|PF_2|=-(ex_0-a)$(点$P$在双曲线左支上时);抛物线$y^2=2px(p>0)$($F$为焦点,$P(x_0,y_0)$为抛物线上一点)的焦半径公式为

$$|PF|=x_0+\frac{p}{2}$$

例 3 双曲线$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$的两个焦点为$F_1,F_2$,点$P$在双曲线上,若$PF_1\perp PF_2$,求点$P$到$x$轴的距离.

解 由题设知,$a=3,b=4$,则$c=\sqrt{a^2+b^2}=5$,即$|F_1F_2|=2c=10$. 又$PF_1\perp PF_2$,则

$$|PF_1|^2+|PF_2|^2=|F_1F_2|^2$$

即

$$|PF_1|^2+|PF_2|^2=100 \qquad ①$$

又由双曲线定义知

$$||PF_1|-|PF_2||=6 \qquad ②$$

由①-②^{2}得
$$|PF_1|\cdot|PF_2|=32$$

设点P到x轴的距离为h,则

$$S_{\triangle PF_1F_2}=\frac{1}{2}|PF_1|\cdot|PF_2|=\frac{1}{2}|F_1F_2|\cdot h$$

得$h=\frac{16}{5}$.

例 4 求经过定点$M(1,2)$,以y轴为准线,离心率为$\frac{1}{2}$的椭圆左顶点的轨迹方程.

解 设椭圆左顶点为$P(x,y)$. 因椭圆以y轴为准线,离心率为$\frac{1}{2}$,由椭圆第二定义易知左焦点为$F(\frac{3x}{2},y)$.

又可知M到准线(y轴)的距离$d=1$,再由第二定义知$\frac{|MF|}{d}=\frac{1}{2}$,即$|MF|=\frac{1}{2}$,从而

$$(\frac{3x}{2}-1)^2+(y-2)^2=\frac{1}{4}$$

整理得
$$\frac{(x-\frac{2}{3})^2}{\frac{1}{9}}+\frac{(y-2)^2}{\frac{1}{4}}=1$$

例 5 设点P到点$M(-1,0)$,$N(1,0)$距离之差为$2m$,到x轴、y轴距离之比为2,求m的取值范围.

解　设点 P 的坐标为 (x,y)，依题意得 $\frac{|y|}{|x|}=2$，即有

$$y=\pm 2x\quad(x\neq 0)\qquad ①$$

因此，点 $P(x,y)$，$M(-1,0)$，$N(1,0)$ 三点不共线，得

$$||PM|-|PN||<|MN|=2$$

又由 $||PM|-|PN||=2|m|>0$，知 $0<|m|<1$.

由双曲线定义，知点 P 在以 M，N 为焦点，实轴长为 $2|m|$ 的双曲线上，故

$$\frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{1-m^2}=1\qquad ②$$

将式①代入式②，解得 $x^2=\frac{m^2(1-m^2)}{1-5m^2}$.

注意到 $1-m^2>0$，从而 $1-5m^2>0$，解得

$$0<|m|<\frac{\sqrt{5}}{5}$$

即 m 的取值范围为 $\left(-\frac{\sqrt{5}}{5},0\right)\cup\left(0,\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$.

5.6.12　一串优美的定值结论——特殊与一般转化思想的运用

将几何图形按照某种法则或规律变成另一种几何图形的过程叫做几何变换.有些表示图形特征量的数量在一个几何变换下不变，这个数量就叫做这个变换的不变量.在各类几何问题中，研究不变量是饶有兴趣并值得关注的事情.这里运用特殊与一般转化思想探求一类不变量——一串优美的定值结论.

我们从常见的两道习题谈起：

习题 1　$\triangle ABC$ 的一边的两顶点 $B(0,6)$ 和 $C(0,-6)$，另两边的斜率的乘积是 $-\frac{4}{9}$，求顶点 A 的轨迹.

习题 2　$\triangle ABC$ 的一边的两个端点是 $B(0,6)$ 和 $C(0,-6)$，另两边斜率的积是 $\frac{4}{9}$，求顶点 A 的轨迹.

这两道习题的解法为：

设顶点 A 的坐标为 (x,y)，依题意分别有

$$\frac{y-6}{x}\cdot\frac{y+6}{x}=-\frac{4}{9}\quad(x\neq 0)$$

$$\frac{y-6}{x}\cdot\frac{y+6}{x}=\frac{4}{9}\quad(x\neq 0)$$

化简分别得

$$\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{36}=1\quad(x\neq 0),\quad \frac{y^2}{36}-\frac{x^2}{81}=1\quad(x\neq 0)$$

因 A，B，C 三点不共线，故顶点 A 的轨迹方程分别为 $\frac{x^2}{81}+\frac{y^2}{36}=1(-6<y<6)$；$\frac{y^2}{36}-\frac{x^2}{81}=1(x\neq 0)$.

注意到，$\frac{4}{9}=\frac{4\cdot 4}{9\cdot 9}=\frac{4^2}{9^2}$，$\frac{4}{9}=\frac{4\cdot 9}{9\cdot 9}=\frac{6^2}{9^2}$.

由上述两道习题有如下一般性结论：

结论 1 若$\triangle ABC$的一边的两顶点是$B(a,0)$，$C(-a,0)$，另两边的斜率之积是$-\frac{b^2}{a^2}(a>b>0)$或$\frac{b^2}{a^2}(a>0,b>0)$，则顶点A的轨迹是椭圆弧

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\quad(-a<x<a)$$

或除去顶点的双曲线

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\quad(a>0,b>0)$$

结论 2 若$\triangle ABC$的一边的两顶点是$B(0,b)$，$C(0,-b)$，另两边的斜率之积是$-\frac{b^2}{a^2}(a>b>0)$，或$\frac{b^2}{a^2}(a>0,b>0)$，则顶点A的轨迹是椭圆弧

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\quad(-b<y<b)$$

或除去顶点的双曲线

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1\quad(a>0,b>0)$$

进一步地，我们有：

结论 3 椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$或双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$上不是顶点的点与其一对顶点$(-a,0)$，$(a,0)$连线的斜率之积等于定理$-\frac{b^2}{a^2}$或$\frac{b^2}{a^2}$.

结论 4 椭圆$\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2}{a^2}=1(b>a>0)$或双曲线$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1(b>0,a>0)$上不是顶点的点与其一对顶点$(0,-b)$，$(0,b)$连线的斜率之积等于定值$-\frac{b^2}{a^2}$或$\frac{b^2}{a^2}$.

如果再注意到$0<\frac{4}{9}<1$，$-1<-\frac{4}{9}<0$，令$\frac{4}{9}$或$-\frac{4}{9}$为k，则有：

结论 5 若动点$A(x,y)$到两个定点$B(-a,0)$，$C(a,0)(a>0)$的连线的斜率之积为定值$k(k\neq0)$，则点A的轨迹方程是$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{-ka^2}=1(x\neq\pm a,k\neq0)$.

特别地，当$k<-1$时，点A的轨迹为焦点在y轴上，且BC为其短轴的椭圆(B，C两点除外)；当$k=-1$时，点A的轨迹是BC为直径的圆(B，C两点除外)；当$-1<k<0$时，点A的轨迹为焦点在x轴，且BC为其长轴的椭圆(B，C两点除外)；当$k>0$时，点A的轨迹是焦点在x轴的双曲线(B，C两点除外).

结论 6 若动点$A(x,y)$到两个定点$B(0,-b)$，$C(0,b)$的连线的斜率之积为定值$k(k\neq0)$，则点A的轨迹方程是

$$\frac{x^2}{\frac{a^2}{-k}}+\frac{y^2}{a^2}=1\quad(x\neq0,k\neq0)$$

特别地，当$k<-1$时，点A的轨迹为焦点在y轴上，且BC为其长轴的椭圆(B，C两点除外)；当$k=-1$时，点A的轨迹是BC为直径的圆(B，C两点除外)；当$-1<k<0$时，点A

的轨迹为焦点在 x 轴上，且 BC 为其短轴的椭圆（B,C 两点除外）；当 $k>0$ 时，点 A 的轨迹是焦点在 y 轴上的双曲线（B,C 两点除外）.

结论 7 若动点 $A(x,y)$ 到两定点 $B(a,c)$，$C(b,c)$ 的连线的斜率之积为定值 k $(k\neq 0)$，则有

$$\frac{\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2}{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}+\frac{(y-c)^2}{-k\cdot\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}=1 \quad (a\neq b\neq 0,k\neq 0)$$

显然，当 $k<0$ 且 $k\neq -1$ 时，点 A 的轨迹为椭圆（除去两顶点 B,C）；当 $k=-1$ 时，点 A 的轨迹为圆（除 B,C 两点）；当 $k>0$ 时，点 A 的轨迹为双曲线（除两顶点 B,C）.

于是，我们得到圆、椭圆、双曲线的一个统一定义：

定义 与两个定点连线的斜率之积为定值 $k(k\neq 0)$ 的点的轨迹，当 $k=-1$ 时为圆（除去圆上的两定点）；当 $k<0$，且 $k\neq -1$ 时为椭圆（除去椭圆上两定点）；当 $k>0$ 时为双曲线（除去两顶点）.

5.6.13 圆锥曲线焦半径公式的应用——模型思想的运用

例 1 椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的焦点为 F_1,F_2，点 P 为其上的动点，当 $\angle F_1PF_2$ 为钝角时，点 P 横坐标的取值范围是________.

解 由题设，知 $a=3,b=2,c=\sqrt{5},e=\frac{\sqrt{5}}{3}$. 设 P 点坐标为 (x_0,y_0)，则由焦半径公式，有

$$|PF_1|=a+ex_0=3+\frac{\sqrt{5}}{3}x_0,\quad |PF_2|=a-ex_0=3-\frac{\sqrt{5}}{3}x_0$$

又 $|F_1F_2|=2\sqrt{5}$，当 $\angle F_1PF_2$ 为钝角时

$$\cos\angle F_1PF_2=\frac{|PF_1|^2+|PF_2|^2-|F_1F_2|^2}{2|PF_1|\cdot|PF_2|}<0$$

从而

$$|PF_1|^2+|PF_2|^2<|F_1F_2|^2$$

即

$$\left(3+\frac{\sqrt{5}}{3}x_0\right)^2+\left(3-\frac{\sqrt{5}}{3}x_0\right)^2<20$$

故

$$-\frac{3}{\sqrt{5}}<x_0<\frac{3}{\sqrt{5}}$$

例 2 设 F_1,F_2 分别是双曲线 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$ 的左、右焦点，过 F_2 作倾斜角为 30° 的弦 AB，求 $\triangle F_1AB$ 的周长.

解 由题设，知 $F_2(2,0)$. 直线 AB 的方程为 $y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x-2)$.

将其代入 $x^2-\frac{y^2}{3}=1$，得 $8x^2+4x-13=0$，从而

$$|AB|=\sqrt{1+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}\cdot\frac{\sqrt{16+4\cdot 8\cdot 13}}{8}=3$$

注意到 $x_1+x_2=-\frac{13}{8}<0$，知 A,B 在双曲线两支上.

设 $x_1 < x_2$ 则

$$|AF_1| + |AF_2| = -(ex_1 + a) + (ex_2 + a) = e(x_2 - x_1) =$$
$$2\sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2} = 3\sqrt{3}$$

故△F_1AB 的周长为 $3 + 3\sqrt{3}$.

例 3 设点 P 为双曲线$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1(a > 0, b > 0)$上异于顶点的任意一点,其焦点为 $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$. 设$\angle PF_1F_2 = \alpha$、$\angle PF_2F_1 = \beta$,求证:$\frac{\tan\frac{\alpha}{2}}{\tan\frac{\beta}{2}} = \frac{c-a}{c+a}$.

证明 设$|PF_1| = d_1$, $|PF_2| = d_2$, $P(x_0, y_0)$,则

$$\frac{\tan\frac{\alpha}{2}}{\tan\frac{\beta}{2}} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\cdot\frac{1+\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cdot\frac{1+\cos\beta}{1+\cos\alpha} = \frac{d_2}{d_1}\cdot\frac{1+\frac{d_2^2+4c^2-d_1^2}{4cd_2}}{1+\frac{d_1^2+4c^2-d_2^2}{4cd_1}} =$$
$$\frac{4cd_2 + d_2^2 + 4c^2 - d_1^2}{4cd_1 + d_1^2 + 4c^2 - d_2^2}$$

而 $d_1 = ex_0 - a$, $d_2 = ex_0 + a$,将其代入上式,化简,即得$\frac{\tan\frac{\alpha}{2}}{\tan\frac{\beta}{2}} = \frac{c-a}{c+a}$.

注 运用双曲线焦半径公式时,应注意点 P 在双曲线的哪一支上,联结哪一个焦点.

例 4 求证:以抛物线的焦点弦为直径的圆和抛物线的准线相切.

证明 设抛物线方程为 $y^2 = 2px(p > 0)$,过焦点 F 的弦 AB 的两端点为 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$,则 AB 的中点 M 的横坐标为 $x_0 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$.

点 M 到准线 $l: x = -\frac{p}{2}$的距离为 $d = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + \frac{p}{2}$,而

$$|AB| = |AF| + |FB| = (x_1 + \frac{p}{2}) + (x_2 + \frac{p}{2}) = x_1 + x_2 + p$$

于是 $d = \frac{1}{2}|AB|$,即以 AB 为直径的圆的中心 M 到准线 l 的距离等于半径,故此圆与准线相切.

例 5 过抛物线 $y^2 = 2px(p > 0)$的焦点作倾斜角为 θ 的直线与抛物线交于 A、B 两点,求弦$|AB|$的长度.

解 显然抛物线焦点 $F(\frac{p}{2}, 0)$.

当 $\theta = \frac{\pi}{2}$,易知

$$|AB| = 2(x_0 + \frac{p}{2}) = 2(\frac{p}{2} + \frac{p}{2}) = 2p$$

当 $\theta \neq \frac{\pi}{2}$时,设直线 AB 的方程为

$$y = \tan\theta\cdot(x - \frac{p}{2})$$

将其代入 $y^2=2px$ 得

$$\tan^2\theta\cdot x^2-p(\tan^2\theta+2)x+\frac{p^2}{4}\tan^2\theta=0$$

设 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则

$$x_1+x_2=\frac{p(\tan^2\theta+2)}{\tan^2\theta}$$

又由抛物线焦半径公式，有

$$|AB|=|AF|+|FB|=x_1+x_2+p=\frac{p(\tan^2\theta+2)}{\tan^2\theta}+p=\frac{2p(1+\tan^2\theta)}{\tan^2\theta}=\frac{2p}{\sin^2\theta}$$

又当 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 时，有 $2p=\frac{2p}{\sin^2\theta}$.

故所求 $|AB|=\frac{2p}{\sin^2\theta}$.

5.6.14 过圆锥曲线上一点的切线方程问题——变换思想的运用

书本中以例题形式给出了过圆上一点的切线方程及其求法：

例1 已知圆的方程是 $x^2+y^2=r^2$，求经过圆上一点 $M(x_0,y_0)$ 的切线方程.

如果我们运用变换思想方法处理这道例题，将圆的方程变换成标准式、一般式、参数式，甚至将圆变换成椭圆、双曲线、抛物线，那么结论又如何呢？

为了讨论问题的方便，我们还是从书本中例题的求法谈起. 书本中是先设过点 $M(x_0,y_0)$ 的切线方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$，再求得 k 而得方程. 由圆的特殊几何性质，切线垂直于过切点的半径，很快就求得 $k=-\frac{x_0}{y_0}$. 为了使求解方法更具一般性，我们可以将切线看成直线与圆相交的两个交点重合时的情形，从而这样来求得 k（由于 k 存在，知 $y_0\neq0$）.

解 将方程 $y-y_0=k(x-x_0)$ 代入 $x^2+y^2=r^2$，整理得

$$(1+k^2)x^2-2k(kx_0-y_0)x+(k^2-1)x_0^2-2kx_0y_0=0$$

两交点重合时，由于 $M(x_0,y_0)$ 是切点，所以 x_0 是这个方程的二重实根，由韦达定理，有

$$2x_0=\frac{2k(kx_0-y_0)}{1+k^2},\quad x_0^2=\frac{(k^2-1)x_0^2-2kx_0y_0}{1+k^2}$$

当 $x_0\neq0$ 时，有

$$\frac{k(kx_0-y_0)}{1+k^2}=\frac{(k^2-1)x_0-2ky_0}{1+k^2}$$

求得 $k=-\frac{x_0}{y_0}$，此时 $k\neq0$. 于是当 k 存在且 $k\neq0$ 时，所求方程为

$$x_0x+y_0y=r^2 \qquad ①$$

当 $M(x_0,y_0)$ 在坐标轴上时，可以验证上面的方程同样适用.

类似于上述方程，可求得圆的参数式、一般式、标准式时的过圆上一点 $M(x_0,y_0)$ 的切线方程分别为

$$x\cos\theta+y\sin\theta=r$$

$$x_0x+y_0y+D\cdot\frac{x+x_0}{2}+E\cdot\frac{y+y_0}{2}+F=0$$

$$(x_0-a)(x-a)+(y_0-b)(y-b)=r^2$$

问题1 已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,求经过椭圆上一点$M(x_0,y_0)$的切线方程.

解 设切线的斜率为$k(k\neq0)$,则其方程为

$$y-y_0=k(x-x_0)$$

将其代入椭圆方程,整理得

$$(b^2+a^2k^2)x^2-2a^2k(kx_0-y_0)x+a^2(kx_0-y_0)^2-a^2b^2=0$$

由于$M(x_0,y_0)$是切点,所以x_0是这个方程的二重实根,由韦达定理有

$$2x_0=\frac{2a^2k(kx_0-y_0)}{b^2+a^2k^2}$$

$$x_0^2=\frac{a^2(kx_0-y_0)^2-a^2b^2}{b^2+a^2k^2}=\frac{a^2k^2x_0^2-2a^2kx_0y_0-b^2x_0^2}{b^2+a^2k^2}$$

由于$R\neq0$,知$x_0\neq0$,且k存在,知$y_0\neq0$,求得

$$a^2k(kx_0-y_0)=a^2k^2x_0-2a^2ky_0-b^2x_0$$

即

$$k=-\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$$

故所求切线方程为

$$\frac{x_0x}{a^2}+\frac{y^2y}{b^2}=1\quad(a>b>0) \tag{②}$$

问题2 已知双曲线$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$,求经过双曲线上一点$M(x_0,y_0)$的切线方程.

解 设切线的斜率为$k(k\neq0)$,则其方程为$y-y_0=k(x-x_0)$.将其代入双曲线方程,整理得

$$(b^2-a^2k^2)x^2+2a^2k(kx_0-y_0)x-a^2(kx_0-y_0)^2-a^2b^2=0$$

由于点$M(x_0,y_0)$是切点,所以x_0是这个方程的二重实根,由韦达定理有

$$2x_0=\frac{-2a^2k(kx_0-y_0)}{b^2-a^2k^2}$$

$$x_0^2=\frac{-a^2(kx_0-y_0)^2-a^2b^2}{b^2-a^2k^2}=\frac{b^2x_0^2+a^2k^2x_0^2-2a^2kx_0y_0}{b^2-a^2k^2}$$

由于$k\neq0$,知$x_0\neq0$,且k存在知$y_0\neq0$,由

$$a^2k(kx_0-y_0)=b^2x_0+a^2k^2x_0-2a^2ky_0$$

求得

$$k=\frac{b^2x_0}{a^2y_0}$$

故所求切线方程为

$$\frac{x_0x}{a^2}-\frac{y_0y}{b^2}=1\quad(a>0,b>0) \tag{③}$$

当点$M(x_0,y_0)$在坐标轴上,可以验证,上述方程同样适用.

问题3 已知抛物线$y^2=2px(p>0)$,求经过抛物线上一点$M(x_0,y_0)$的切线方程.

解　设切线的斜率为 $k(k\neq 0)$，则其方程为 $y-y_0=k(x-x_0)$.

将其代入抛物线方程 $y^2=2px$，整理得

$$k^2x^2+2(ky_0-k^2x_0-p)x+k^2x_0^2-2kx_0y+2px_0=0$$

由于点 $M(x_0,y_0)$是切点，所以 x_0 是这个方程的二重实根，由韦达定理，有

$$2x_0=\frac{2(k^2x_0-ky_0+p)}{k^2},\quad x_0^2=\frac{k^2x_0^2-2kx_0y_0+2px_0}{k^2}$$

由于 $k\neq 0$，知 $x_0\neq 0$，且 k 存在知 $y_0\neq 0$.

由 $k^2x_0-ky_0+p=k^2x_0-2ky_0+2p$，求得 $k=\dfrac{p}{y_0}$.

故所求切线方程为

$$y_0y=p(x+x_0) \tag{④}$$

当点 $M(x_0,y_0)$在抛物线顶点时，即 $y_0=0$ 且 $x_0=0$ 时，可以验证，上述方程同样适用.

注　当直线与 x 轴平行或重合时，虽与抛物线只有一个交点，但不是抛物线的切线，这时斜率 $k=0$，已排除在外.

5.6.15　轨迹方程的求法——交集思想的运用

求轨迹方程的方法常用的有待定系数法、定义法、直译法、转移法、交轨法、参量法等.

一个轨迹问题中至少都有两个条件甚至多个条件，求轨迹方程的实质就是要求解出具有性质 $p_1,p_2,\cdots,p_n(n\geqslant 2)$共性的一个数学结构.

例 1　已知椭圆的对称轴是坐标轴，离心率 $e=\dfrac{2}{3}$，准线方程 $y=\pm\dfrac{9}{2}$，求椭圆方程.

解　(待定系数法)由题设对称轴是坐标轴及准线方程 $y=\pm\dfrac{9}{2}$，可设所求椭圆方程为 $\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$(焦点在 y 轴上)，且$\dfrac{c}{a}=e=\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{a^2}{c}=\dfrac{9}{2}$.

由此求得 $a=3$，$c=2$，从而 $b^2=a^2-c^2=5$，故所求椭圆方程为$\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{x^2}{5}=1$.

注　当所求轨迹具体地指明了名称及形态，只是需确定其中的参量时，常运用待定系数法.

例 2　求到两定点 $A(5,0)$，$B(-5,0)$的距离的平方和等于 100 的点的轨迹方程.

解　(直译法)设动点 $P(x,y)$，由题设有$|PA|+|PB|^2=100$，于是

$$(x-5)^2+y^2+(x+5)^2+y^2=100$$

即 $x^2+y^2=25$ 为所求.

注　直接将所给几何条件译成代数式子，化简代数式子即得轨迹方程，这种求法称为直译法.

例 3　一动圆过定点 $A(c,0)$且与定圆$(x+c)^2+y=4a^2(c>0,a>0)$相切，求此动圆圆心的轨迹方程.

解　(定义法)依题意，定圆圆心 $B(-c,0)$，半径为 $2a$，设动圆圆心为 $P(x,y)$.

(i)当 $a>c$ 时，A 点在$\odot B$ 内，$\odot B$ 与$\odot P$ 相切，则有

$$|PB|+|PA|=|PB|+|PQ|=2a$$

(Q 为两圆切点)又 $|AB|=2c$,由椭圆定义知所求轨迹方程是椭圆

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$$

(ii)当 $a<c$ 时,A 点在$\odot B$ 外,$\odot B$ 与$\odot P$ 内切或外切,于是

$$|PB|-|PA|=\pm(|PB|-|PQ|)=\pm 2a$$

又 $|AB|=2c$,由双曲线定义,得所求轨迹方程是双曲线

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1$$

(iii)当 $a=c$ 时,定点 A 在$\odot B$ 上,$\odot P$ 与$\odot B$ 内切于 A 点或外切于 A 点,则有

$$|PB|\pm|PA|=2a=2c$$

故所求轨迹是直线 x 轴,其方程 $y=0$.

注 直接运用曲线定义求轨迹的方法称为定义法.

例 4 点 A 是圆 $O_1:(x-2)^2+y^2=9$ 上的一个动点,$AB\perp x$ 轴于点 B,以点 A 为圆心,AB 为半径的圆交$\odot O_1$ 于点 G,H,联结 GH 交 AB 于点 M,求点 M 的轨迹方程.

解法 1 (交轨法)设动点 $M(x,y)$,$A(x_0,y_0)$,则有$(x_0-2)^2+y_0^2=9$,直线 AB 的方程为

$$x=x_0 \quad ①$$

$\odot A$ 的方程为

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=y_0^2 \quad ②$$

又$\odot O_1$ 的方程为

$$(x-2)^2+y^2=9 \quad ③$$

②与③相减,得

$$(4-2x_0)x-2y_0y+x_0^2+5=0 \quad ④$$

解由①、④组成的方程组得点 M 的参数方程

$$\begin{cases}x=x_0\\ y=\dfrac{-x_0^2+4x_0+5}{2y_0}\end{cases}\quad (x_0,y_0\text{ 为参量}) \quad ⑤$$

把 $y_0^2=9-(x_0-2)^2$ 代入⑤的平方式,并注意 $x_0=x$,整理得点 M 的轨迹方程

$$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{4y^2}{9}=1$$

解法 2 (转移法)延长 BA 或 AB 分别交$\odot A$ 于 E,交$\odot O_1$ 于 F.由相交弦定理,得

$$|MA|\cdot|MF|=|GM|\cdot|MH|=|MB|\cdot|ME|\Rightarrow|MA|\cdot(|MB|+|BF|)=$$
$$|MB|\cdot(|MA|+|AE|)\Rightarrow|MB|\cdot|AE|=|MA|\cdot|BF|$$

又 $AB\perp x$ 轴,则$|AE|=|AB|=|BF|$,于是$|MB|=|MA|$,即 M 为 AB 的中点.

设 $M(x,y)$,$A(x_0,y_0)$,则 $x_0=x$ 且 $y_0=2y$.又$(x_0-2)^2+y_0^2=9$,于是$(x-2)^2+(2y)^2=9$,故得点 M 的轨迹方程为

$$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{4y^2}{9}=1$$

注 所求轨迹的动点(x,y)是两曲线系的交点时,则求得两曲线系方程并联立解得轨迹的参数方程$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\varphi(t)\end{cases}$,($t$ 为参数),消去 t 得普通方程,这种求法叫交轨法.若所求轨迹

的动点(x,y)(从动),依赖于已知曲线上动点(x_0,y_0)(主动),就用动点坐标(x,y)表示已知曲线上的辅助动点(x_0,y_0),将其表示式代入已知曲线的方程,即得所求轨迹方程的方法叫转移法.

例5　已知椭圆$\frac{x^2}{24}+\frac{y^2}{16}=1$,直线$l:\frac{x}{12}+\frac{y}{8}=1$,点$P$是$l$上一点,射线$OP$交椭圆于点$R$,又点$Q$在$OP$上且满足$|OQ|\cdot|OP|=|OR|^2$.当点$P$在$l$上移动时,求点$Q$的轨迹方程.

解　(参量法)由O,Q,R,P共线,不管P如何移动,总有$\angle POx=\angle QOx=\angle ROx$,因而取$\angle POx=\theta$作为沟通三已知等式的桥梁.

由$P(|OP|\cos\theta,|OP|\sin\theta)$,$Q(|OQ|\cos\theta,|OQ|\sin\theta)$,$R(|OR|\cos\theta,|OR|\sin\theta)$,有

$$|OR|^2(\frac{\cos^2\theta}{24}+\frac{\sin^2\theta}{16})=1,\quad |OP|(\frac{\cos\theta}{12}+\frac{\sin\theta}{8})=1$$

上两式相减并把$|OQ|\cdot|OP|=|OR|^2$代入,得

$$|OQ|\cdot|OP|=(\frac{\cos^2\theta}{24}+\frac{\sin^2\theta}{16})=|OP|(\frac{\cos\theta}{12}+\frac{\sin\theta}{8})$$

上式两边同乘以$\frac{|OQ|}{|OP|}\neq0$后,整理,得

$$\frac{2(x-1)^2}{5}+\frac{3(y-1)^2}{5}=1\quad(x\neq0)$$

5.6.16　处理圆锥曲线问题应注意的一个方面——对称思想的运用

由于圆锥曲线是轴对称图形,因此在处理圆锥曲线问题时,若能灵活运用对称思想方法,则可使我们获得的结论完善、准确.

例1　设F_1,F_2是椭圆$C:\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1$的焦点,在$C$上满足$PF_1\perp PF_2$的点$P$的个数为______.

解　注意到曲线的对称性,可设点P的坐标为(x_0,y_0).由题设知$a^2=8,b^2=4$.

故$c^2=4$,两焦点F_1,F_2的坐标分别为$(-2,0),(2,0)$.此时,PF_1,PF_2的斜率分别为$\frac{y_0}{x_0+2},\frac{y_0}{x_0-2}$.

由题设有$\frac{y_0}{x_0+2}\cdot\frac{y_0}{x_0-2}=-1$,即

$$y_0^2=4-x_0^2\qquad①$$

由于点P在椭圆C上,故

$$\frac{x_0^2}{8}+\frac{y_0^2}{4}=1\qquad②$$

将①代入②得

$$\frac{x_0^2}{8}+\frac{1}{4}(4-x_0^2)=1$$

可解得$x_0=0$.再注意到对称性,可求得$y_0=\pm2$.故点P的坐标为$(0,2)$或$(0,-2)$.从而答案应填2.

例2　设F是椭圆$\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{6}=1$的右焦点,且椭圆上至少有21个不同的点$P_i(i=1,2,$

3,…),使$|FP_1|,|FP_2|,|FP_3|,\cdots$组成公差为 d 的等差数列,则 d 的取值范围为________.

解 注意到曲线的对称性及$|FP_i|$最多只能两两相等,可知题中等差数列可能是递增的,也可能是递减的,但不可能为常数列,即 $d\neq 0$.

先考虑一般情形,由等差数列的通项公式有

$$|FP_n|=|FP_1|+(n-1)d\quad (n\in\mathbf{N}_+)$$

因此

$$n=1+\frac{|FP_n|-|FP_1|}{d}$$

对于椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$,其焦半径的最大值是 $a+c$,最小值是 $a-c$(其中 $c=\sqrt{a^2-b^2}$).

当等差数列递增时,有

$$|FP_n|\leqslant a+c,\quad |FP_1|\geqslant a-c$$

从而

$$|FP_n|-|FP_1|\leqslant a+c-(a-c)=2c$$

再由题设知 $c=1$,且 $n\geqslant 21$,故 $21\leqslant 1+\frac{2}{d}$,因此 $0<d\leqslant\frac{1}{10}$.

同理,当等差数列递减时,可解得$-\frac{1}{10}\leqslant d<0$.故答案应填$[-\frac{1}{10},0)\cup(0,\frac{1}{10}]$.

例 3 设点 P 到点$M(-1,0)$,点 $N(1,0)$的距离之差为 $2m$,到 y 轴,x 轴的距离之比为 2,求 m 的取值范围.

解 注意到题设条件的对称性,设点 P 的坐标为$(x,y)(x\neq 0)$,依题意可得$\frac{|y|}{|x|}=2$,即

$$y=\pm 2x(x\neq 0) \qquad ①$$

因此,$P(x,y),M(-1,0),N(1,0)$三点不共线.于是

$$||PM|-|PN||<|MN|=2$$

又

$$||PM|-|PN||=2|m|>0$$

故 $0<|m|<1$,且点 P 在以 M,N 为焦点,实轴长为 $2|m|$的双曲线上.故有

$$\frac{x^2}{m^2}-\frac{y^2}{1-m^2}=1 \qquad ②$$

将式①代入式②,并解得 $x^2=\frac{m^2(1-m^2)}{1-5m^2}$.由于 $1-m^2>0$,因此 $1-5m^2>0$.故可得 $0<|m|<\frac{\sqrt5}{5}$.即 m 的取值范围为$(-\frac{\sqrt5}{5},0)\cup(0,\frac{\sqrt5}{5})$.

5.6.17 设而不求——整体思想的运用

整体思想方法的重要表现之一是从问题所涉及的双方或多方事物之间的繁复关系中探求共同点(共性),进行整体代换,使问题在某个确定范围内得以简易解决.

由于解析几何是用代数方法研究几何问题,因而求解解析几何问题常伴有大量的代数运算.特别是在求解要满足几个条件的曲线方程或某些量时,避免繁杂的运算常是我们追求的目标,设而不求正是灵活运用整体代换思想方法的一种表现.

例 1 过两点 $A(-3,2)$和 $B(6,1)$的直线与直线 $x+3y-6=0$ 交于点 P,求点 P 分 AB 所成的比.

分析　此题若根据已知条件求出 AB 的方程，再联立 $x+3y-6=0$ 求出点 P 的坐标，最后求出比值 λ，这样思路虽平坦，但还是有一定的运算量，如果能进一步考察所求的最终目标，是求 λ 值，能否不求点 P 的坐标而求出 λ 值？回答是肯定的.

解　设点 P 的坐标为 (a,b)，则

$$a=\frac{-3+6\lambda}{1+\lambda},\quad b=\frac{2+\lambda}{1+\lambda}$$

因点 P 在直线 $x+3y-6=0$ 上，故

$$\frac{-3+6\lambda}{1+\lambda}+\frac{3(2+\lambda)}{1+\lambda}-6=0\Rightarrow\lambda=1$$

例 2　要使椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 上存在两个不同的点，关于直线 $y=4x+m$ 对称，求实数 m 的取值范围.

解　设椭圆上两个不同的点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 关于直线 $y=4x+m$ 对称，AB 的中点为 $M(x_0,y_0)$.

由题设有

$$\frac{x_1^2}{4}+\frac{y_1^2}{3}=1 \tag{①}$$

$$\frac{x_2^2}{4}+\frac{y_2^2}{3}=1 \tag{②}$$

$$\frac{x_1+x_2}{2}=x_0 \tag{③}$$

$$\frac{y_1+y_2}{2}=y_0 \tag{④}$$

由 A，B 两点关于直线 $y=4x+m$ 对称，有

$$y_0=4x_0+m \tag{⑤}$$

$$\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{1}{4} \tag{⑥}$$

上述六个方程显然缺一不可，但目标是确定 m 的范围，并不一定要将 6 个参数都求出，因而由①－②，得

$$\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{4}+\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{3}=0$$

注意到 $x_1\neq x_2$，有

$$\frac{x_1+x_2}{4}+\frac{y_1+y_2}{3}\cdot\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=0$$

将③、④、⑥代入，得 $y_0=3x_0$.

上式再与式⑤联立，得 AB 中点的坐标为 $M(-m,-3m)$. 又点 M 在椭圆内部，则

$$3(-m)^2+4(-3m)^2<12$$

故

$$-\frac{2\sqrt{13}}{13}<m<\frac{2\sqrt{13}}{13}$$

例 3　若点 $P(x_0,y_0)$ 为二次曲线 $Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 的弦 P_1P_2 的中点，P_1P_2 与 y 轴不平行，也不重合，求直线 P_1P_2 的方程.

解 设 $P_1(x_1、y_1)$，$P_2(x_2、y_2)$，则 $x_1+x_2=2x_0$，$y_1+y_2=2y_0$，且直线 P_1P_2 的斜率为 $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$. 由

$$Ax_1^2+Cy_1^2+Dx_1+Ey_1+F=Ax_2^2+Cy_2^2+Dx_2+Ey_2+F$$

得
$$A(x_1+x_2)\cdot(x_1-x_2)+C(y_1+y_2)\cdot(y_1-y_2)+D(x_1-x_2)+E(y_1-y_2)=0$$

即
$$2Ax_0(x_1-x_2)+2Cy_0(y_1-y_2)+D(x_1-x_2)+E(y_1-y_2)=0$$

则
$$2Ax_0+2Cy_0\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}+D+E\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=0$$

即
$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=-\frac{2Ax_0+D}{2Cy_0+E}$$

故所求直线 P_1P_2 的方程为

$$y-y_0=-\frac{2Ax_0+D}{2Cy_0+E}(x-x_0)$$

注 例 3 中的二次曲线可以是圆、椭圆、双曲线和抛物线，此例给出了求解关于二次曲线中点问题的设而不求的简捷解法.

例 4 已知△ABC 三个顶点都在椭圆 $4x^2+5y^2=80$ 上，若点 $A(0,4)$是椭圆短轴的一个顶点，且这个三角形的重心在椭圆的右焦点，求直线 BC 的方程.

解 由题设可求得右焦点为 $F(2,0)$，因点 F 是△ABC 的重心，则 F 的坐标与三顶点 A,B,C 的坐标有关系，而 $A(0,4)$，故可设 $B(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$，则

$$\begin{cases}\dfrac{x_1+x_2+0}{3}=2\\[2mm]\dfrac{y_1+y_2+4}{3}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1+x_2=6 & ①\\ y_1+y_2=-4 & ②\end{cases}$$

又因为点 B,C 在椭圆上，则有

$$4x_1^2+5y_1^2=80 \qquad ③$$
$$4x_2^2+5y_2^2=80 \qquad ④$$

由式③－式④，得

$$4(x_1^2+x_2^2)+5(y_1^2-y_2^2)=0$$

即
$$4(x_1+x_2)(x_1-x_2)+5(y_1+y_2)(y_1-y_2)=0 \qquad ⑤$$

由题意知 $x_1-x_2\neq0$，将①，②代入⑤，得 $\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\frac{6}{5}$，此即为 $k_{BC}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$.

而 BC 的中点 $M(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2})$，即 $M(3,-2)$，故所求直线方程为

$$y+2=\frac{6}{5}(x-3)$$

即
$$6x-5y-28=0$$

由上述四例可以看出，设而不求，实际上就是要善于整体代换、整体消元，才能简捷地求得满足多条件的数学结论.

5.6.18 简化计算的妙方——对称思想的运用

数学的对称之美充满了整个数学世界，从数学的研究对象、研究手段到有关概念、运算

及大量的公式、结论的形式都与对称有关.我们把运用对称的手段进行对称性思维处理数学问题的思想方法称为对称思想方法.在处理解析几何问题中,充分利用对称条件,引入对称点坐标参数,转化为对称量计量等均是对称思想方法的灵活运用,这是简化解几计算的妙方.

例 1　已知圆满足:

(Ⅰ)截 y 轴所得弦长为 2;

(Ⅱ)被 x 轴分成两段圆弧,其弧长的比为3:1;

(Ⅲ)圆心到直线 $l:x-2y=0$ 的距离为$\frac{\sqrt{5}}{5}$,求该圆的方程.

解　设圆的圆心为点 $P(a,b)$,半径为 r,圆与 x,y 轴分别交于 A,B 和 C,D,则 $\angle APB=90°$.

因 A,B 关于 $x=a$ 对称,C,D 关于 $y=b$ 对称,利用直角三角形,有

$$\begin{cases} r^2=a^2+1 & ① \\ |a-2b|=1 & ② \\ b=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}r & ③ \end{cases}$$

将式①、③代入式②,得$\sqrt{r^2-1}=\sqrt{2}r\pm1(r>0)\Rightarrow a=b=\pm1(a,b$ 同号$)$,$r=\sqrt{2}$.

故所求圆的方程为$(x+1)^2+(y+1)^2=2$ 或$(x-1)^2+(y-1)^2=2$.

例 2　已知直线 l 过原点,抛物线 C 的顶点在原点,焦点在 x 轴正半轴上,若点 $A(-1,0)$和 $B(0,8)$关于 l 的对称点都在 C 上,求直线 l 和抛物线 C 的方程.

解　设 l 的倾角为 θ,则 l 的方程为 $y=\tan\theta\cdot x$.

设 B,B' 关于 l 对称,如图 113,BB' 与 l 交于点 M,则$\angle BOM=90°-\theta$,$\angle B'Ox=-90°+2\theta$,从而 B' 的坐标为$(8\sin 2\theta,-8\cos 2\theta)$.同理点 A 关于 l 的对称点 A' 的坐标为$(-\cos 2\theta,-\sin 2\theta)$.再将 A',B' 的坐标分别代入 $y^2=2px$,得

$$\begin{cases} 8^2\cos^2 2\theta=2p\cdot 8\sin 2\theta & ④ \\ \sin^2 2\theta=2p(-\cos 2\theta) & ⑤ \end{cases}$$

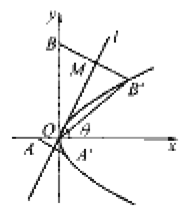


图 113

由上解得 $\tan^3 2\theta=-8$,即 $\tan 2\theta=-2$.即 $\tan\theta=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$,则 $p=\frac{2}{5}\sqrt{5}$.

故 l 的方程为 $y=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})x$,抛物线方程为 $y^2=\frac{4\sqrt{5}}{5}x$.

例 3　已知 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2(a>b>0)$,$A$,$B$ 是椭圆上两个点,线段 AB 的垂直平分线与 x 轴相交于点 $P(x_0,0)$.证明:$\frac{b^2-a^2}{a}<x_0<\frac{a^2-b^2}{a}$.

证明　因 A,B 两点为垂直平分线的一组对称点,可设 $A(x_1,y_1)$,$B(x_2,y_2)$,AB 中点为(x',y'),则

$$b^2x_1^2+a^2y_1^2=a^2b^2,\quad b^2x_2^2+a^2y_2^2=a^2b^2$$

上两式作差化简,得

$$k_{AB}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{b^2x'}{a^2y'}$$

则所求中垂线方程为

$$y-y'=\frac{a^2y'}{b^2x'}(x-x')$$

令 $y=0$,得

$$x_0=x'-\frac{b^2}{a^2}x'=\frac{a^2-b^2}{a^2}x'$$

因 $x'\in(-a,a)$,故$\frac{b^2-a^2}{a}<x_0<\frac{a^2-b^2}{a}$.

例 4 双曲线中心在坐标原点 O,焦点在 x 轴上,过双曲线右焦点且斜率为$\sqrt{\frac{3}{5}}$的直线交双曲线于 P,Q 两点.若 $OP\perp OQ$,$|PQ|=4$,求双曲线方程.

解 考虑到用直线参数方程可将条件转化成 P,Q 对应的参数 t_1,t_2 的对称式表示,故设所求双曲线方程为

$$b^2x^2-a^2y^2=a^2b^2 \qquad ⑥$$

其右焦点为 $F(c,0)$,直线 PQ 的方程为

$$\begin{cases}x=c+t\cos\theta\\ y=t\sin\theta\end{cases}\quad(t\text{ 为参数}) \qquad ⑦$$

其中 θ 为直线 PQ 的倾斜角,而 $\tan\theta=\sqrt{\frac{3}{5}}$,则 $\sin\theta=\sqrt{\frac{3}{8}}$,$\cos\theta=\sqrt{\frac{5}{8}}$.

由条件 $|PQ|=4$,得

$$|t_1-t_2|^2=|t_1+t_2|^2-4t_1t_2=16 \qquad ⑧$$

由 $OP\perp OQ$,得

$$c^2+c(t_1+t_2)\cos\theta+t_1t_2=0 \qquad ⑨$$

将式⑦代入式⑥,得

$$\begin{cases}t_1+t_2=-\dfrac{2cb^2\cos\theta}{b^2-c^2\sin^2\theta} & ⑩\\[2ex] t_1t_2=\dfrac{b^4}{b^2-c^2\sin^2\theta} & ⑪\end{cases}$$

再将式⑩,⑪代入⑨,得 $4b^2=3c^2$.将⑩、⑪代入⑧,得 $b^2=3$.从而 $c^2=4$,$a^2=1$.故所求双曲线方程为 $x^2-\frac{1}{3}y^2=1$.

5.6.19 一道抛物线问题的求解——结构思想的运用

对于同样一个数学问题,运用不同的知识与方法(即不同的结构)可以获得不同的处理方案,得到不同的求解方式.这对启发思维,开阔视野,综合灵活地运用已学知识是一项有效的措施.

在很多书本中有这样一道问题:

过抛物线 $y^2=2px$ 的焦点的一条直线和这抛物线相交,两个交点的纵坐标为 y_1、y_2.

求证:$y_1y_2=-p^2$.

证法 1 如图 114,设焦点弦两端点 $A(\frac{y_1^2}{2p},y_1)$,$B(\frac{y_2^2}{2p},y_2)$,而 $F(\frac{p}{2},0)$,由 A,F,B 三点

共直线,且直线不与 y 轴平行时,有 $k_{AF}=k_{BF}$,即

$$\frac{y_1}{\frac{y_1^2}{2p}-\frac{p}{2}}=\frac{y_2}{\frac{y_2^2}{2p}-\frac{p}{2}}$$

化简,得 $$y_1y_2(y_1-y_2)=-p^2(y_1-y_2)$$

而 $y_1\neq y_2$,故 $y_1y_2=-p^2$.

当直线平行于 y 轴时,k 不存在,则 $y_1=p,y_2=-p$,也有 $y_1y_2=-p^2$.

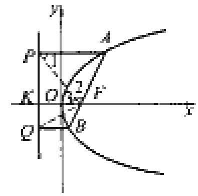


图 114

证法 2 设过焦点 $F(\frac{p}{2},0)$的不与 y 轴平行的直线方程为

$$y=k(x-\frac{p}{2})\quad(k\neq 0)$$

联立 $y=k(x-\frac{p}{2})$与 $y^2=2px$.将前式代入后式,整理,得

$$k^2x^2-(k^2p+2p)x+\frac{1}{4}k^2p^2=0$$

由韦达定理,得 $x_1x_2=\frac{p^2}{4}$,即有 $y_1^2\cdot y_2^2=2px_1\cdot 2px_2=p^4$.又 y_1 与 y_2 异号,故 $y_1y_2=-p^2$

或将后式变形为 $x=\frac{y^2}{2p}$,代入前式,整理,得

$$ky^2-2py-kp^2=0$$

由韦达定理,得 $y_1y_2=-p^2$,当直线平行于 y 轴时,k 不存在,则也有 $y_1y_2=-p^2$.

证法 3 如图,过焦点弦两端点 A,B 分别作准线的垂线 AP,BQ,P,Q 分别为垂足,联结 PF、QF.又设准线与 x 轴的交点为 K,则由抛物线定义知$|AF|=|AP|$,从而$\angle 1=\angle 2$.又$\angle 1=\angle 3$,则$\angle 2=\angle 3$,即 PF 平分$\angle AFK$.

同理 QF 平分$\angle BFK$.所以$\angle PFQ=90°$.

在 $\mathrm{Rt}\triangle PFQ$ 中,有 $|KF|^2=|PK|\cdot|KQ|$,即 $p^2=|y_1|\cdot|y_2|$.又 y_1 与 y_2 异号,故 $y_1\cdot y_2=-p^2$.

证法 4 设过焦点 $F(\frac{p}{2},0)$的直线 AB 的参数方程为

$$\begin{cases}x=\frac{p}{2}+t\cdot\cos\theta\\ y=t\cdot\sin\theta\end{cases}$$

(其中 t 为参数,θ 为直线的倾角)将 AB 的参数方程代入 $y^2=2px$,得

$$\sin^2\theta\cdot t^2-2p\cos\theta\cdot t-p^2=0$$

由韦达定理,有 $t_1\cdot t_2=-\frac{p^2}{\sin^2\theta}(\theta\neq\frac{\pi}{2})$,故 $y_1\cdot y_2=t_1\sin\theta\cdot t_2\sin\theta=-p^2$.显然,当 $\theta=\frac{\pi}{2}$时,也有 $y_1\cdot y_2=-p^2$.

上面从多角度、多方面考虑知识结构,给出了四种不同的证法.四种证法各有特色:证法 1 应用三点共线,证法 2 应用一元二次方程,证法 3 应用平面几何知识,证法 4 应用参数方程.代数有关知识、平面几何有关知识、解析几何有关知识综合应用到了一道问题上,这也启

示我们，在求解解析几何问题时，应灵活运用数学结构思想方法，考虑运用各种知识去解决.

5.6.20 圆锥曲线的光学性质及应用——结构思想的运用

一些书本中以生活、光学器具中的实际例子介绍了圆锥曲线的光学性质及应用. 在此，我们以数学语言描述圆锥曲线中的特殊结构性质，以说明其光学性质的原理.

(1)椭圆光学性质原理

椭圆上任意一点的两条焦半径的夹角被该点的法线所平分.

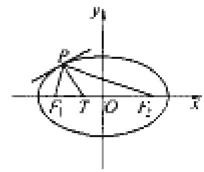


图 115

证明 设椭圆方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

又设 $P(x_0,y_0)$ 为椭圆上任一点，F_1,F_2 是左、右焦点，则

$$|PF_1|=a+ex_0,\quad |PF_2|=a-ex_0$$

而过点 P 的法线方程为

$$a^2y_0x-b^2x_0y+b^2x_0y_0-a^2x_0y_0=0$$

令 $y=0$，得 $x=\frac{c^2}{a^2}x_0$. 故法线与 x 轴的交点 T 的坐标$(\frac{c^2}{a^2}x_0,0)$，有

$$|F_1T|=c+\frac{c^2x_0}{a^2}=\frac{c(a^2+cx_0)}{a^2}$$

$$|TF_2|=c-\frac{c^2x_0}{a^2}=\frac{c(a^2-cx_0)}{a^2}$$

又
$$\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\frac{a+ex_0}{a-ex_0}=\frac{a^2+cx_0}{a^2-cx_0},\quad \frac{|F_1T|}{|TF_2|}=\frac{a^2+cx_0}{a^2-cx_0}$$

故
$$\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\frac{|F_1T|}{|TF_2|}$$

所以过点 P 的法线 PT 平分点 P 的两条焦半径的夹角.

注 此原理说明处于一焦点的光源的光线经椭圆反射汇聚于另一焦点处.

(2)双曲线光学性质原理

双曲线上任意一点的切线，平分该点两焦半径的夹角.

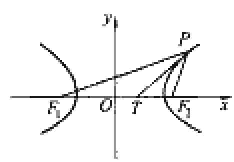


图 116

证明 设双曲线方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

又设 $P(x_0,y_0)$ 为双曲线上一点，过点 P 的切线交 x 轴于 T，F_1、F_2 分别是左、右焦点，则

$$|PF_1|=|ex_0+a|,\quad |PF_2|=|ex_0-a|$$

而过点 P 的切线方程是

$$b^2x_0x-a^2y_0y=a^2b^2$$

切线 PT 和 x 轴的交点 T 的坐标为$(\frac{a^2}{x_0},0)$，从而

$$|F_1T|=|c+\frac{a^2}{x_0}|,\quad |F_2T|=|c-\frac{a^2}{x_0}|$$

由
$$\frac{|F_1T|}{|F_2T|}=\frac{\left|c+\frac{a^2}{x_0}\right|}{\left|c-\frac{a^2}{x_0}\right|}=\frac{|cx_0+a^2|}{|cx_0-a^2|}$$
$$\frac{|PF_1|}{|PF_2|}=\frac{|ex_0+a|}{|ex_0-a|}=\frac{|cx_0+a^2|}{|cx_0-a^2|}$$
有
$$\frac{|F_1T|}{|F_2T|}=\frac{|PF_1|}{|PF_2|}$$
即切线 PT 平分两焦半径的夹角$\angle F_1PF_2$.

注　此原理说明处于一焦点的光源的光线经双曲线反射沿反射处与另一焦点连线所在直线方向射出去.

(3)抛物线光学性质原理

抛物线上任意一点的法线平分过此点的焦半径和过此点的直径(即过该点与对称轴平行的线)所夹的角.

证明　设抛物线方程为 $y^2=2px(p>0)$, F 为焦点, $P(x_0,y_0)$为抛物线上任意一点,过点 P 的切线 PR 的方程为 $y_0y=p(x+x_0)$,此切线与 x 轴的交点 T 的坐标为$(-x_0,0)$,于是
$$|FT|=x_0+\frac{p}{2},\quad |PF|=x_0+\frac{p}{2}$$
从而
$$|PF|=|FT|,\quad \angle FPT=\angle FTP$$

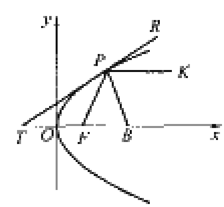


图 117

又直径 $PK/\!/x$ 轴,则
$$\angle KPR=\angle FTP=\angle FPT$$
而
$$\angle KPR+\angle KPB=\angle BPF+\angle FPT$$
即有$\angle KPB=\angle BPF$,故法线 PB 平分$\angle KPF$,命题得证.

注:此原理说明处于焦点的光源的光线经抛物线反射形成平行光束.

以上就是书本中介绍的探照灯、太阳灶、电影放映机的聚光灯镜面等器具的设计原理.下面看几个实际例子.

例 1　汽车前灯的反射面是旋转抛物面,灯口的直径为 20 cm,深度为 10 cm.灯泡安装在焦点处,问灯泡距灯口有多少厘米?

解　如图 118,反射面与轴截面的交线为抛物线,以旋转抛物面的顶点为平面直角系原点,反射面的轴线为 x 轴,建立坐标系 xOy,设抛物线方程为 $y^2=2px(p>0)$.

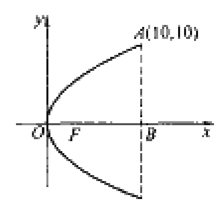


图 118

由题意,知灯口边缘上一点 A 的坐标为(10,10),代入抛物线方程,求得 $p=5$.所以抛物线的焦点 F 的坐标为$(\frac{5}{2},0)$.

于是灯泡与灯口的距离是 $10-\frac{5}{2}=7.5$ (cm).

注　焦点处的光源发出的光线,经抛物线反射后,即成平行光线(与 x 轴平行).电磁波、声波经抛物线反射,也有类似的现象,这一原理在灯具制造、电视接收器、光线聚焦器具、建筑设计等方面具有广泛的应用.

例 2　有一种电影放映机的放映灯泡是在灯泡的玻璃内壁上镀铝,并留有透明窗(通光

孔)的专用灯泡,它的反射镜面是旋转椭球面的一部分,它的中心截口 BAC 是椭圆的一部分,灯丝位于它的一个焦点 F_1 上,片门位于另一个焦点 F_2 上,从而能获得最强烈的光线如图 119,已知两焦点间的距离 $2c=4.5\ \text{cm}$,椭圆的半正焦弦(或半通径)的长 $|F_1B|=p=2.8\ \text{cm}$. 为了开模子加工制造这种灯泡,求此椭圆的方程.

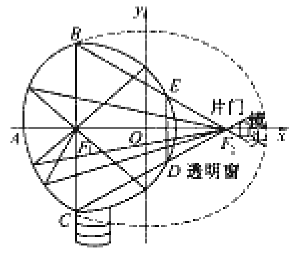


图 119

解 如图,建立平面直角坐标系,那么所求椭圆的方程可设为$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

因为$\triangle BF_1F_2$是直角三角形,有

$$|F_2B|=\sqrt{|F_1B|^2+|F_1F_2|^2}=\sqrt{p^2+4c^2}$$

又由椭圆的定义知

$$|F_1B|+|F_2B|=2a$$

所以

$$a=\frac{1}{2}(p+\sqrt{p^2+4c^2})\approx 4.05\ \text{cm}$$

$$b=\sqrt{a^2-c^2}\approx 3.37\ \text{cm}$$

故所求椭圆方程为

$$\frac{x^2}{4.05^2}+\frac{y^2}{3.37^2}=1$$

注 利用旋转椭球面的性质(即椭圆的光学性质),将片门放在另一焦点处,从而获得最强光线.

5.7 排列组合与二项式定理问题

5.7.1 两个计数原理的理解与运用——类分思想的运用

加法原理与乘法原理是处理排列组合问题的两个基本原理. 两个原理的共同点是:它们都是讨论做一件事,确定完成这件事的所有不同方法的种数. 不同点是:加法原理与分类有关,是指这些方法可以分类,一般可按元素或位置的性质分类,这时要注意类与类之间的独立性,即各种方法独立互斥,任何一类中的任意一种方法都能完成这件事;乘法原理与分步有关,是指这些方法需要分步,一般按完成这件事(有时指事件发生)的连续过程进行分步,各个步骤顺次相依,即每一个步骤任取一种方法连续做完各步,才能完成这件事. 因此,区分运用加法原理还是乘法原理的关键,在于区分完成这件事的方法是“分类”还是需要“分步”.

例 1 设集合 $M=\{k\,\|\,k|<3$ 且 $k\in\mathbf{Z}\}$, $P(x,y)$是坐标平面上的点,且 $x,y\in M$,则

(Ⅰ)P 可以表示平面上的点有多少个?

(Ⅱ)P 可以表示坐标轴上的点有多少个?

解 由题知 $M=\{-2,-1,0,1,2\}$.

(Ⅰ)确定点 P 时,第一步确定横坐标 x,共有 5 种方式;第二步确定纵坐标 y,也有 5 种方式. 显然,此问题是一个分步问题.

由乘法原理知，共有点的个数为 $5\times5=25$.

(Ⅱ)坐标轴上的点可分为横轴上的点与纵轴上除原点以外的点两类. 易知，横轴上的点共有 5 个；纵轴上的点除原点外共有 4 个.

由加法原理知，共有点的个数为 $5+4=9$.

例 2 乒乓球队的 10 名队员中有 3 名主力队员，派 5 名参加比赛. 3 名主力队员安排在第一、三、五位置，其余 7 名队员选 2 名安排在第二、四位置，那么不同的出场安排共有________种(用数字作答).

解 不同的出场安排与次序有关，是排列问题，且与分步有关. 事件分两步完成：第一步，3 名主力队员安排在第一、三、五位置有 A_3^3 种方法；

第二步，其余 7 名队员选 2 名安排在第二、四位置有 A_7^2 种方法.

由乘法原理得所求的出场安排共有 $A_3^3\cdot A_7^2=252$ 种.

例 3 圆周上有 $2n$ 个等分点($n>1$)，以其中三点为顶点的直角三角形的个数为________.

解 三角形三个顶点与次序无关，是组合问题，且与分步有关.

依题意知只有直径所对的圆周角是直角，此时才能构成直角三角形. 先定斜边，因为直径有 n 条，故斜边有 n 种取法；再定直角顶点，因每一条直径所对的直角有 C_{2n-2}^1 个，直角顶点有 C_{2n-2}^1 种取法.

根据乘法原理知所求的直角三角形共有 $nC_{2n-2}^1=2n(n-1)$ 个.

例 4 在一块并排 10 垄的田地中，选择 2 垄分别种植 A，B 两种作物，每种作物种植一垄. 为有利于作物生长，要求 A，B 两种作物的间隔不小于 6 垄，则不同的选垄方法共有________种.(用数字作答)

解 先给 10 垄田地按 1 至 10 进行编号，由题设知与分类有关.

若第 1 垄种植 A，则 B 只能种植在第 8，9，10 垄，即有 $C_3^1=3$ 种选垄方法；

若第 2 垄种植 A，则 B 只能种植在第 9，10 垄，即有 $C_2^1=2$ 种选垄方法；

若第 3 垄种植 A，则 B 只能种植在第 10 垄，即有 $C_1^1=1$ 种选垄方法.

又 A，B 可对换. 故共有 $2(3+2+1)=12$ 种选垄方法.

有些问题，既可以从分类的角度出发，也可以从分步的角度出发求解.

例 5 从 n 个元素中选出 m 个($m\leqslant n$)排成一列，其中某个指定的元素不许排在某个位置上，求排列的总数.

解法 1 把排列分成互斥的两类：一类不含某指定元素，共有 A_{n-1}^m 个；另一类必含某指定元素，共有 $A_{m-1}^1\cdot A_{n-1}^{m-1}=(m-1)A_{n-1}^{m-1}$. 故排列的总数为

$$A_{n-1}^m+(m-1)A_{n-1}^{m-1}=(n-1)A_{n-1}^{m-1}$$

解法 2 按相继的几个步骤完成所要求的排列.

首先任选一个不受约束的元素于指定元素的禁用位置上，其方法有 $n-1$ 种；然后再选出 $m-1$ 个元素分布在其余 $m-1$ 个位置，其方法有 A_{n-1}^{m-1} 个.

故有排列总数为 $(n-1)A_{n-1}^{m-1}$.

例 6 7 名同学争夺 5 项比赛的冠军，获得冠军的可能种数有(　　).

(A)7^5　　(B)5^7　　(C)A_7^5　　(D)C_7^5

解法 1 从分步的角度考虑：把 7 名同学看作"位置"，把五个比赛项目看作"元素"，第一个项目的冠军有 7 个位置可放．

同理，第二个至第五个这四个项目的冠军也都分别有 7 个位置可放．由乘法原理得获冠军的可能种数是 7^5．

故应选(A)．

解法 2 从分类的角度考虑：第一类，五项冠军被一个同学全部夺得，可能情况有 7 种；

第二类，五项冠军被 2 个同学全部夺得，又有两种情形：一名夺得一项，另一名夺得四项；或一名夺得两项，另一名夺得三项．获得冠军的可能种数有

$$(C_5^1+C_5^2)\cdot A_7^2=630$$

第三类，五项冠军由 3 名同学夺得，夺得冠军的项目分别为 2，2，1 和 1，1，3．可能的种数为

$$\left(\frac{1}{2}C_5^2\cdot C_3^2\cdot C_1^1+\frac{1}{2}C_5^1\cdot C_4^1\cdot C_3^3\right)\cdot A_7^3=5\ 250$$

第四类，由四名同学夺得五项冠军，可能种数有 $C_5^2\cdot A_7^4=8\ 400$ 种；

第五类，五名同学各夺得一项冠军，可能种类有 $A_7^5=2\ 520$ 种；

由加法原理得所有获得冠军的可能种数是

$$7+630+5\ 250+8\ 400+2\ 520=16\ 807=7^5$$

5.7.2 从集合的角度看排列组合——集合思想的运用

集合论是现代数学大厦的基石，几乎所有的数学分支都可以说是研究某类对象的集合．因此，我们可以从集合的角度来看排列与组合．

(1)从集合的基数来看排列种数与组合种数

从 3 个不同元素 a,b,c 中取出 2 个元素的所有排列是 ab,ba,ac,ca,bc,cb．

从集合的角度看，上述排列组成一个集合，其中每一个排列是它的一个元素．元素 ab 与 ba 虽然所取字母相同，但由于字母排的顺序不同，它们是这个集合的不同元素．于是从 3 个不同元素中取出 2 个元素的排列数，实际上就是求上述集合（记为 A）的元素个数 $\text{card}(A)$．这里，$\text{card}(A)=6$．

在有限集中，集合元素的个数就是集合的基数．

同样，从 3 个不同元素 a,b,c 中取出 2 个元素的所有组合是 ab,bc,ca．

从集合的角度看，上述组合也组成一个集合，其中每一个组合是它的一个元素．于是，从 3 个不同元素中取出 2 个元素的组合数，实际上就是求上述集合（记为 B）的元素个数 $\text{card}(B)$．这里，$\text{card}(B)=3$．

一般地，从 n 个不同元素中取 $m(m\leqslant n)$个元素的排列数或组合数，也可类似地从集合的角度进行解释．

在求解某些排列、组合问题时，运用集合思想方法来考察，问题中的限制条件间关系可以转化为用集合的知识(包括韦恩图)表示出来的集合间的运算关系．由于集合表示的直观性，便于将一些较复杂的问题分析清楚．

例 1 从 5 名运动员中选出 4 人参加接力赛，如果甲不跑第一棒，乙不跑第四棒，共有多少种不同的参赛方法？

解　设全集 $I=\{5$ 人中任取 4 人参赛的排列$\}$，$A=\{$甲跑第一棒的排列$\}$，$B=\{$乙跑第四棒的排列$\}$，则

$$A\cap B=\{\text{甲跑第一棒且乙跑第四棒的排列}\}$$

$$C_IA\cap C_IB=\{\text{甲不跑第一棒且乙不跑第四棒的排列}\}$$

而
$$\mathrm{card}(I)=A_5^4,\mathrm{card}(A)=A_4^3,\mathrm{card}(B)=A_4^3,\mathrm{card}(A\cap B)=A_3^2$$

故 $\mathrm{card}(C_IA\cap C_IB)=\mathrm{card}(I)-\mathrm{card}(A)-\mathrm{card}(B)+\mathrm{card}(A\cap B)=120-24-24+6=78$ 种为所求.

注　与此例同类型的问题还有如下问题：

用 1,2,3,4,5 这五个数字，可以组成比 20 000 大，并且百位数字不是数字 3 的没有重复数字的五位数共 78 个.

例 2　用数字 1,2,3,4 组成四位数，使得千位上不含 1，百位上不含 2，十位上不含 3，个位上不含 4. 这样的四位数有多少个?

解　设 I 表示由 1,2,3,4 的所有全排列组成的集合，作 I 的子集 $S_i=\{$数 i 排在第 i 个位置上的全排列$\}$($i=1,2,3,4$. 位置是从左向右按 1,2,3,4 顺序编号). 于是

$$\mathrm{card}(I)=4!,\mathrm{card}(S_i)=3!\ (i=1,2,3,4)$$
$$\mathrm{card}(S_i\cap S_j)=2!\ (1\leqslant i\leqslant j\leqslant 4)$$
$$\mathrm{card}(S_i\cap S_j\cap S_r)=1!\ (1\leqslant i<j<k\leqslant 4)$$
$$\mathrm{card}(S_1\cap S_2\cap S_3\cap S_4)=1$$

满足题设条件的四位数的个数为

$$\begin{aligned}\mathrm{card}(C_IS_1\cap C_IS_2\cap C_IS_3\cap C_IS_4)=&\mathrm{card}(I)-C_4^1\mathrm{card}(S_i)+C_4^2\mathrm{card}(S_i\cap S_j)-\\&C_4^3\mathrm{card}(S_i\cap S_j\cap S_k)+C_4^4\mathrm{card}(S_1\cap S_2\cap S_3\cap S_4)=\\&4!-C_4^1 3!+C_4^2 2!+C_4^3 1!+C_4^4 0!=9\end{aligned}$$

为所求.

注　此例虽可用穷举法直接求得结果为 9，但上述解法具有一般性.

(2)从集合间的对应关系来看排列数与组合数

从集合的角度看，所求得的排列数或组合数，实际上可看成全集 I 的某个子集到数集的映射(一一对应关系).

例 3　9 名同学站成一排照相，其中甲不能站在中间，乙和丙都不能站在左右两端，问共有多少种不同的站法?

分析　这是一个有限制条件的相异元素的全排列问题，用直接方法求解往往会因考虑不周全而出错；用间接方法来求(将 9 名同学不加限制的站法总数减去不合条件的站法数)也容易造成重复和遗漏. 现有映射方法求解.

解　设左、中、右等 9 个位置的集合为 X，甲，乙，丙等 9 名同学组成的集合为 Y. 显然，每一种符合条件的站法对应着从 X 到 Y 的一个一一映射 f. 反之，满足条件：f(中)$\neq$甲，f(左)$\neq$乙(或丙)，f(右)$\neq$丙(或乙)的 X 到 Y 的一一映射对应着一种站法.

按照 X 的元素“中”在映射下的象，将符合条件的一一映射分成三类：

①f(中)=乙的一一映射；

②f(中)=丙的一一映射；

③f(丙) = 除甲、乙、丙外的 6 名同学之一的一一映射.

容易求出：

①类的一一映射有 $A_7^1 \cdot A_5^1 \cdot A_6^6$ 个；

②类的一一映射有 $A_7^1 \cdot A_5^1 \cdot A_6^6$ 个；

③类的一一映射有 $A_6^1 \cdot A_6^1 \cdot A_5^1 \cdot A_6^6$ 个.

故符合题意的站法共有

$$2A_7^1 \cdot A_5^1 \cdot A_6^6 + A_6^1 \cdot A_6^1 \cdot A_5^1 \cdot A_6^6 = 190\ 080\ (\text{种})$$

5.7.3 二项式定理的应用举例——模型思想的运用

二项式定理

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^r a^{n-r} b^r + \cdots + C_n^n b^n\ (n \in \mathbf{N}^*)$$

是一个重要的模型，它的应用是较广泛的，下面从 5 个方面举例以说明之.

(1)进行近似计算

例 1 求 1.997^5 精确到 0.001 的近似值.

解 $1.997^5 = (2-0.003)^5 = 2^5 - 5 \times 2^4 \times 0.003 + 10 \times 2^3 \times 0.003^2 - 10 \times 2^2 \times 0.003^3 + \cdots$

用 T_k 表示展开式中第 k 项的值，显然

$$|T_6| < |T_5| < |T_4| = 0.000\ 001\ 08$$

$$|T_4 + T_5 + T_6| < 0.000\ 004$$

故
$$1.997^5 \approx 32 - 0.24 + 0.000\ 72 \approx 31.761$$

(2)求有关问题的余数

例 2 求 19^{19} 除以 5 的余数.

解 $19^{19} = (20-1)^{19} = -(1-20)^{19} = -(1 - C_{19}^1 \cdot 20 + C_{19}^2 \cdot 20^2 - \cdots + C_{19}^{19} \cdot 20^{19}) =$

$$-5 + C_{19}^1 \cdot 20 - C_{19}^2 \cdot 20^2 + \cdots - C_{19}^{19} \cdot 20^{19} + 4$$

故 19^{19} 除以 5 的余数为 4.

注 用二项式定理讨论一个式被 k 除的余数时，一般把其被除式写成 $(a+bk)^n$ $(a, b \in \mathbf{Z})$ 的形式，即其展开式除首项外各项均能被 k 整除.

(3)求解某些函数式的系数问题

例 3 在函数式 $f(x) = (\sqrt{3} - x)^{100}$ 的展开式中，求：

(Ⅰ)各项系数的和；

(Ⅱ)各项系数的绝对值之和；

(Ⅲ)所有偶数项的系数之和.

解 令 $f(x) = (\sqrt{3} - x)^{100} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{100} x^{100}$.

(Ⅰ)以 $x = 1$ 代入得

$$f(1) = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{100} = (\sqrt{3} - 1)^{100}$$

(Ⅱ)以 $x = -1$ 代入得

$$f(-1) = (\sqrt{3} + 1)^{100} = |a_0| + |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_{100}|$$

(Ⅲ)令奇数项系数之和为 M，偶数项系数之和为 N，由(Ⅰ)，(Ⅱ)得

$$\begin{cases}M+N=(\sqrt{3}-1)^{100}\\M-N=(\sqrt{3}+1)^{100}\end{cases}$$

解得
$$N=\frac{1}{2}[(\sqrt{3}-1)^{100}-(\sqrt{3}+1)^{100}]$$

(4)证明组合恒等式.

例 4 求证下列组合恒等式:

(Ⅰ)$C_n^0-C_n^1+C_n^2-C_n^3+\cdots+(-1)^nC_n^n=0$.

(Ⅱ)$C_{n+m}^k=C_n^0C_m^k+C_n^1C_m^{k-1}+\cdots+C_n^{k-1}C_m^1+C_n^kC_m^0$.

证明 (Ⅰ)在$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\cdots+C_n^nb^n$中,取 $a=1,b=-1$,则有
$$C_n^0-C_n^1+C_n^2-C_n^3+\cdots+(-1)^nC_n^n=0$$

(Ⅱ)将$(1+x)^{n+m}=(1+x)^n\cdot(1+x)^m$展开可得
$$\sum_{k=0}^{n+m}C_{n+m}^kx^k=\left(\sum_{i=0}^{n}C_n^ix^i\right)\cdot\left(\sum_{j=0}^{m}C_m^jx^j\right)$$

将上式右边乘开,比较上式两边 x^k 项的系数,得
$$C_{n+m}^k=C_n^0C_m^k+C_n^1C_m^{k-1}+\cdots+C_n^{k-1}C_m^1+C_n^kC_m^0$$

注 对于式(Ⅱ),若当 $m=n$ 时,则可得到:
$$C_{2n}^k=C_n^0C_n^k+C_n^1C_n^{k-1}+\cdots+C_n^{k-1}C_n^1+C_n^kC_n^0$$

当 $k=n$ 时,利用 $C_n^r=C_n^{n-r}$,又可得到
$$C_{2n}^n=(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+\cdots+(C_n^n)^2$$

(5)证明不等式

例 5 设 $n\in\mathbf{N}^*$,求证 $2\leqslant(1+\frac{1}{n})^n\leqslant3-\frac{1}{2^{n-1}}$.

证明 由$(1+\frac{1}{n})^n=1+C_n^1\cdot\frac{1}{n}+C_n^2\cdot\frac{1}{n^2}+\cdots+C_n^n\cdot\frac{1}{n^n}=1+1+C_n^2\cdot\frac{1}{n^2}+\cdots\geqslant2$

及
$$(1+\frac{1}{n})^n=2+C_n^2\cdot\frac{1}{n^2}+C_n^3\cdot\frac{1}{n^3}+\cdots+C_n^n\cdot\frac{1}{n^n}=2+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+$$
$$\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})+\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})\leqslant$$
$$2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\leqslant2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=$$
$$2+\frac{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2^{n-1}})}{1-\frac{1}{2}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}$$

故
$$2\leqslant(1+\frac{1}{n})^n\leqslant3-\frac{1}{2^{n-1}}$$

例 6 已知 i,m,n 是正整数,且 $1<i\leqslant m<n$.

(Ⅰ)证明:$n^iA_m^i<m^iA_n^i$;

(Ⅱ)证明:$(1+m)^n>(1+n)^m$.

证明 (Ⅰ)对于 $1<i\leqslant m$,有
$$A_m^i=m\cdot(m-1)\cdot\cdots\cdot(m-i+1)$$

$$\frac{A_m^i}{m^i}=\frac{m}{m}\cdot\frac{m-1}{m}\cdot\cdots\cdot\frac{m-i+1}{m}$$

同理
$$\frac{A_n^i}{n^i}=\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{n-i+1}{m}$$

由于 $m<n$，对整数 $k=1,2,\cdots,i-1$，有 $\frac{k}{n}<\frac{k}{m}$，从而有 $\frac{n-k}{n}>\frac{m-k}{m}$，所以 $\frac{A_n^i}{n^i}>\frac{A_m^i}{m^i}$，即 $n^iA_m^i<m^iA_n^i$.

（Ⅱ）由二项式定理，有

$$(1+m)^n=\sum_{i=0}^{n}m^iC_n^i,\quad (1+n)^m=\sum_{i=0}^{m}n^iC_m^i$$

由（Ⅰ）知 $m^iA_n^i>n^iA_m^i(1<i\leqslant m<n)$，而 $C_m^i=\frac{A_m^i}{i!}$，$C_n^i=\frac{A_n^i}{i!}$，所以

$$m^iC_n^i>n^iC_m^i\quad(1<i\leqslant m<n)$$

因此
$$\sum_{i=2}^{n}m^iC_n^i>\sum_{i=2}^{m}n^iC_m^i$$

又
$$m^0C_n^0=n^0C_m^0=1,\quad mC_n^1=nC_m^1=mn$$

从而
$$\sum_{i=0}^{n}m^iC_n^i>\sum_{i=0}^{m}n^iC_m^i$$

即
$$(1+m)^n>(1+n)^m$$

5.8 概率问题

5.8.1 对事件及概率的辨析理解——类比思想的运用

概率论是一门研究现实世界中广泛存在的随机现象的规律性的数学分支. 课本中“概率”的主要内容包括随机事件及其概率、等可能事件的概率、互斥事件有一个发生的概率、相互独立事件同时发生的概率、独立重复试验等. 其中，随机事件及其概率是最基础、最重要的概念. 学习这一部分内容，可采用类比思想方法，理解、区分这一系列事件及其概率的概念，掌握不同类型事件概率的定义及计算方法，这样才有可能运用好这些方法来解决一些实际问题.

（1）不同类型的事件

必然事件——在一定的条件下必然要发生的事件.

不可能事件——在一定的条件下不可能发生的事件.

随机事件——在一定的条件下可能发生也可能不发生的事件.

等可能事件——在一定的条件下，各种结果出现的可能性都相等的事件.

互斥事件——在一定的条件下，不可能同时发生的两个事件叫做互斥事件. 一般地，如果事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中的任何两个都是互斥事件，则说事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 彼此互斥.

对立事件——两个事件中必有一个发生的互斥事件.

相互独立事件——在一定的条件下，事件 A（或 B）是否发生对事件 B（或 A）发生的概率没有影响，这样的两个事件叫做相互独立事件.

以上的一系列事件都是相应于"一定条件"而言的.因此,要弄清某一事件,就必须明确何为事件发生的条件,何为在此条件下产生的结果.

条件每实现一次,叫做进行一次试验.如果试验结果事先无法确定,并且可以重复进行,这种试验叫做随机试验.

一个随机事件的发生,既有随机性(对单次试验而言),又存在着统计规律性(对大量重复试验而言).必然事件和不可能事件是对立事件,但又可看作随机事件的两个极端情况,因而在这种情况下又可以统一起来,这是两者的对立统一辩证关系.

"互斥事件"和"对立事件"虽都是就两个事件而言的,却是不同的两个概念.互斥事件强调不可能同时发生的两个事件,不能排除它们同时都不发生的可能性;而对立事件是其中必有一个发生的互斥事件.因此,对立事件必须是互斥事件,但互斥事件不一定是对立事件.或者说,"互斥"是"对立"的必要但不充分的条件.

"互斥事件"和"等可能事件"是迥然不同的两个概念.在一次实验中,由于某种对称性条件,使得若干个随机事件中每一事件发生的可能性是完全相同的,则称这些事件为等可能事件.在数目上,它可为2个或多个.而互斥事件仅指不可能同时发生的两个事件.

若 A、B 两事件相互独立,且 A、B 的对立事件是 $\bar{A}$、$\bar{B}$,则 A 与 $\bar{B}$,$\bar{A}$ 与 B,$\bar{A}$ 与 $\bar{B}$ 也都是相互独立的.这就是相互独立事件的外延."相互独立事件"与"互斥事件"也是两个不同的概念,二者不能混淆.两事件相互独立强调一个事件的发生与否对另一个事件发生的概率没有影响,两事件互斥强调两个事件不可能同时发生.它们虽然都描绘了两个事件间的关系,但所描绘的关系是根本不同的.互斥的两个事件可以是相互独立的;相互独立的两个事件也可以是互斥的.

我们还须注意的是,设 A、B 是两个事件,那么 $A+B$ 表示这样一个事件:在同一试验中,A 或 B 中至少有一个发生就表示它发生;$A\cdot B$ 表示这样的一个事件:它的发生表示 A 与 B 同时发生,因此,$A+B$ 与 $A\cdot B$ 有着本质的区别.

(2)各类事件的概率

随机事件在一次试验中是否发生虽然不能事先确定,但是在大量重复试验的情况下,它的发生呈现出一定的规律性,即事件 A 发生的次数 m 与试验总次数 n 的比值(频率 $\frac{m}{n}$)总在某个常数附近摆动,且随着试验次数的不断增多,这种摆动幅度越来越小,呈现出一定的稳定性.于是,我们给这个常数取一个名字,叫做这个随机事件的概率,记作 $P(A)$.因此,概率可看作频率在理论上的期望值,它从数量上反映了随机事件发生的可能性的大小.而频率在大量重复试验的前提下可近似地作为这个事件的概率.

显然,就概率的统计定义而言,必然事件 U 的概率为1,即 $P(U)=1$;不可能事件 V 的概率为0,即 $P(V)=0$;而任意事件 A 的概率满足 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

在一次试验中,若等可能出现的结果数为 n,m 为某个事件 A 所包含的结果数,则在这次试验中等可能事件 A 的概率为 $P(A)=\frac{m}{n}$.这既是等可能事件概率的定义,也是计算这种概率的基本方法.

彼此互斥事件有一个发生的概率,即当事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$,彼此互斥时,$A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中有一个发生(即表示为 $A_1+A_2+\cdots+A_n$),它的概率等于这 n 个事件分别发生的概率的和,即

$$P(A_1+A_2+\cdots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

特别地，对于对立事件 A 和 $\bar{A}$，有

$$P(A)+P(\bar{A})=P(A+\bar{A})=1$$

相互独立事件同时发生的概率，即当事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 相互独立时，$A_1,A_2,\cdots,A_n$，这 n 个事件同时发生(即表示为 $A_1\cdot A_2\cdot\cdots\cdot A_n$)，它的概率等于这 n 个事件分别发生的概率的积，即

$$P(A_1\cdot A_2\cdot\cdots\cdot A_n)=P(A_1)\cdot P(A_2)\cdots P(A_n)$$

两个独立事件中至少有一个不发生的概率. 在 A、B 是两个相互独立事件的条件下，$P(A)\cdot P(B)=P(A\cdot B)$，而 $A\cdot B$ 与 $\overline{A\cdot B}$ 是一对对立事件，$\overline{A\cdot B}$ 表示事件 A，B 同时发生的反面，即独立事件中至少有一个不发生. 又

$$P(A\cdot B)+P(\overline{A\cdot B})=1$$

所以

$$P(\overline{A\cdot B})=1-P(A\cdot B)$$

此即为两个独立事件至少有一个不发生的概率.

n 次独立重复试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率. 在 n 次独立重复试验的总结果中，有些试验结果是 A，有些试验结果是 $\bar{A}$，所以总结果是几个 A 与几个 $\bar{A}$ 的一种搭配. 总结果中事件 A 恰好发生 k 次，就是 k 个 A 同 $n-k$ 个 $\bar{A}$ 的一种搭配. 而合乎这个要求的搭配，又因 A 与 $\bar{A}$ 出现的先后次序不同而可能有许多种. 在这 n 次试验的总结果中，含 k 个 A 以及 $n-k$ 个 $\bar{A}$ 的搭配种数，相当于从 n 个号码中任取 k 个号码的不同取法的种数，即共有 C_n^k 种. 而所有这些搭配显然都是等可能的，并且都是互斥的. 于是，根据相互独立事件概率的乘法公式，合乎上述要求的每一种搭配发生的概率都是 $P(A)^k\cdot[1-P(A)]^{n-k}$.

若一次试验中事件 A 发生的概率记为 $P(A)=P$，则 n 次独立重复试验中事件 A 恰好发生 k 次的概率为

$$P_n(k)=C_n^kP^k(1-P)^{n-k}$$

显然，上式是如下二项式展开式中的一项

$$1=[P+(1-P)]^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cdot P^k\cdot(1-P)^{n-k}=\sum_{k=0}^{n}P_n(k)$$

因此，我们把 $P_n(k)=C_n^kP^k\cdot(1-P)^{n-k}$ 叫做二项分布公式.

5.8.2 从集合角度看事件与概率——集合思想的运用

集合论可看作是现代数学的统一者和简化者. 因此，我们也可以运用集合思想方法处理事件与概率的概念及有关计算问题.

(1)从集合角度看事件间的关系

事件间的关系与集合间的关系一样主要有以下四种：

(i)事件的包含. 设在同一个试验中有两个事件 A 与 B，若事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，记为 $A\subseteq B$. 例如抛掷一个均匀的正方体玩具(它的每一面上分别刻有点数 1,2,3,4,5,6)的试验中，事件 A = "出现 2 点"的发生必导致事件 B = "出现偶数点"的发生.

(ii)事件的相等. 设在同一个试验中，有两个事件 A 与 B，若事件 A 发生必导致事件 B 发生(即 $A\subseteq B$)，同时又有事件 B 发生必导致事件 A 发生(即 $B\subseteq A$)，则称事件 A 与 B 相

等，记为 $A=B$. 例如抛掷两个均匀的正方体玩具（每个的每一面上分别刻有点数 1，2，3，4，5，6）的试验中，记 x 和 y 分别为第一个和第二个正方体出现的点数，定义如下两个事件：$A=$"$x+y$ 为奇数"，$B=$"x 与 y 为奇偶性不同"，这就是两个相等的事件.

(iii)互斥事件. 在同一个试验中，两个事件 A 与 B 不可能同时发生，则称这两个事件互斥. 从集合的角度看，A，B 这两个事件所含结果组成的集合彼此互不相交. 即有 $A\cap B=\varnothing$. 例如，一个盒子里有 5 支红笔，3 支黄笔，2 支蓝笔，现从中任意摸出一支. 事件 A 表示"从中摸出红笔"；事件 B 表示"从中摸出黄笔"；事件 C 表示"从中摸出蓝笔"，则事件 A，B，C 中的任何两个都是互斥事件.

(iv)对立事件. 设 A 为一个试验中的事件，则"A 不发生"称为 A 的对立事件，记为 $\bar{A}$. 因此，从集合的角度看，由事件 $\bar{A}$ 所含的结果组成的集合，是全集中由事件 A 所含结果组成的集合的补集. 即 $A\cup\bar{A}=I$，$A\cap\bar{A}=\varnothing$. 对立事件是相互的，A 的对立事件是 $\bar{A}$，$\bar{A}$ 的对立事件必是 A，即 $\bar{\bar{A}}=A$. 特别地，必然事件 U 与不可能事件 V 互为对立事件，即 $\bar{U}=V$，$\bar{V}=U$.

(2)从集合角度看事件的运算

事件的基本运算有三种：并、交、差，它们与集合的并、交、差是完全一样的.

(i)事件 A 与 B 的并：指"事件 A 与 B 中至少有一个发生"，记为 $A\cup B$. 例如，在抛掷均匀的正方体玩具的试验中，事件 $A=$"出现奇数点"$=\{1,3,5\}$ 与事件 $B=$"出现点数 $\leqslant 3$"$=\{1,2,3\}$ 的并为 $A\cup B=\{1,2,3,5\}$，事件 A 与 B 中重复元素只须记入一次. 事件的并可以推广："n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生"被称为此 n 个事件的并，记为 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$.

对于彼此互斥的 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，其中只有一个事件发生时，则记为 $A_1+A_2+\cdots+A_n$.

(ii)事件 A 与 B 的交：指"事件 A 与 B 同时发生"，记为 $A\cap B$. 例如，在抛掷均匀的正方体玩具的试验中，事件 $A=$"出现奇数点"$=\{1,3,5\}$ 与事件 $B=$"出现点数 $\leqslant 3$"$=\{1,2,3\}$ 的交为 $A\cap B=\{1,3\}$. 可见事件 A 与 B 的交事件 $A\cap B$ 是由 A 与 B 共有的结果组成的事件. 事件的交也可以推广："n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生"被称为此 n 个事件的交，记为 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 或 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$.

显然，若事件 A 与 B 互斥，则 $A\cap B=\varnothing$，反之亦然.

对于相互独立的 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，它们都同时发生时，则记为 $A_1\cdot A_2\cdot\cdots\cdot A_n$.

(iii)事件 A 对 B 的差：指"事件 A 发生而 B 不发生"，记为 $A-B$. 例如，在抛掷均匀的正方体玩具的试验中，事件 $A=$"出现奇数点"$=\{1,3,5\}$ 对事件 $B=$"出现点数 $\leqslant 3$"$=\{1,2,3\}$ 的差事件是 $A-B=\{5\}$，而 B 对 A 的差事件是 $B-A=\{2\}$. 这是两个不同的差事件，差事件 $A-B$ 是由属于 A 但不属于 B 的结果组成的事件.

例 1　设 A，B，C 是某个试验中的三个事件，则：

(i)事件"A 与 B 发生，C 不发生"可表示为 $A\cap B\cap\bar{C}$；

(ii)事件"A，B，C 中至少有两个发生"可表示为 $(A\cap B)\cup(A\cap C)\cup(B\cap C)$；

(iii)事件"A，B，C 中恰发生两个"可表示为 $(A\cap B\cap\bar{C})\cup(A\cap\bar{B}\cap C)\cup(\bar{A}\cap B\cap C)$.

(3)从集合角度看概率

(i)等可能事件的概率与集合思想中的对应(映射)思想.

在一次试验中，等可能出现的 n 个结果组成一个集合 I，这 n 个结果就是集合 I 的 n 个元素．各基本事件均对应于集合 I 的含有 1 个元素的子集，包含 m 个结果的事件 A 对应于 I 的含有 m 个元素的子集 A．因此，从集合的角度看，事件 A 的概率是子集 A 的元素个数（记作 $\text{card}(A)$）与集合 I 的元素个数的比值，即

$$P(A)=\frac{\text{card}(A)}{\text{card}(I)}=\frac{m}{n}$$

这样，事件 A 的概率可视为在一个全集下的某子集到数的集合的映射．

例 2　从 0，1，…，9 这十个数字中，求每次任选 5 个，组成没有重复数字的 5 位数是奇数的概率．

解　从 0，1，…，9 这十个数字中，每次任选 5 个组成 $9\cdot A_9^4=27\ 216$ 个没有重复数字的 5 位数，这些数字出现的可能性是相等的．设组成的 5 位数为奇数的事件为 A，则 A 的结果数为 $A_5^1\cdot A_8^1\cdot A_8^3=13\ 440$（个）．

故 $P(A)=\dfrac{13\ 440}{27\ 216}=\dfrac{40}{81}$为所求．

（ii）互斥事件有一个发生的概率与集合思想中的并集思想．

如果事件 A，B 互斥，那么事件 $A+B$ 发生（即 A，B 中有一个发生）的概率，等于事件 A，B 分别发生的概率的和．即

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

例 3　某射手在一次射击中射中 10 环，9 环的概率分别是 0.24，0.28．求他射中 10 环和 9 环的概率．

解　射中 10 环与射中 9 环是互斥的，设射中 10 环、9 环的事件分别记为 A，B，则射中 10 环或 9 环的事件为 $A+B$．故 $P(A+B)=P(A)+P(B)=0.52$ 为所求．

（iii）相互独立事件同时发生的概率与集合思想中的交集思想．

如果事件 A，B 相互独立，那么这两个事件同时发生（即事件 $A\cdot B$ 发生）的概率，等于每个事件发生的概率的积．即

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B)$$

例如，甲、乙两人各进行一次射击，击中目标的概率均为 0.7，则两人都射中目标的概率为 $0.7^2=0.49$．

（iv）对立事件的概率与集合思想中的补集思想．

由于事件 A 与事件 $\bar{A}$ 互为对立事件，有 $A\cap\bar{A}=\varnothing$，$A\cup\bar{A}=I$，而 $P(A\cup\bar{A})=P(A)+P(\bar{A})$及 $P(A\cup\bar{A})=P(I)=1$，故 $P(\bar{A})=1-P(A)$或 $P(A)=1-P(\bar{A})$．

5.9　向量问题

5.9.1　向量的概念及加减运算——模型思想的运用

在平面内，既有大小又有方向的量叫做平面向量，这是一个重要的数学模型．在这个模型中，有一系列特殊的概念，诸如向量的起点、方向、长度（或模）、零向量、单位向量、相等向量、平行向量或共线向量等，这些引进的新概念对于初学者来说，容易与学过的数的性质及平面几何知识产生混淆，因此，同学们在学习时应引起注意．向量的运算是一种新的运算，向

量的加减运算有其独特的模式，这与过去学过的数、式运算相比，有联系又有区别，这也是同学们在学习时应引起注意的！

例1 判断下列各命题是否正确，并说明为什么.

(Ⅰ)单位向量都相等；

(Ⅱ)若$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$是共线向量，则 A,B,C,D 四点共线；

(Ⅲ)在四边形 $ABCD$ 中，若$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，则四边形 $ABCD$ 是平行四边形；

(Ⅳ)长度相等的两个向量相等或互为相反的向量.

解 (Ⅰ)不正确.单位向量只是模均为单位长度1，而对方向没有特殊要求；

(Ⅱ)不正确.因为任何一组平行向量均可移到同一条直线上，即平行向量就是共线向量，这与平面几何中所研究的直线或线段平行、共线有区别.平面几何中平行与共线是指两种不同的位置关系，即平行与共线是不同的概念.而向量中的平行与共线是相同概念.故这里所说的$\overrightarrow{AB}$与$\overrightarrow{CD}$共线，不能保证 A,B,C,D 四个点在一条直线上.

(Ⅲ)正确.因为$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，所以有$\overrightarrow{AB}/\!/\overrightarrow{DC}$且$|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{DC}|$.有一组对边平行且相等的四边形是平行四边形.

(Ⅳ)不正确.长度相等的两个向量，是说这两个向量的模相等，对其方向没有指明，因而其方向未必相同或相反.

例2 对于任意实数 a,b,c 及实常数λ,μ 有：

加法交换律：$a+b=b+a$；

加法结合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$；

乘法结合律：$\lambda(\mu a)=(\lambda\mu)a$；

乘法分配律：$\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b,(\lambda+\mu)a=\lambda a+\mu a$.

那么，对于任意平面向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 及实常数λ,μ，也有上述运算律吗？

解 也有上述运算律，即有：

加法交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

加法结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$；

乘法结合律：$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

乘法分配律：$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b},(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$.

由于向量加法的法则与减法的法则有其特定的模式，因此，同学们在学习中要牢牢掌握这些模式，并用自己的语言简记它.例如，向量加法的三角形法则可简记为“首尾相接，首尾连”；向量加法的平行四边形法则可简记为“起点共点，尾点构平四”；向量减法的三角形法则可简记为“首同尾连向被减”.

例3 如图120，已知正方形 $ABCD$ 的边长为1，记$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c}$，求作向量：

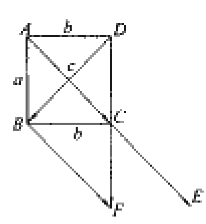


图120

(Ⅰ)$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$；

(Ⅱ)$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$；

(Ⅲ)$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}$.

解 (Ⅰ)由已知，有

$$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{c},\quad \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$$

故
$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}=0$$

(Ⅱ)如图 120,延长 AC 到 E,使 $|\overrightarrow{CE}|=|\overrightarrow{AC}|$,则

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\overrightarrow{AE}$$

且 $|\overrightarrow{AE}|=2\sqrt{2}$.

(Ⅲ)作 $|\overrightarrow{BF}|=|\overrightarrow{AC}|$,则 $|\overrightarrow{DB}|+|\overrightarrow{BF}|=|\overrightarrow{DF}|$,即 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=|\overrightarrow{DF}|$,且 $|\overrightarrow{DF}|=2$.

灵活运用向量加减法的运算律,也是值得同学们在学习中引起注意的.

5.9.2 平面向量的基本定理及应用——符号化与变元表示思想的运用

平面向量基本定理 如果 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 是同一平面内的两个不共线向量,那么对于这一平面内的任一向量 $\boldsymbol{a}$,有且只有一对实数 λ_1,λ_2 使

$$\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$$

不共线的向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 叫做表示这一平面内所有向量的一组基底.

值得注意的是,若 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 共线,则 $\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$ 一定与 $\boldsymbol{e}_1$ 和 $\boldsymbol{e}_2$ 共线,所以定理中"不共线"这一条件是不能少的.

这个定理的证明可从以下两个方面考虑:

(i)由实数与向量的积的意义,给定 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 时,可作出 $\lambda_1\boldsymbol{e}_1,\lambda_2\boldsymbol{e}_2$,由向量加法的定义,可作出 $\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$,故任给两个不共线向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$,则可表示出向量 $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2(\lambda_1,\lambda_2\in\mathbf{R})$.

(ii)在平面内任取一点 O,作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{e}_1,\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{e}_2,\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}$,过 C 点作与直线 OB 平行的直线交 OA 于 M,过 C 点作与直线 OA 平行的直线交 OB 于 N,则由 OA,OM 共线知,有且只有一个实数 λ_1,使得 $\overrightarrow{OM}=\lambda_1\overrightarrow{OA}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1$,由 ON,OB 共线知有且只有一个实数 λ_2,使 $\overrightarrow{ON}=\lambda_2\overrightarrow{OB}=\lambda_2\boldsymbol{e}_2$.这就是说,与不共线向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 在同一平面内的任一向量 $\boldsymbol{a}$ 都可表示成 $\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$ 形式.

由符号与变元表示的这个平面向量基本定理可知:平面内任一向量 $\boldsymbol{a}$ 都可分解为 $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$(其中 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 是该平面内两个不共线向量)且分解式是唯一的.因而,又有如下两条推论:

推论 1 $\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 是不共线向量,若 $\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2=k_1\boldsymbol{e}_1+k_2\boldsymbol{e}_2(\lambda_1,\lambda_2,k_1,k_2\in\mathbf{R})$,则 $\lambda_1=k_1,\lambda_2=k_2$.

事实上,由 $\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2=k_1\boldsymbol{e}_1+k_2\boldsymbol{e}_2$,得 $(\lambda_1-k_1)\boldsymbol{e}_1=(k_2-\lambda_2)\boldsymbol{e}_2$.若 $\lambda_1\neq k_1$,则 $\boldsymbol{e}_1=\dfrac{k_2-\lambda_2}{\lambda_1-k_1}\boldsymbol{e}_2$,即有 $\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 共线,与已知条件矛盾.从而必有 $\lambda_1=k_1$,也就必有 $\lambda_2=k_2$.

推论 2 $\boldsymbol{e}_1$ 与 $\boldsymbol{e}_2$ 是不共线向量,若 $\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2=0$,则 $\lambda_1=\lambda_2=0$.

下面举例说明平面向量基本定理的应用.

对于 $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$,可以写成 $\boldsymbol{a}-\lambda_1\boldsymbol{e}_1-\lambda_2\boldsymbol{e}_2=0$.在下面讨论的例题中常用到这种形式.

例 1 设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 是互不共线的向量,求证:顺次将它们的始点与终点相连能构成三角形的充要条件是 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\mathbf{0}$.

证明 必要性.设表示向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 的有向线段可以构成△ABC,如图 121,即有 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{c}$,那么

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{AA}=\mathbf{0}$$

即
$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\mathbf{0}$$

充分性.设向量 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\mathbf{0}$,作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$,那么$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$,所以$\overrightarrow{AC}+\boldsymbol{c}=\mathbf{0}$,从而 $\boldsymbol{c}$ 是$\overrightarrow{AC}$的相反向量,因此 $\boldsymbol{c}=\overrightarrow{CA}$,所以 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 可构成一个三角形.

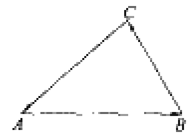


图 121

例 2　试证:以三角形三边上的中线为边可以作成一个三角形.

分析　如图 122, AD, BE, CF 分别为$\triangle ABC$ 三边上的中线,证 AD、BE、CF 能作成一个三角形,只须证$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\mathbf{0}$.

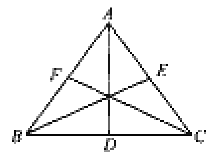


图 122

证明　设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$,$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$,则由例 1 知,有

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\mathbf{0}$$

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{c}+\frac{1}{2}\boldsymbol{a}$$

$$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CE}=\boldsymbol{a}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$$

$$\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AF}=\boldsymbol{b}+\frac{1}{2}\boldsymbol{c}$$

从而
$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})+\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\mathbf{0}$$

故以 AD, BE, CF 为边可构成一个三角形.

例 3　证明:平行四边形的对角线互相平分.

证明　如图 123, $ABCD$ 为平行四边形,对角线 AC, BD 相交于点 M,设$\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$,则

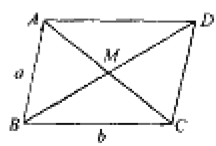


图 123

$$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$$
$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$$

因$\overrightarrow{BM}$、$\overrightarrow{BD}$共线,则存在实数 λ,使得$\overrightarrow{BM}=\lambda\overrightarrow{BD}$.

同理,存在实数 μ,使得$\overrightarrow{MC}=\mu\overrightarrow{AC}$.又

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MC}=\lambda\overrightarrow{BD}+\mu\overrightarrow{AC}=\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\mu(-\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=(\lambda-\mu)\boldsymbol{a}+(\lambda+\mu)\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}$$

由 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不共线,知$\begin{cases}\lambda-\mu=0\\ \lambda+\mu=1\end{cases}$,从而求得 $\lambda=\frac{1}{2}$, $\mu=\frac{1}{2}$.

故知点 M 为 AC, BD 的中点,即 AC, BD 互相平分.

例 4　如图 124,在$\triangle ABC$ 中, $AM:AB=1:3$, $AN:AC=1:3$, BN 与 CM 相交于点 E,记$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$,试用 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 表示$\overrightarrow{AE}$.

解　由$\overrightarrow{NB}=\overrightarrow{NA}+\overrightarrow{AB}=-\frac{1}{3}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$,又$\overrightarrow{NB}$与$\overrightarrow{NE}$共线有正实数 λ,使得$\overrightarrow{NE}=\lambda\overrightarrow{NB}=\lambda\left(-\frac{1}{3}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\right)$.则

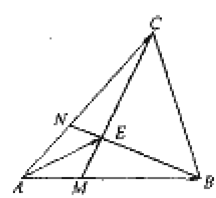


图 124

$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NE}=\frac{1}{3}\boldsymbol{b}+\lambda\left(-\frac{1}{3}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\right)=\lambda\boldsymbol{a}+\frac{1-\lambda}{3}\boldsymbol{b}$$

又
$$\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AC}=-\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$$

及$\overrightarrow{ME}$与$\overrightarrow{MC}$共线有正实数 μ,使得

$$\overrightarrow{ME}=\mu\overrightarrow{MC}=\mu\left(-\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\right)$$

则
$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{ME}=\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\mu\left(-\frac{1}{3}\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}\right)=\frac{1-\mu}{3}\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$$

由平面向量基本定理,有

$$\lambda\boldsymbol{a}+\frac{1-\lambda}{3}\boldsymbol{b}=\frac{1-\mu}{3}\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b}$$

由 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线,知$\begin{cases}\lambda=\dfrac{1-\mu}{3}\\ \dfrac{1-\lambda}{3}=\mu\end{cases}$,解得 $\lambda=\mu=\frac{1}{4}$.故$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{4}\boldsymbol{a}+\frac{1}{4}\boldsymbol{b}$ 为所求.

利用平面向量的基本定理,若$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}$不共线,$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}(t\in\mathbf{R})$,则有

$$\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB} \qquad ①$$

如果记$\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{p}$,$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$,并称点 P,A,B 所对应的位置向量分别为$\boldsymbol{p},\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,且记 $1-t=\lambda_1$,$t=\lambda_2$,则式①变成

$$\boldsymbol{p}=\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}$$

其中
$$\lambda_1+\lambda_2=1 \qquad ②$$

观察图 125 及式②,即从数形结合的思想来看待这道例题,我们可得如下结论:

结论 1 设点 A,B,P 对应的位置向量分别为$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{p}$,则 A,B,P 三点共线的充要条件为

$$\boldsymbol{p}=\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}\quad 且\quad \lambda_1+\lambda_2=1 \qquad ③$$

证明 必要性.(课本中已证,略)

充分性.若 $\boldsymbol{p}=\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}$,其中 $\lambda_1+\lambda_2=1$,则当$\overrightarrow{OP}=\boldsymbol{p}$,$\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$ 时,有$\overrightarrow{OP}=\lambda_1\overrightarrow{OA}+(1-\lambda_1)\overrightarrow{OB}$,从而$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OB}=\lambda_1(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})$,即$\overrightarrow{BP}=\lambda_1\overrightarrow{BA}$.故 A,B,P 三点共线,或向量$\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OP}$的终点在同一直线上.

注意到式③也可以写成 $\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}+(-1)\boldsymbol{p}=\mathbf{0}$,显然 $\lambda_1+\lambda_2+(-1)=0$,于是有:

结论 2 设点 A,B,P 对应的位置向量分别为$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{p}$,则 A,B,P 三点共线的充要条件为

$$\lambda_1\boldsymbol{a}+\lambda_2\boldsymbol{b}+\lambda_2\boldsymbol{p}=0\quad 且\quad \lambda_1+\lambda_2+\lambda_2=0 \qquad ④$$

对于①中的条件$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$,可以看成 A,B 是直线 l 上的两点,点 P 是 l 上不同于 A,B 的任意一点,存在实数 λ,使得 $\lambda=\dfrac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}}$,即 λ 叫做点 P 分有向线段$\overline{AB}$所成的比.则有:

结论 3 设 P 为有向线段$\overline{AB}$的一个分点$\lambda=\dfrac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}}$,点 A,B,P 对应的位置向量分别为$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$,$\boldsymbol{p}$,则

$$\boldsymbol{p}=\frac{\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}}{1+\lambda} \qquad ⑤$$

证明 由图 125,当 P 在线段 AB 的延长线上时(即 P 为外分点),$\lambda<0$.从而

$$\lambda=\frac{\overrightarrow{AP}}{\overrightarrow{PB}}=-\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PB}|}=-\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{AP}|-|\overrightarrow{AB}|}=\frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{AP}|-\frac{1}{t}|\overrightarrow{AP}|}=\frac{t}{1-t}$$

由式①，有

$$p=(1-t)a+tb=\frac{(1-t)a+b}{(1-t)+t}=\frac{a+\frac{t}{1-t}b}{1+\frac{t}{1-t}}$$

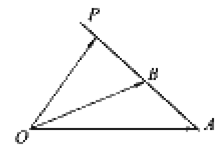


图 125

即

$$p=\frac{a+\lambda b}{1+\lambda}$$

同理，当 P 为线段 AB 的内分点时，或当 P 为线段 AB 的反向延长线上的点时，上述公式⑤也成立.

如上公式⑤，就是线段的定比分点（课本 P113）公式的向量形式. 特别地当 $\lambda=1$ 时，即当 P 为线段 AB 的中点时，有

$$p=\frac{a+b}{2} \qquad ⑥$$

下面给出如上几个结论的简单应用.

例 5　如图 126，已知 $\triangle ABC$. 求证：$\triangle ABC$ 的三条中线 AD，BE，CF 相交于一点 G，且满足 $\frac{AG}{AD}=\frac{BG}{BE}=\frac{CG}{CF}=\frac{2}{3}$.

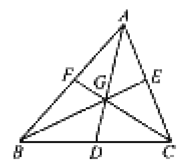


图 126

证明　设 A，B，C 点所对应的位置向量分别为 a，b，c. 又设 G_1 为 AD 上一点且 $\frac{\overrightarrow{AG_1}}{\overrightarrow{G_1D}}=2$，$G_1$，$D$ 点所对应的位置向量为 g_1，d，则

$$g_1=\frac{a+2d}{1+2}=\frac{1}{3}a+\frac{2}{3}d$$

因 D 为 BC 中点，则 $d=\frac{b+c}{2}$. 故

$$g_1=\frac{1}{3}a+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}(b+c)=\frac{1}{3}(a+b+c)$$

同样，若设 $\frac{\overrightarrow{BG_2}}{\overrightarrow{G_2E}}=2$，$\frac{\overrightarrow{CG_3}}{\overrightarrow{G_3F}}=2$，则可证得

$$g_2=\frac{1}{3}(a+b+c),\quad g_3=\frac{1}{3}(a+b+c)$$

于是 $g_1=g_2=g_3$，即知 G_1，G_2，G_3 三点重合. 又设交点为 G，则有

$$\frac{AG}{AD}=\frac{BG}{BE}=\frac{CG}{CF}=\frac{2}{3}$$

例 6　如图 127，一条直线交 $\triangle ABC$ 的边 BC 的延长线于 D，交边 AC 于 E，交边 AB 于 F. 设 $\frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FB}}=\lambda_1$，$\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DC}}=\lambda_2$，$\frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{EA}}=\lambda_3$，求证：$\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-1$.

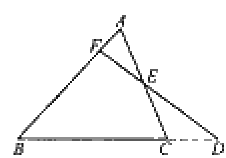


图 127

证明　取 D 为位置向量的起点，设点 A，B，C，E，F 所对应的位置向量分别为 a，b，c，d，e，f，则

$$e=\frac{c+\lambda_3 a}{1+\lambda_3},\quad b=-\lambda_2 c,\quad f=\frac{a+\lambda_1 b}{1+\lambda_1}=\frac{a-\lambda_1\lambda_2 c}{1+\lambda_1}$$

由于 D，E，F 三点共线，则存在实数 μ，使得 $f=\mu e$，即

$$f-\mu e=\frac{(1+\lambda_3)-\mu(1+\lambda_1)\lambda_3}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_3)}a+\frac{-\lambda_1\lambda_2(1+\lambda_3)-\mu(1+\lambda_1)}{(1+\lambda_1)(1+\lambda_3)}c=0$$

故有
$$\begin{cases}1+\lambda_3=\mu(1+\lambda_1)\lambda_3\\ -\lambda_1\lambda_2(1+\lambda_3)=-\mu(1+\lambda_1)\end{cases}$$

消去 μ，即得 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-1$.

注 此例中，D,E,F 三点共线的充要条件为 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=-1$，则称为梅勒劳斯定理.

例 7 如图 128，G 为 $\triangle ABC$ 内一点，AG,BG,CG 的延长线分别交对边于 D,E,F. 设 $\frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FB}}=\lambda_1$，$\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DC}}=\lambda_2$，$\frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{EA}}=\lambda_3$，求证 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=1$.

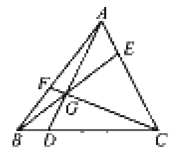


图 128

证明 取 D 为位置向量的起点，设点 A,B,C,E,F,G 所对应的位置向量分别为 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{e},\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}$，则

$$\boldsymbol{b}=-\lambda_2\boldsymbol{c},\quad \boldsymbol{e}=\frac{\boldsymbol{c}+\lambda_3\boldsymbol{a}}{1+\lambda_3},\quad \boldsymbol{f}=\frac{\boldsymbol{a}+\lambda_1\boldsymbol{b}}{1+\lambda_1}=\frac{\boldsymbol{a}-\lambda_1\lambda_2\boldsymbol{c}}{1+\lambda_1}$$

又 D,G,A 三点共线，存在实数 μ，使 $\boldsymbol{g}=\mu\boldsymbol{a}$.

对于 F,G,C 共线，有

$$\frac{\boldsymbol{a}-\lambda_1\lambda_3\boldsymbol{c}}{1+\lambda_1}=t_1\mu\boldsymbol{a}+t_2\boldsymbol{c}\quad(t_1+t_2=1)$$

因 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}$ 不共线，得

$$\frac{1}{1+\lambda_1}-t_1\mu=0,\quad 1-t_1+\frac{\lambda_1\lambda_2}{1+\lambda_1}=0$$

消去 t_1，得
$$\boldsymbol{g}=\frac{\boldsymbol{a}}{1+\lambda_1+\lambda_1\lambda_2}$$

同样，由 B,G,E 三点共线，得

$$\frac{\boldsymbol{c}+\lambda_3\boldsymbol{a}}{1+\lambda_3}=k_1\frac{\boldsymbol{a}}{1+\lambda_1+\lambda_1\lambda_2}+k_2(-\lambda_2)\boldsymbol{c}\quad(k_1+k_2=1)$$

又因 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}$ 不共线得

$$\frac{1}{1+\lambda_3}+\lambda_2(1-k_1)=0$$

且
$$\frac{k_1}{1+\lambda_1+\lambda_1\lambda_2}-\frac{\lambda_3}{1+\lambda_3}=0$$

消去 k_1，得
$$(\lambda_1\lambda_2\lambda_3-1)(\lambda_2+1)=0$$

因 $\lambda_2>0$，故 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=1$.

注 此例中，AD,BE,CF 共点的充要条件为 $\lambda_1\lambda_2\lambda_3=1$，称为塞瓦定理.

5.9.3 平面向量的数量积及应用——类比与转化思想的运用

对于平面向量数量积运算及运算律的学习，应注意运用类比思想方法来学习，在与实数的相乘运算和运算律的类比中，在与向量加、减运算和运算的类比中，认清异同，深刻理解.

(1)与实数的相乘运算和运算律的类比

(i)两个实数相乘，乘得的结果是一个实数；用字母表示两数相乘时，相乘的符号可以不写.

(ii)两个实数相乘的积为0时,则这两个实数中至少有一个为0.

(iii)对于实数 a,b,c:若满足 $ab=ac$,且 $a\neq0$,则有 $b=c$;若满足 $a\cdot b=c$ 且 $b\neq0$,则有 $a=\frac{c}{b}$.

(iv)对于实数 a,b 有乘法公式

$$(a\pm b)^2=a^2\pm2ab+b^2,\quad (a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

(v)对于实数 a,b,c 有运算律:

交换律 $a\cdot b=b\cdot a$;

结合律 $(ab)c=a(bc)$;

分配律 $(a+b)\cdot c=ac+bc$.

在平面向量的数量积运算中:

(i)两个向量的数量积是一个数量(即实数),用字母表示两向量的数量积时,运算符号“·”一定要写.

(ii)两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的数量积为0,即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$,可以推出如下四种可能:① $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0},\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$;② $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0},\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$;③ $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$;④ $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$,但 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

(iii)对于向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$:①满足 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$ 且 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$,不能推出 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$,而只能推出 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{c}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 上的投影相等;②当 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$ 且 $\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 时,不能推出 $\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{c}}{\boldsymbol{b}}$,因为根本不存在 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}$ 这样的式子.

(iv)对于向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$,有数量积乘法公式

$$(\boldsymbol{a}\pm\boldsymbol{b})^2=\boldsymbol{a}^2\pm2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^2-\boldsymbol{b}^2$$

(v)对于向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$,有如下运算律:

交换律:$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$;

数乘结合律:$(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$;

分配律:$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$.

无数量积结合律,即 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$ 不成立.这是因为前者与 $\boldsymbol{c}$ 共线,后者与 $\boldsymbol{a}$ 共线,而 $\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}$ 不一定共线.

例1 已知 $|\boldsymbol{a}|=2,|\boldsymbol{b}|=5$,$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 $90°$,求 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$.

解 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=2\times5\times\cos90°=0$.

注 此例说明 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 时,有 $\boldsymbol{a}\neq0$ 且 $\boldsymbol{b}\neq0$ 的情况.

例2 已知非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角为 θ,且向量 $\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b}$ 与 $7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b}$ 垂直,$7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b}$ 垂直,求 θ.

解 由 $(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\perp(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})$ 且 $(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\perp(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})$,有

$$(\boldsymbol{a}+3\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-5\boldsymbol{b})=0,(\boldsymbol{a}-4\boldsymbol{b})\cdot(7\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b})=0$$

即

$$7\boldsymbol{a}^2+16\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}-15\boldsymbol{b}^2=0 \quad ①$$

$$7\boldsymbol{a}^2-30\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+8\boldsymbol{b}^2=0 \quad ②$$

由式① - 式②得 $\boldsymbol{b}^2=2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$,即

$$a\cdot b=\frac{1}{2}b^2 \tag{③}$$

将式③代入式①得 $a^2=b^2$，即 $|a|=|b|$，则

$$\cos\theta=\frac{a\cdot b}{|a|\cdot|b|}=\frac{\frac{1}{2}b^2}{|b|^2}=\frac{1}{2}$$

故 $\theta=60°$ 为所求.

注 在式③中，由 $2a\cdot b=b^2$ 不能推出 $2a=b$.

(2)与向量的加、减运算和运算律的类比

(i)两个向量的和(或差)仍是一个向量.

(ii)当向量 a 与 b 不共线时，$a+b$ 的方向与 a、b 都不同，且 $|a+b|<|a|+|b|$.

特别地，当 $a\perp b$ 时，有

$$|a+b|^2=|a|^2+|b|^2$$

(iii)当向量 a 与 b 共线时，有：

①若 a 与 b 同向，则 $a+b$，a，b 都同向，且

$$|a+b|=|a|+|b|$$

②若 a 与 b 反向，当 $|a|>|b|$ 时，则 $a+b$ 与 a 同向，且 $|a+b|=|a|-|b|$；当 $|a|<|b|$ 时，则 $a+b$ 与 b 同向，且 $|a+b|=|b|-|a|$；当 $|a|=|b|$ 时，$a+b=0$.

(iv)两向量的和运算的几何意义是，以同一点 A 为起点的两个已知向量 a，b 为邻边作 $\square ABCD$，则以 A 为起点的对角线向量 AC 就是 a 与 b 的和；

两向量的差运算的几何意义是，以同一点 A 为起点的两个已知向量 $\overrightarrow{AB}=a$，$\overrightarrow{AC}=b$ 为邻边作 $\triangle ABC$，则以 C 为起点的边向量 $\overrightarrow{CB}$ 就是差向量 $a-b$，以 B 为起点的边向量 $\overrightarrow{BC}$ 就是差向量 $b-a$（即终点指向被减向量）.

(v)对于向量 a，b，c 及实数 λ，μ，则有：

加法交换律：$a+b=b+a$；

加法结合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$；

与数相乘的结合律：$\lambda(\mu a)=(\lambda\mu)a$；

与数相乘的分配律：$(\lambda+\mu)a=\lambda a+\mu a$；$\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b$.

在平面向量的数量积运算中：

(i)两向量的数量积是个数量，而不是向量，它的值为两向量的模与两向量夹角的余弦的乘积，其符号由两向量的夹角决定.两向量的数量积是两向量之间的一种乘法，是中学代数中的一种新的乘法，与数的乘法是有区别的.

(ii)当向量 a 与 b 不共线时，设 a 与 b 的夹角为 θ，则 $a\cdot b=|a|\cdot|b|\cos\theta$，亦即有 $|a\cdot b|\leqslant|a|\cdot|b|$.

规定：零向量与任一向量的数量积为 0，特别地，当 $a\perp b$ 时，有 $a\cdot b=0$.

(iii)当向量 a 与 b 共线时，有：

①若 a 与 b 同向，则 $a\cdot b=|a|\cdot|b|$；

②若 a 与 b 反向，则 $a\cdot b=-|a|\cdot|b|$.

特别地，$a\cdot a=|a|^2$ 或 $|a|=\sqrt{a^2}$.

(iv) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 的几何意义：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 等于 $\boldsymbol{a}$ 的长度 $|\boldsymbol{a}|$ 与 $\boldsymbol{b}$ 在 $\boldsymbol{a}$ 的方向上的投影 $|\boldsymbol{b}|\cos\theta$ 的乘积.

(v)对于向量的数量积的运算律前面已介绍.

例 3　在平面上有△ABC 和点 O，且 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$，问 O 是△ABC 的什么特殊点？

解　由 $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$，有 $\overrightarrow{OC}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=0$，则 $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，即 $\overrightarrow{OC}\perp\overrightarrow{AB}$.

同理 $\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{BC}$. 因此，$O$ 是△ABC 的垂心.

例 4　在△ABC 中，$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{c}$，$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{b}$，求证：△$ABC$ 为正三角形的充要条件是：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$.

证法 1　充分性. 因

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos(\pi-C),\quad \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=|\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|\cos(\pi-A),\quad \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{c}|\cdot|\boldsymbol{a}|\cos(\pi-B)$$

又由
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$$
则
$$|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos C=|\boldsymbol{c}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos A=|\boldsymbol{c}|\cdot|\boldsymbol{a}|\cos B$$
即
$$|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\frac{|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2-|\boldsymbol{c}|^2}{2|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=|\boldsymbol{c}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cdot\frac{|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2-|\boldsymbol{a}|^2}{2|\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|}=|\boldsymbol{c}|\cdot|\boldsymbol{a}|\cdot\frac{|\boldsymbol{c}|^2+|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2}{2|\boldsymbol{c}|\cdot|\boldsymbol{a}|}$$

故 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|$，即△$ABC$ 为正三角形.

必要性. 设△ABC 为正三角形，边长为 a，则

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a^2\cos120^\circ,\quad \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=a^2\cos120^\circ,\quad \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}=a^2\cos120^\circ$$
故
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$$

证法 2　充分性：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}\Rightarrow\boldsymbol{a}=-(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$，又由 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a}$，有 $|\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{c}|^2$，即 $|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{c}|$.

同理 $|\boldsymbol{a}|=|\boldsymbol{c}|$，即△$ABC$ 为正三角形.

必要性：
$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{0}\Rightarrow\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{c}$$
则
$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}$$
即
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=-\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}$$
同理
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}$$

而△ABC 为正三角形，有 $-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}$. 故

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$$
即
$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$$

同理 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$ 即证.

(3)转化为坐标表示形式

平面向量的数量积的运算与性质可以等价转化成它的坐标表示形式，这为我们讨论问题带来了方便.

设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，θ 是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，则有：

(i) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\theta=x_1x_2+y_1y_2$；

(ii) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}\Leftrightarrow0\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$；

(iii) $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 且 $\boldsymbol{b}\neq0\Leftrightarrow\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}\Leftrightarrow x_1y_2-x_2y_1=0$；

(iv)当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}$$

当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|=-\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}$$

特别地，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2=x_1^2+y_1^2$，$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$.

(v)
$$\cos\theta=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$$

(vi)$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\Leftrightarrow|x_1x_2+y_1y_2|\leqslant\sqrt{x_1^2+y_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2}$

(vii)若 $\boldsymbol{a}=\overrightarrow{AB}$，而 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，则

$$|\boldsymbol{a}|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

注 向量 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$中间有等号，而表示一个点的坐标 $A(x_1,y_1)$时，中间没有等号.

例 5 设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，给出公式 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=x_1x_2+y_1y_2$ 的另证.

证明 由于 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$，$\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，又设 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 与 x 轴正半轴所成的角分别为 α、β，则由向量数量积的定义，有

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos(\alpha-\beta)=|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|(\cos\alpha\cdot\cos\beta+\sin\alpha\cdot\sin\beta)=$$
$$|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|\left(\frac{x_1}{\boldsymbol{a}}\cdot\frac{x_2}{\boldsymbol{b}}+\frac{y_1}{\boldsymbol{a}}\cdot\frac{y_2}{\boldsymbol{b}}\right)=x_1x_2+y_1y_2$$

5.9.4 空间向量在立体几何中的应用——数形结合思想的运用

空间向量跟平面向量一样，其加法和减法运算由三角形法则给出，也有坐标表示及运算.

向量是数形结合的重要工具，利用向量方法解立体几何问题简捷、规范、方法新颖，给人清新之感.

(1)空间向量加、减、数量积运算的应用

例 1 如图 129，求证：空间四边形对角线互相垂直的充要条件是对边平方和相等.

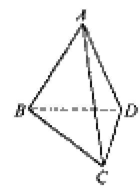


图 129

证明 $|AB|^2+|CD|^2=|BC|^2+|AD|^2\Leftrightarrow|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{CD}|^2=|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{AD}|^2\Leftrightarrow$
$|\overrightarrow{AB}|^2+(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC})^2=(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})^2+|\overrightarrow{AD}|^2\Leftrightarrow$
$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow$
$\overrightarrow{AC}\cdot(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})=0\Leftrightarrow\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0\Leftrightarrow$
$\overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}\Leftrightarrow AC\perp BD$

例 2 如图 130，正四棱柱 AC_1 中，$A_1A=2AB=2AD$，A_1C_1 与 B_1D_1 交于 E，点 P，Q 分别在 AB_1，BC_1 上，且 $B_1P:PA=BQ:QC_1=4:5$，求证：$PQ\perp AE$.

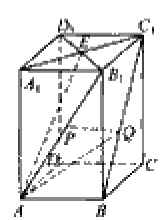


图 130

证明 $B_1P:PA=BQ:QC_1=4:5$，则得

$$\overrightarrow{AP}=\frac{5}{9}\overrightarrow{AB_1},\quad\overrightarrow{BQ}=\frac{4}{9}\overrightarrow{BC_1}$$

则 $$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BQ})-\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\frac{4}{9}\overrightarrow{BC_1}-\frac{5}{9}\overrightarrow{AB_1}=$$
$$\frac{4}{9}\overrightarrow{AB}+\frac{4}{9}\overrightarrow{BC}-\frac{1}{9}\overrightarrow{CC_1}$$

且 $$\overrightarrow{AE}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CC_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}$$

又向量$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{BC}$,$\overrightarrow{CC_1}$两两互相垂直,即
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CC_1}=\overrightarrow{CC_1}\cdot\overrightarrow{AB}=0$$

则 $$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AE}=\frac{2}{9}\overrightarrow{AB}^2+\frac{2}{9}\overrightarrow{BC}^2-\frac{1}{9}\overrightarrow{CC_1}^2$$

因 $$CC_1=2AB=2BC$$

则 $$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AE}=\frac{4}{9}|\overrightarrow{AB}|^2-\frac{1}{9}(2|\overrightarrow{AB}|^2)=0$$

从而$\overrightarrow{PQ}\perp\overrightarrow{AE}$,即 $PQ\perp AE$.

例 3 如图 131,斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,$\angle BAC=\frac{\pi}{2}$,$\angle BAA_1=\frac{2\pi}{3}$,$\angle CAA_1=\frac{\pi}{3}$,$AB=AC=1$,$AA_1=2$,点 O 是 B_1C 与 BC_1 交点.

(Ⅰ)求 AO 与 BC 所成的角;

(Ⅱ)平面 ABC 与 B_1BCC_1 是否垂直?为什么?

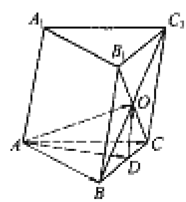


图 131

分析 已知条件集中在点 A 处,故选择$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AC}$,$\overrightarrow{AA_1}$为一组基底.

解 (Ⅰ)设$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{b}$,$\overrightarrow{AA_1}=\boldsymbol{c}$,$D$ 为 BC 的中点,则
$$\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})+\overrightarrow{DO}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$$
$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$$

所以
$$\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}-\boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a})=$$
$$\frac{1}{2}|\boldsymbol{c}|\cdot|\boldsymbol{b}|\cos\frac{\pi}{3}-|\boldsymbol{c}|\cdot|\boldsymbol{a}|\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}(1+1)=1$$

又
$$|\overrightarrow{AO}|^2=\frac{1}{4}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})^2=\frac{1}{4}(|\boldsymbol{a}|^2+|\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{c}|^2+2|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{c}|\cos\frac{2\pi}{3}+2|\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|\cos\frac{\pi}{3})=\frac{3}{2}$$

故 $$|\overrightarrow{AO}|=\frac{\sqrt{6}}{2},\quad |\overrightarrow{BC}|^2=(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})^2=2$$

故 $$|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{2}$$

所以 $$\cos<\overrightarrow{AO},\ \overrightarrow{BC}>=\frac{\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AO}|\cdot|\overrightarrow{BC}|}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

所以 AO 与 BC 所成的角为 $\arccos\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(Ⅱ)因为$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$,所以
$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})=\frac{1}{2}(|\boldsymbol{a}|^2-|\boldsymbol{b}|^2)=0$$

所以$\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{BC}$，故 $AD\perp BC$，又

$$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA_1}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\frac{1}{2}(|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{c}|\cos\frac{2\pi}{3}+|\boldsymbol{b}|\cdot|\boldsymbol{c}|\cos\frac{\pi}{3})=0$$

所以$\overrightarrow{AD}\perp\overrightarrow{BB_1}$，故 $AD\perp BB_1$，于是$\overrightarrow{AD}\perp$面 BCC_1B_1，所以面 $ABC\perp$面 BCC_1B_1.

(2)空间向量坐标运算的应用

例4 如图 132(a)，正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 的底面边长为 a，侧棱长为$\sqrt{2}a$，求 AC_1 与侧面 AB_1 所成的角.

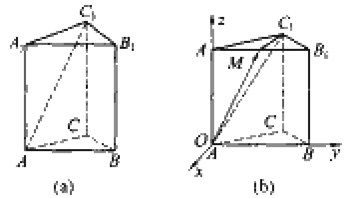


图 132

解 如图 132(b)，以点 A 为坐标原点 O，以 AB 所在直线为 Oy 轴，以 AA_1 所在直线为 Oz 轴，以经过原点且与平面 AB_1 垂直的直线为 Ox 轴，建立空间直角坐标系.

由已知得：$A(0,0,0)$，$B(0,a,0)$，$A_1(0,0,\sqrt{2}a)$，$C_1(-\frac{\sqrt{3}}{2}a,\frac{a}{2},\sqrt{2}a)$.

取 A_1B_1 的中点 M，于是有 $M(0,\frac{a}{2},\sqrt{2}a)$，连 AM，MC_1，有$\overrightarrow{MC_1}=(-\frac{\sqrt{3}}{2}a,0,0)$，且

$$\overrightarrow{AB}=(0,a,0),\quad \overrightarrow{AA_1}=(0,0,\sqrt{2}a)$$

由于$\overrightarrow{MC_1}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，$\overrightarrow{MC_1}\cdot\overrightarrow{AA_1}=0$，所以 $MC_1\perp$面 ABB_1A_1. 故 AC_1 与 AM 所成的角就是AC_1 与侧面 ABB_1A_1 所成的角.

因 $$\overrightarrow{AC_1}=(-\frac{\sqrt{3}}{2}a,\frac{a}{2},\sqrt{2}a),\quad \overrightarrow{AM}=(0,\frac{a}{2},\sqrt{2}a)$$

则 $$\overrightarrow{AC_1}\cdot\overrightarrow{AM}=0+\frac{a^2}{4}+2a^2=\frac{9}{4}a^2$$

而 $$|\overrightarrow{AC_1}|=\sqrt{3}a,\quad |\overrightarrow{AM}|=\frac{3}{2}a$$

故 $$\cos<\overrightarrow{AC_1},\ \overrightarrow{AM}>=\frac{\overrightarrow{AC_1}\overrightarrow{AM}}{|\overrightarrow{AC_1}|\cdot|\overrightarrow{AM}|}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

所以，AC_1 与侧面 ABB_1A_1 所成的角为 30°.

例5 如图 133，正方形 $ABCD$，$ABEF$ 的长都等于 1，而且平面 AC、AE 互相垂直，点 M 在AC 上移动，点 N 在 BF 上移动，若 $CM=BN=a$ $(0<a<\sqrt{2})$.（Ⅰ）求 MN 的长；（Ⅱ）当 a 为何值时，MN 的长最小，并求出最小值.

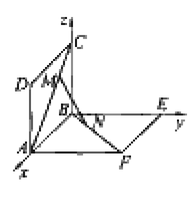


图 133

解 如图，以$\overrightarrow{BA}$、$\overrightarrow{BE}$、$\overrightarrow{BC}$为单位正交基底，建立空间直角坐标系 $B-xyz$，则 $B(0,0,0)$、$A(1,0,0)$、$F(1,1,0)$、$C(0,0,1)$. 由题设可设$\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{FN}=\lambda\overrightarrow{FB}$. 故

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FN}=-\lambda\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AF}+\lambda\overrightarrow{FB}=$$
$$-\lambda(-1,0,1)+(0,1,0)+\lambda(-1,-1,0)=(0,1,-\lambda)$$

即 $$|\overrightarrow{MN}|=\sqrt{(\lambda-1)^2+\lambda^2}=\sqrt{2(\lambda-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}}$$

当 $\lambda=\frac{1}{2}$ 时，此时 $\lambda=\frac{\sqrt{2}-a}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$，$a=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 时 MN 长最小，最小值为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

例 6　如图 134 所示，在正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$AB_1\perp A_1C$，$AB=a$，求这三棱柱的体积.

解　因棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 为正三棱柱，可作 $B_1O\perp A_1C_1$，O 为垂足，以 O 为原点，OA_1，OB_1 为 x，y 轴的正半轴. 过 O 作 z 轴的正半轴平行于 C_1C，建立如下图的直角坐标系，则 $AB=a$. 设 $CC_1=h$，由图 135 可得坐标如下：$C(-a/2,0,h)$，$A_1(a/2,0,0)$，$A(a/2,0,h)$，$B_1(0,\sqrt{3}a/2,0)$，故 $\overrightarrow{A_1C}=(-a,0,h)$，$\overrightarrow{AB_1}=(-a/2,\sqrt{3}a/2,-h)$，又 $AB_1\perp A_1C$，则 $\overrightarrow{A_1C}\cdot\overrightarrow{AB_1}=0$，即

$$(-a,0,h)\cdot\left(-\frac{a}{2},\frac{\sqrt{3}a}{2},-h\right)=\left(\frac{a^2}{2}\right)-h^2=0,\quad h=\frac{\sqrt{2}}{2}a$$

故
$$V=\frac{a}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}a=\frac{\sqrt{6}}{8}a^3$$

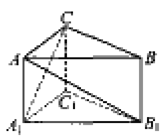


图 134

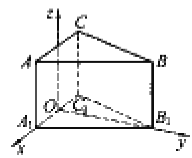


图 135

例 7　如图 136，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，$CC_1=AC=BC$，$\angle ACB=90°$，D，E 分别是 A_1B_1，B_1C_1 的中点，P 是 BB_1 上的一点，$CP\cap BE=O$，$\angle CPB=\angle BEB_1$.（Ⅰ）证明：$\overrightarrow{CP}\perp$ 平面 BDE；（Ⅱ）求 CP 与平面 ABB_1A_1 所成角的大小.

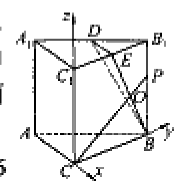


图 136

解　（Ⅰ）取 C 为原点，直线 CA，CB，CC_1 为 x，y，z 轴，建立如图 136 的空间直角坐标系 $C-xyz$. 设 $AC=CB=CC_1=1$，则 $C(0,0,0)$，$A(-1,0,0)$，$B(0,1,0)$，$B_1(0,1,1)$，$D\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},1\right)$，$E\left(0,\frac{1}{2},1\right)$. 再设点 $P(0,x,y)$. 因 $\overrightarrow{PB}\perp\overrightarrow{AB}$，则 $\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，$(0,1-x,-y)\cdot(1,1,0)=0$，$x=1$，即 $P(0,1,y)$，有

$$\cos\langle\overrightarrow{PC},\overrightarrow{PB}\rangle=\frac{\overrightarrow{PC}\cdot\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PC}|\cdot|\overrightarrow{PB}|}=\frac{(0,-1,-y)\cdot(0,0,-y)}{y\sqrt{1+y^2}}=\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}(y>0)$$

又
$$\cos\langle\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EB_1}\rangle=\frac{\overrightarrow{EB}\cdot\overrightarrow{EB_1}}{|\overrightarrow{EB}|\cdot|\overrightarrow{EB_1}|}=\frac{1/4}{\sqrt{(1/4)+1}\cdot\sqrt{(1/4)}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

因 $\langle\overrightarrow{PC},\overrightarrow{PB}\rangle=\langle\overrightarrow{EB},\overrightarrow{EB_1}\rangle$，则 $\frac{y}{\sqrt{1+y^2}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$，$y=1/2$ 或 $y=-1/2$（舍去）. 即 $P(0,1,1/2)$. 又 $\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{BE}=(0,1,1/2)\cdot(0,-1/2,1)=0$. 则 $\overrightarrow{CP}\perp\overrightarrow{BE}$. 同理 $\overrightarrow{CP}\perp\overrightarrow{BD}$. 且 $BD\cap BE=B$，故 $CP\perp$ 平面 BDE.

（Ⅱ）设平面 ABB_1A_1 的一个法向量为 $\boldsymbol{n}=(1,a,b)$. 又 $\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{AB}$，$\boldsymbol{n}\perp\overrightarrow{BP}$，则 $(1,a,b)\cdot(1,1,0)=0$，$(1,a,b)\cdot(0,0,1/2)=0$，解得 $a=-1$，$b=0$. 即 $\boldsymbol{n}=(1,-1,0)$. 又设 CP 与平面 ABB_1A_1 所成的角为 θ，则法向量 $\boldsymbol{n}$ 与 $\overrightarrow{PC}$ 的夹角为 $(\pi/2)-\theta$. 故

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{\boldsymbol{n}\cdot\overrightarrow{PC}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\overrightarrow{PC}|}=\frac{(1,-1,0)\cdot(0,-1,-1/2)}{\sqrt{1+1}\cdot\sqrt{1+1/4}}=\frac{\sqrt{10}}{5}$$

故
$$\sin\theta=\frac{\sqrt{10}}{5}$$

即
$$\theta=\arcsin\left(\frac{\sqrt{10}}{5}\right)$$

5.10 数列问题

5.10.1 关于数列一般概念的理解——结构思想的运用

数列是以正整数集 $\mathbf{Z}^+$ 或非零自然数集 $\mathbf{N}^*$(或它的有限子集$\{1,2,\cdots,n\}$)为定义域的,当自变量从小到大依次取值时对应的一列函数值.因此,我们常常运用函数结构思想方法来讨论数列问题.

(1)数列及其表示法

数列是按一定次序排列的一列数,其中的每个数称为数列的一项.若将数列各项按其在数列中的位置用非零自然数编号,则对于一个自然数,在数列中有确定的一项与之对应.因此数列可以表示为 $a_n=f(n)$,n 为非零自然数,也可以采用描述表示、列表表示,还可以参照函数的各种表示法(如图象、公式、分段定义等)来表示.

例如,数列$\{a_n\}$:0,2,0,2,….

此数列可以用公式表示为 $a_n=(-1)^n+1$;可以用图象表示(图略);还可以用分段式定义表示为

$$a_n=\begin{cases}0 & \text{当 } n=2k-1,k\in\mathbf{N}^*\\ 2 & \text{当 } n=2k,k\in\mathbf{N}^*\end{cases}$$

有些数列还可以运用递推的方式给出.

例如,已知数列$\{a_n\}$中,$a_1=3$,且 $a_{n+1}=2a_n+1(n\in\mathbf{N}^*)$,则这个数列的各项可以根据它的前一项,通过递推公式 $a_{n+1}=2a_n+1$ 依次计算得到.所以

$$a_2=2a_1+1=7,a_3=2a_2+1=15,a_4=2a_3+1=31,\cdots$$

数列按项数是有限或者无限,可以分为有穷数列和无穷数列两类.从函数结构的观点看,有穷数列的定义域是正整数集的有限子集,无穷数列的定义域是正整数集.

应用研究函数单调的方法,还可以将数列分为单调数列和非单调数列.单调数列又可以分成递增数列($a_n<a_{n+1}$)、递减数列($a_n>a_{n+1}$);非单调数列可分为摆动数列、常数列等.

(2)数列的通项公式

数列的各种表示中,运用列表法给出数列,内容具体,方法简单,但要确切表示一个项数比较多的有穷数列或一个无穷数列,比较困难;运用图象法给出数列,具有直观的特点,但不够精确;运用递推法给出数列,虽然揭示了数列结构的一些性质,但要了解全貌需经计算,有时计算也不是很方便的.运用公式法表示数列(即给出数列的通项公式),则具有明显的优点.有了通项公式,就给出了数列的具体结构,可以求出数列中任意指定的一项,也有利于对数列性质的深入研究.

例如,已知数列的通项公式 $a_n=2n-1$,求这个数列的第 1 000 项,这其实就是求函数 $f(n)=2n-1$,当 $n=1\,000$ 时的函数值,即 $a_{1\,000}=f(1\,000)=1\,999$.由于这个数列的通项公式是关于 n 的一次函数,所以此数列用图象表示时,对应数列各项的点必定在斜率为 2 且在 y 轴上截距为 -1 的直线上(图略).对数列的通项公式及其图象作进一步分析,可以知道,这个数列是一个递增数列,且相邻两项的差为常数,即有 $a_{n+1}-a_n=2$.

因此,数列的通项公式,对于研究数列的性质是很重要的.

有些数列不一定有通项公式.例如,质数数列:2,3,5,7,11,13,…的通项公式,至今无法求出.因此,我们仅能求出一些特殊数列的通项公式.数列的各种表示法,可以认为是对公式法的补充.还须注意:一个数列的通项公式有时不是唯一的.

复杂的数列,常常是由一些简单的基本数列或特殊性质的数列构成的.因此,我们应熟练掌握一些简单的基本数列及具有特殊性质的数列的通项公式.

例 1　求数列:2,5,2,5,…的一个通项公式.

解法 1　由于数列的奇数项为 2,偶数项为 5,则通项公式为

$$a_n=\begin{cases}2 & \text{当 } n \text{ 为奇数时}\\ 5 & \text{当 } n \text{ 为偶数时}\end{cases}$$

解法 2　由于 $5=2+3$,数列的项中的加数 3 在奇数项中不出现,在偶数项中出现,则通项公式为

$$a_n=2+3^{0.5\cdot(-1)^n+0.5}$$

解法 3　因为 2 与 5 的平均数为$\frac{7}{2}$.设 $b_n=a_n-\frac{7}{2}$,则$\{b_n\}$:$-\frac{3}{2},\frac{3}{2},-\frac{3}{2},\frac{3}{2},\cdots$,又

$$b_n=(-1)^n\cdot\frac{3}{2}$$

故

$$a_n=b_n+\frac{7}{2}=\frac{1}{2}[3\times(-1)^n+7]$$

(3)数列的和

一般地,设数列:$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$,它的前 n 项的和记为 S_n,即

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$$

它的所有项的和记为 S,即

$$S=a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$$

对于一些特殊的数列,计算 S_n 时有公式可以用;对于极为特殊的数列,才能计算它所有项的和.对于一般项数较少的有穷数列的和,我们只好一项一项地加出来.

例 2　已知数列$\{a_n\}$的递推公式为 $a_{n+1}=a_n+d$(d 为常数,但不等于 0),且 $a_4=4d$,求此数列前五项的和.

解　由 $a_{n+1}=a_n+d$,知

$$a_2=a_1+d,a_3=a_2+d=a_1+2d,$$

$$a_4=a_3+d=a_1+3d,a_5=a_4+d=a_1+4d$$

又由 $a_4=a_1+3d=4d$,知 $a_1=d$.故

$$S_5=a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=5a_1+10d=15d$$

5.10.2 对等差数列的深化认识——结构思想的运用

对等差数列的认识，我们可以运用结构思想方法从如下几个方面去深化.

(1)注重定义，抓住基本

如果一个数列从第二项起，每一项与它前一项的差等于同一个常数，这个数列就叫做等差数列. 这个定义用递推公式表示，就是 $a_1=a,a_{n+1}-a_n=d$(d 为常数，$n\in\mathbf{N}^+$)，常数 d 叫做公差.

由上述定义知，等差数列由首项 a 及公差 d 唯一决定. 因此，首项和公差是等差数列的两个基本量，它们确定了这个数列的全部性质. 例如，d 的正、负决定着数列的增减性：当 $d>0$时，等差数列为递增数列；当 $d<0$ 时，等差数列为递减数列；当 $d=0$ 时，$a_1=a_2=\cdots=a_n=\cdots$. 因此，任意一个常数数列是公差为 0 的等差数列.

等差数列的一切问题是以定义为基础来讨论的，注重定义，便抓住了基本.

(2)运用定义，推导公式

等差数列中，有三个重要公式.

(i)等差中项公式. 设 x,y,z 成等差数列，则 $y-x=z-y$，即 $y=\frac{x+z}{2}$，并称 y 为x,z 的等差中项. 因此，在等差数列$\{a_n\}$中

$$a_{n+1}=\frac{a_n+a_{n+2}}{2}\quad(n\in\mathbf{N}^+)$$

(ii)通项公式. 一些课本或很多书籍中的通项公式是用列举归纳法(或不完全归纳法)给出而没有证明(用列举归纳法得到的结论还要运用数学归纳法证明其结论的正确性)，其实，我们运用定义，可直接列式计算而得到通项公式：由

$$a_1=a,a_2-a_1=d,a_3-a_2=d,\cdots,a_n-a_{n-1}=d$$

将这几个等式两边相加，得

$$a_n=a+(n-1)d$$

如上处理，也揭示了由已知相邻两项的差关系求通项的一种方法——迭加法(或累加法).

(iii)前 n 项和公式. 若 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是公差为 d 的等数列，则由定义知，$a_n,a_{n-1},\cdots,a_2,a_1$ 是公差为 $-d$ 的等差数列. 于是运用倒序相加，有

$$S_n=a_1+(a_1+d)+\cdots+[a_1+(n-1)d]$$

$$S_n=a_n+(a_n-d)+\cdots+[a_n-(n-1)d]$$

上述两式相加，整理得

$$S_n=\frac{1}{2}(a_1+a_n)\cdot n\quad 或\quad S_n=na_1+\frac{1}{2}n(n-1)d$$

(3)理解公式，讨论性质

显然，若 $2y=x+z$，即 $y-x=z-y$，则知 x,y,z(或 z,y,x)成等差数列.

又等差数列的通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d$，可以变形为 $a_n=dn+(a_1-d)$，显然等差数列的通项公式是关于 n 的一次式(当 $d=0$ 时看作退化的一次式). 反之，如果一个数列的通项公式是关于 n 的一次式，容易证明，这个数列是等差数列. 事实上，设 $a_n=dn+b$(d,b

为常数，$d\neq 0$）．因为

$$a_{n+1}-a_n=d(n+1)+b-(dn+b)$$

式中，n 的一次项系数恰为这个等差数列的公差．

另外，由于 $a_n=dn+(a_1-d)$ 是关于 n 的一次式，所以，表示数列各项的点在斜率为 d 的直线上．因而，有

$$d=\frac{a_m-a_n}{m-n}\quad(m\neq n)$$

实际上，这也可由

$$a_m=a_1+(m-1)d,\quad a_n=a_1+(n-1)d$$

两式相减得到．

对于等差数列前 n 项和的公式

$$S_n=na_1+\frac{1}{2}\cdot n\cdot(n-1)d$$

可以变形为

$$S_n=\frac{1}{2}d\cdot n^2+\frac{1}{2}(2a_1-d)\cdot n$$

显然这种形式是关于 n 的二次式且常数项为零．反之，若数列 $\{b_n\}$ 前 n 项的和 $S'_n=An^2+Bn+C$ 为 n 的二次式，当 $C=0$ 时，数列是等差数列（事实上，有 $b_1=S'_1=A+B$，当 $n\geqslant 2$ 时，$b_n=S'_n-S'_{n-1}=2An+B-A$ 为 n 的一次式且可含 b_1 即证）；当 $C\neq 0$ 时，数列不是等差数列（事实上，有 $b_1=A+B+C$，当 $n\geqslant 2$ 时，$b_n=2A\cdot n+B-A$ 虽为 n 的一次式但不可含 b_1，由 $b_2=3A+B$，$b_3=5A+B$，有 $b_2-b_1\neq b_3-b_2$）．

由上可知，等差数列前 n 项和的公式为 n 的二次式且常数项为零，此时二次项系数的 2 倍即为其公差．

运用等差数列的定义（即递推公式）及三个重要公式，可以推导出等差数列的如下一系列美妙性质：

（i）若 $a_n,x_1,x_2,\cdots,x_n,a_{n+1}$ 成等数列，则 $d=\dfrac{a_{n+1}-a_n}{n+1}$．

（ii）等差数列 $\{a_n\}$ 为有穷数列时，则与首项和末项这两项等距离的两项之和等于首末两项之和．

（iii）在等差数列中，任意两足标之和相等的两项之和相等．即若 $m+n=p+q$，$m,n,p,q\in\mathbf{N}^*$，则 $a_m+a_n=a_p+a_q$．

（iv）等差数列的反序列也是等差数列．

（v）等差数列的任意连续子列（$\geqslant 3$ 项）仍为等差数列，且公差不变．

（vi）等差数列中，每间隔 $m(1\leqslant m\leqslant n,m\in\mathbf{N}^*)$ 项的项，按原顺序构成等差数列，其公差是原公差的 $m+1$ 倍．

（vii）等差数列中，每连续 $m(1\leqslant m$ 且 $m\in\mathbf{N}^*)$ 项的和组成等差数列，其公差为原公差的 m^2 倍．

（viii）等差数列的各项加上（或减去）一个相同的数，所得结果按原顺序仍为等差数列，且公差不变．

（ix）等差数列的各项乘以（或除以）同一个不等于 0 的数 l，所得结果按原顺序仍为一等

差数列，且公差比原公差扩大（或缩小）l 倍．

（x）两个项数相同的等差数列对应项之和（或差）仍组成等差数列，其公差为原数列公差之和（或差）．

（4）巧用性质，简捷解题

例 1　两个等差数列前 n 项和之比为$\frac{3n+2}{4n+1}$，求它们第 10 项的比．

解　设这两个数列前 n 项之和分别为 S_n、S'_n，则

$$\frac{S_n}{S'_n}=\frac{\frac{1}{2}(a_1+a_n)\cdot n}{\frac{1}{2}(a'_1+a'_n)\cdot n}=\frac{a_1+a_n}{a'_1+a'_n}=\frac{3n+2}{4n+1}$$

故
$$\frac{a_{10}}{a'_{10}}=\frac{2a_{10}}{2a'_{10}}=\frac{a_1+a_{19}}{a'_1+a'_{19}}=\frac{3\times19+2}{4\times19+1}=\frac{59}{77}$$

为所求．

例 2　已知数列$\{a_n\}$是等差数列，且 $S_5=28$，$S_{10}=36$，求 S_{15}．

解　由 $2(S_{10}-S_5)=S_5+(S_{15}-S_{10})$，有

$$S_{15}=3S_{10}-3S_5=108-84=24$$

例 3　等差数列$\{a_n\}$中，$a_4=7$，求 S_7．

解　$S_7=a_1+a_2+\cdots+a_7=(a_1+a_7)+(a_2+a_6)+(a_3+a_5)+a_4=$

$2a_4+2a_4+2a_4+a_4=7a_4=49$

5.10.3　用函数观点处理等差数列问题——函数思想的运用

把等差数列的通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d$ 改写为 $a_n=dn+(a_1-d)$，并与 $y=kx+b$ 相对照，可明显地看出通项公式所具备的一次函数特性，其图象是直线 $y=dn+(a_1-d)$上一些孤立的点，这条直线的斜率为 $d=\frac{a_m-a_n}{m-n}$．

等差数列前 n 项和公式 $S_n=a_1n+\frac{n(n-1)}{2}d$ 可变形为 $S_n=\frac{d}{2}n^2+(a_1-\frac{d}{2})n$，当 $d\neq0$ 时，S_n 是 n 的二次函数且常数项为零．此时，又有$\frac{S_n}{n}=\frac{d}{2}n+(a_1-\frac{d}{2})$，因此$\{\frac{S_n}{n}\}$也构成了一个等差数列．

例 1　在等差数列$\{a_n\}$中，若 $a_m=n$，$a_n=m(m,n\in\mathbf{N}^*)$且 $m\neq n$，求 a_{m+n}．

解　由 $a_m=n$，$a_n=m$，知在坐标平面内 $A(m,a_m)$，$B(n,a_n)$即 $A(m,n)$，$B(n,m)$两点关于直线 $y=x$ 对称，则 $k_{AB}=-1$，即 $d=-1$．

又由 $a_m=a_1+(m-1)d=a_1-(m-1)=n$，有 $a_1=n+m-1$．故 $a_{m+n}=a_1+(m+n-1)d=0$．

例 2　一个首项为正数的等差数列中，前 3 项的和等于前 11 项的和，则此数列前多少项的和最大？

解法 1　由 $S_3=S_{11}$有

$$3a_1+\frac{3\times2}{2}d=11a_1+\frac{11\times10}{2}d$$

则
$$d=-\frac{2}{13}a_1<0$$
而
$$S_n=n(a_1+\frac{n-1}{2}d)=-\frac{a_1}{13}(n-7)^2+\frac{49}{13}a_1 \qquad (*)$$

因 $-\frac{a_1}{13}<0$,则式(*)为 n 的二次函数,其开口向下,故当 $n=7$ 时,S_n 最大.

解法 2 由于 $S_n=an^2+bn$ 为 n 的二次函数,由 $S_3=S_{11}$,可知其图象的对称轴为 $n=\frac{3+11}{2}=7$.从而,当 $n=7$ 时,S_n 取得最值.

由题设知 $a_1>0,d<0$,故 S 之最值为最大值.

例 3 设等差数列$\{a_n\}$,$\{b_n\}$的前 n 项和分别为 S_n 和 T_n,若$\frac{S_n}{T_n}=\frac{2n}{3n+1}$,求$\frac{a_n}{b_n}$.

解 由于$\{a_n\}$,$\{b_n\}$都是等差数列,则知 S_n,T_n 都是关于 n 的二次函数,且常数项均为零.

由$\frac{S_n}{T_n}=\frac{2n}{3n+1}$,可设 $S_n=kn\cdot 2n,T_n=kn\cdot(3n+1)$,于是
$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{S_n-S_{n-1}}{T_n-T_{n-1}}=\frac{kn\cdot 2n-k(n-1)(2n-2)}{kn\cdot(3n+1)-k(n-1)(3n-2)}=\frac{2n-1}{3n-1}$$

例 4 等差数列$\{a_n\}$的前 m 项之和为 30,前 $2m$ 项之和为 100,求其前 $3m$ 的项之和.

解 由
$$S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$$
得
$$\frac{S_n}{n}=a_1+(n-1)\frac{d}{2}$$

从而点$(n,\frac{S_n}{n})$是一次函数 $y=a_1+(x-1)\frac{d}{2}$图象上的点.

故由点$(m,\frac{S_m}{m})$,$(2m,\frac{S_{2m}}{2m})$,$(3m,\frac{S_{3m}}{3m})$共线,有
$$\frac{\frac{100}{2m}-\frac{30}{m}}{2m-m}=\frac{\frac{S_{3m}}{3m}-\frac{100}{2m}}{3m-2m}$$

即 $50-30=\frac{S_{3m}}{3}-50$,故 $S_{3m}=210$ 为所求.

例 5 在等差数列中,前 n 项和 $S_n=m$,前 m 项和 $S_m=n$,求前 $m+n$ 项和 S_{m+n}.

解 可设 $S_n=an^2+bn$,则$\frac{S_n}{n}=an+b$.

从而点$(m,\frac{S_m}{m})$,$(n,\frac{S_n}{n})$,$(m+n,\frac{S_{m+n}}{m+n})$都在一次函数 $y=an+b$ 的图象上,即点$(m,\frac{n}{m})$,$(n,\frac{m}{n})$,$(m+n,\frac{S_{m+n}}{m+n})$共线,有
$$\frac{\frac{m}{n}-\frac{S_{m+n}}{m+n}}{n-(m+n)}=\frac{\frac{n}{m}-\frac{m}{n}}{m-n}$$

化简得
$$S_{m+n}=-(m+n)$$

例6 已知方程$(x^2-2x+m)(x^2-2x+n)=0$的四个根组成一个首项为$\frac{1}{4}$的等差数列,则$|m-n|=($ $)$.

(A)1 (B)$\frac{3}{4}$

(C)$\frac{1}{2}$ (D)$\frac{3}{8}$

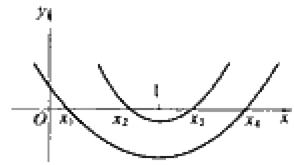


图137

解 令$f_1(x)=x^2-2x+m,f_2(x)=x^2-2x+n$,显然其图象均开口向上,对称轴均为$x=1$,图象与$x$轴的交点即为原方程的根,且
$$x_1+x_4=2,\quad x_2+x_3=2,\quad x_1<x_2<x_3<x_4$$
从而当$x_1=\frac{1}{4}$时,$x_4=\frac{7}{4}$,$x_2=\frac{3}{4}$,$x_3=\frac{5}{4}$.故
$$|m-n|=|\frac{7}{16}-\frac{15}{16}|=\frac{1}{2}$$
即应选(C).

5.10.4 对等比数列的深刻认识——类比与结构思想的运用

对等比数列的认识,我们可以运用类比与结构思想方法仿照对等差数列的深化认识来深化.

(1)抓住定义,把握基本

如果一个数列从第二项起,每一项与它前一项的比(或商)等于同一个常数,这个数列叫做等比数列.用递推公式表示,就是$a_1=a,\frac{a_{n+1}}{a_n}=q(n\in\mathbf{N}^*)$,其中$q$是不等于零的常数叫做这个等比数列的公比.这一递推公式反映了等比数列的特征,也是判断一个数列是否为等比数列的标准.

等比数列由首项a、公比q唯一确定,因此,首项和公比是等比数列的两个基本量,它们决定这个数列的全部性质.例如,q与1的关系决定着数列的增减:当$|q|>1$时,等比数列各项的绝对值递增;当$|q|<1$时,等比数列各项的绝对值递减;当q取负值时,等比数列为摆动数列;当$q=1$时,$a_1=a_2=\cdots=a_n=\cdots$.因此,任意一个非零的常数列是公比为1的等比数列.

(2)运用定义,推导公式

在等比数列中,也有三个重要公式:

(i)等比中项公式.

如果三个数a,b,c成等比数列,则b叫做a与c的等比中项.对于非零的三个数a,b,c,有下面一组等价命题:

b是a与c的等比中项$\Leftrightarrow a,b,c$成等比数列$\Leftrightarrow\frac{b}{a}=\frac{c}{b}\Leftrightarrow b^2=ac$或$b=\pm\sqrt{ac}\Leftrightarrow b$是$a$与$c$的比例中项$\Leftrightarrow a=\frac{b}{q}$且$c=bq$.

这里要说明的是,若$a=b=0$,虽有$b^2=ac$,但a,b,c不成等比数列;注意等比中项有两个值.

由上可知，在等比数列$\{a_n\}$中，$a_{n+1}^2=a_n\cdot a_{n+2}(n\in\mathbf{N}^+)$.

(ii)通项公式.

课本中的通项公式也是用列举归纳法给出的，其实，也可运用定义，直接列式计算而得出通项公式：

由$\frac{a_2}{a_1}=q,\frac{a_3}{a_2}=q,\cdots,\frac{a_n}{a_{n-1}}=q$，将这 $n-1$ 个等式两边相乘，得 $a_n=a_1\cdot q^{n-1}$.

如上处理，也揭示了由已知相邻两项的比关系求通项的一种方法——迭乘法(或累乘法).

(iii)前 n 项和公式.

若 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是公比为 q 的等比数列，其前 n 项和 S_n 的公式，课本中是由 $S_n=a_1q+\cdots+a_1q^{n-1}$与 $qS_n=a_1q+\cdots+a_1q^n$ 两式相减再讨论 q 与 1 的关系而求得的. 其实，运用定义，也可推导这个公式：

由$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\cdots=\frac{a_n}{a_{n-1}}=q$，有

$$a_2=a_1q,a_3=a_2q,\cdots,a_n=a_{n-1}\cdot q\quad(n\geqslant2)$$

这 $n-1$ 个等式两边相加，得

$$S_n-a_1=q\cdot S_{n-1}$$

又

$$S_{n-1}=S_n-a_n$$

则当 $q\neq1$ 时

$$S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

或者由

$$S_n=a_1+a_1q+\cdots+a_1\cdot q^{n-1}=a_1+qS_{n-1}=a_1+q(S_n-a_n)$$

有

$$S_n(1-q)=a_1-a_nq$$

当 $q\neq1$ 时，有

$$S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$$

(3)理解公式，讨论性质

对于等比中项已作讨论(略). 对于通项公式 $a_n=a_1\cdot q^{n-1}$可变形为 $a_n=\frac{a_1}{q}\cdot q^n$，显然这种形式是关于 q 的指数式，且指数取非零自然数，其系数为$\frac{a_1}{q}$. 反之，如果一个数列的通项公式具有这种形式，容易证明这个数列是等比数列，公比是底数，首项是系数乘以公比. 对于前 n 项和的公式 $S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}(q\neq1)$，也可以变形为 $S_n=(-\frac{a_1}{1-q})\cdot q^n+\frac{a_1}{1-q}$，这种形式是关于 q 的指数式，再加上一个常数，且这个常数与指数项系数的绝对值相同，符号相反. 反之，如果一个数列的前 n 项和的公式具有这种形式，也容易证明此数列是等比数列.(对于各项为正数的等比数列采用取对数的方法可转化为讨论等差数列来讨论).

运用等比数列的定义(即递推公式)及上述三个公式，也可推导出等比数列的如下一系列性质：

(i)若 $a_n,x_1,x_2,\cdots,x_n,a_{n+1}$成等比数列，则公比 $q=\sqrt[n+1]{\frac{a_{n+1}}{a_n}}$.

(ii)等比数列为有穷数列时，则与首项和末项这两项等距离的两项之积等于首末两项之积.

(iii)在等比数列中，任意两足标之和相等的两项之积相等. 即若 $m+n=p+q$，$m,n,p,q\in\mathbf{N}^*$，则 $a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q$.

(iv)等比数列的反序列、倒数序列均为等比数列，且其公比均为原公比的倒数.

(v)等比数列的任意连续子数列($\geqslant 3$ 项)仍为等比数列，且公比不变.

(vi)等比数列中，每间隔 $m(1\leqslant m<n,m\in\mathbf{N}^*)$项的项，按原顺序构成等比数列，其公比是原公比的 $m+1$ 次方幂.

(vii)等比数列中，每连续 $m(1\leqslant m<n,m\in\mathbf{N}^*)$项的积组成等比数列，其公比为原公比的 m^2 次方幂.

(viii)等比数列的各项乘以(或除以)一个相同的非零数，所得结果按原顺序仍为等比数列，且公比不变.

(ix)等比数列各项乘方(或开方，且开偶次方均有意义)相同的次数 l，所得结果按原顺序仍为一等比数列，且公比是原公比的 l 次方幂(或方根).

(x)两个项数相同的等比数列对应项之积(或商)仍组成等比数列，其公比为原两数列公比之积(或商).

(4)巧用性质，简捷解题

例 1　在等比数列$\{a_n\}$中，若 $a_6=6$，$a_9=9$，求 a_3.

解　因 a_3,a_6,a_9 成等比数列，则 $a_6^2=a_3\cdot a_9$，即 $a_3=a_6^2\div a_9=4$ 即为所求.

例 2　若数列$\{a_n\}$是等比数列，$a_4\cdot a_7=-512$，$a_3+a_8=124$. 求 a_{10}.

解法 1　因为 $a_3+a_8=a_3+a_3q^5=124$(q 为公比)，又由

$$a_4\cdot a_7=a_3\cdot q\cdot a_3\cdot q^4=a_3^2\cdot q^5=-512$$

有

$$a_3^2\cdot q^5=a_3\cdot a_3q^5=a_3(124-a_3)=-512$$

解得 $a_3=128$ 或 $a_3=-4$.

当 $a_3=128$ 时，$q=-\dfrac{1}{2}$，则 $a_{10}=-1$.

当 $a_3=-4$ 时，$q=-2$，则 $a_{10}=512$.

解法 2　由$\begin{cases}a_3\cdot a_8=a_4\cdot a_7=-512\\a_3+a_8=124\end{cases}$，解得$\begin{cases}a_3=128\\a_8=-4\end{cases}$或$\begin{cases}a_3=-4\\a_8=128\end{cases}$，于是有 $q=-\dfrac{1}{2}$或 $q=-2$. 故 $a_{10}=-1$ 或 $a_{10}=512$.

5.10.5　等差、等比中项的巧用——化归思想的运用

在对问题作细致观察的基础上，展开丰富的联想，以求唤起对有关旧知识的回忆，开启思维的大门，顺利地借助旧知识、旧经验来处理面临的新问题，这种思想方法我们称之为"化归"思想方法.

当我们学习了等差、等比数列后，我们要善于将有些看似与等差、等比数列关系不大或毫不相关的问题，化归成为处理等差、等比中项的问题，可以让人大开眼界.

例 1　已知 $\sin\theta\cdot\cos\theta=\dfrac{60}{169}$，且$\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$，求出 $\sin\theta,\cos\theta$ 的值.

解　由 $\sin\theta\cdot\cos\theta=\frac{60}{169}=(\frac{\pm2\sqrt{15}}{13})^2$，知 $\frac{2\sqrt{15}}{13}$（因 $\frac{\pi}{4}<\theta<\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pm2\sqrt{15}}{13}$ 取正值讨论）是 $\sin\theta$ 与 $\cos\theta$ 的等比中项，故可设 $\sin\theta=\frac{2\sqrt{15}}{13}q$，$\cos\theta=\frac{2\sqrt{15}}{13q}$，其中 q 为公比，且 $1<q<2$.

由 $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，有 $(\frac{2\sqrt{15}}{13}q)^2+(\frac{2\sqrt{15}}{13q})^2=1$，即 $60q^4-169q^2+60=0$，解得 $q=\frac{2}{5}\sqrt{15}$，故求得 $\sin\theta=\frac{12}{13}$，$\cos\theta=\frac{5}{13}$.

例 2　已知 $\triangle ABC$ 的三个内角 A,B,C 满足 $A+C=2B$，$\frac{1}{\cos A}+\frac{1}{\cos C}=-\frac{\sqrt{2}}{\cos B}$，求 $\cos\frac{A-C}{2}$ 的值.

解　由 $A+C=2B$，知 B 为 A 与 C 的等差中项，则 $\angle B=60°$，$\angle A+\angle C=120°$. 设 $\frac{A-C}{2}=\alpha$，则 $A-C=2\alpha$，可设 $A=60°+\alpha$，$C=60°-\alpha$，且有 $\cos B=\frac{1}{2}$. 又由

$$\frac{1}{\cos(60°+\alpha)}+\frac{1}{\cos(60°-\alpha)}=-2\sqrt{2}=2\cdot(-\sqrt{2})$$

知 $-\sqrt{2}$ 是 $\frac{1}{\cos(60°+\alpha)}$ 与 $\frac{1}{\cos(60°-\alpha)}$ 的等差中项，故可设

$$\frac{1}{\cos(60°+\alpha)}=-\sqrt{2}-d,\quad \frac{1}{\cos(60°-\alpha)}=-\sqrt{2}+d$$

从而
$$\cos(60°+\alpha)=\frac{1}{-\sqrt{2}-d},\quad \cos(60°-\alpha)=\frac{1}{-\sqrt{2}+d}$$

两式相加化积得 $\cos\alpha=\frac{-2\sqrt{2}}{2-d^2}$，两式相减化积得 $\sin\alpha=\frac{2d}{-\sqrt{3}(2-d^2)}$. 再由 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 得 $3d^4-16d^2-12=0$. 解得 $d_1^2=6$，$d_2^2=-\frac{2}{3}$（舍去）. 从而求得

$$\cos\alpha=\cos\frac{A-C}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

例 3　设 x,y,z 为非负数，且 $x+y+z=1$，求证：$0\leqslant xy+yz+zx-2xyz\leqslant\frac{7}{27}$.

证明　由 x,y,z 的对称性，不妨设 $x\geqslant y\geqslant z\geqslant0$，由

$$(x+y)+z=1=2\cdot\frac{1}{2}$$

故可设
$$x+y=\frac{1}{2}+d,\quad z=\frac{1}{2}-d$$

再由
$$x+y\geqslant2z\geqslant0\quad 得\quad \frac{1}{6}\leqslant d\leqslant\frac{1}{2}.$$

则
$$xy+yz+zx-2xyz=(x+y)z+xy(1-2z)=\frac{1}{4}-d^2+2dxy\geqslant0$$

而
$$\frac{1}{4}-d^2+2dxy\leqslant\frac{1}{4}-d^2+2d\cdot(\frac{x+y}{2})^2=\frac{1}{4}-d^2+\frac{d}{2}(\frac{1}{2}+d)^2=$$
$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot2d(\frac{1}{2}-d)^2\leqslant$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\left[\frac{2d+(\frac{1}{2}-d)+(\frac{1}{2}-d)}{3}\right]^3=$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{27}=\frac{7}{27}$$

故
$$0\leqslant xy+yz+xz-2xyz\leqslant\frac{7}{27}$$

注　对于 $x+y+z=1$ 也可以写成 $x+y=2\cdot\frac{1-z}{2}$，这时可设 $x=\frac{1-z}{2}-d$，$y=\frac{1-z}{2}+d$，也可证明结论成立.

5.10.6　可化为等差、等比数列的数列问题——模型思想的运用

等差数列、等比数列是两类最基本的数列，也是两个重要的数学模型. 有些数列问题常借助于变形、代换等方法转化为这两类基本数列(模型)而求解.

例1　已知 $a_1=1$ 且 $a_{n+1}=2a_n+1(n\in\mathbf{N}^+)$，求其通项公式.

解法1　由 $a_{n+1}=2a_n+1$，有 $a_{n+1}+1=2(a_n+1)$. 令 $b_n=a_n+1$，则数列 $\{b_n\}$ 是首项为 $b_1=a_1+1=2$，公比为 2 的等比数列，从而 $b_n=b_1\cdot q^{n-1}=2^n$，于是 $a_n+1=2^n$，故 $a_n=2^n-1$.

解法2　由 $a_{n+1}=2a_n+1$，有 $a_{n+2}=2a_{n+1}+1$. 上述两式相减，得

$$a_{n+2}-a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)$$

此式表明 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 是以 $a_2-a_1=3-1=2$ 为首项，以 2 为公比的等比数列，于是 $a_{n+1}-a_n=2^n$.

把 $a_{n+1}=2a_{n+1}$ 代入上式，得 $a_n=2^n-1$.

例2　已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，$a_n\neq0$，且 $a_{n+1}-a_n=2a_{n+1}\cdot a_n(n\in\mathbf{N}^+)$，求其通项 a_n.

解　由 $a_{n+1}-a_n=2a_{n+1}\cdot a_n$ 且 $a_n\neq0$，有

$$\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}=2$$

设 $b_n=\frac{1}{a_n}$，则数列 $\{b_n\}$ 是以 $\frac{1}{a_1}=\frac{1}{2}$ 为首项，以 -2 为公差的等差数列. 于是

$$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_1}-2(n-1)=\frac{1}{2}(5-4n)$$

故
$$a_n=\frac{2}{5-4n}$$

例3　已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=2$，$2S_n^2=2a_nS_n-a_n(n\geqslant2)$，求 S_n.

解　由 $a_n=S_n-S_{n-1}(n\geqslant2)$ 代入已知条件，得

$$2S_n\cdot S_{n-1}=S_{n-1}-S_n$$

因 $S_1=a_1=2$，由上式可推知 $S_n\neq0$，则有

$$\frac{1}{S_n}-\frac{1}{S_{n-1}}=2\quad(n\geqslant2)$$

令 $b_n=\frac{1}{S_n}$，则 $\{b_n\}$ 是以 $\frac{1}{2}$ 为首项，以 2 为公差的等差数列，即

$$b_n=\frac{1}{2}+2(n-1)\quad(n\geqslant 2)$$

于是
$$S_n=\frac{1}{b_n}=\frac{2}{1+4(n-1)}\quad(n\geqslant 2)$$

而 $a_1=S_1$ 也满足上式，故 $S_n=\dfrac{2}{1+4(n-1)}$ 为所求.

例 4　已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=3$，且 $a_n=S_{n-1}+2^n(n\geqslant 2)$. 求 a_n 及 S_n.

解法 1　由 $a_n=S_n-S_{n-1}(n\geqslant 2)$ 有

$$S_n-2S_{n-1}=2^n\quad 即\quad \frac{S_n}{2^n}-\frac{S_{n-1}}{2^{n-1}}=1(n\geqslant 2)$$

设 $b_n=\dfrac{S_n}{2^n}(n\geqslant 2)$，则数列 $\{b_n\}$ 是公差为 1，首项为 $b_2=\dfrac{S_2}{2^2}=\dfrac{5}{2}$ 的等差数列，而 $b_1=\dfrac{S_1}{2}=\dfrac{3}{2}$，也符合条件，所以

$$b_n=b_1+(n-1)\cdot 1$$

即
$$\frac{S_n}{2^n}=\frac{3}{2}+(n-1)=n+\frac{1}{2}$$

故
$$S_n=(2n+1)\cdot 2^{n-1}$$

于是，当 $n\geqslant 2$ 时

$$a_n=S_n-S_{n-1}=(2n+3)\cdot 2^{n-2}$$

故
$$a_n=\begin{cases}3 & (当\ n=1\ 时)\\(2n+3)\cdot 2^{n-2} & (当\ n\geqslant 2\ 时)\end{cases}$$

解法 2　由 $a_n=S_{n-1}+2^n(n\geqslant 2)$ 有

$$a_{n+1}=S_n+2^{n+1}$$

注意到 $S_n-S_{n-1}=a$，上述两式相减得

$$a_{n+1}-2a_n=2^n\quad(n\geqslant 2)$$

于是
$$\frac{a_{n+1}}{2^n}-\frac{a_n}{2^{n-1}}=1$$

令 $b_n=\dfrac{a_n}{2^{n-1}}(n\geqslant 2)$，则 $\{b_n\}$ 是公差为 1，首项为

$$b_2=\frac{a_2}{2}=\frac{a_1+4}{2}=\frac{7}{2}$$

的等差数列，而 $b_1=\dfrac{a_1}{2^0}=3$ 不满足条件，从而

$$b_n=b_2+(n-2)=n+\frac{3}{2}\quad(n\geqslant 2)$$

于是，当 $n\geqslant 2$ 时

$$a_n=\left(n+\frac{3}{2}\right)\cdot 2^{n-1}=(2n+3)\cdot 2^{n-2}$$

故
$$a_n=\begin{cases}3 & (当\ n=1\ 时)\\(2n+3)\cdot 2^{n-2} & (当\ n\geqslant 2\ 时)\end{cases}$$

当 $n\geqslant 2$ 时，按"S_n-qS_n 型"求和，对 $a_n=(2n+3)\cdot 2^{n-2}$，求得 $S_n=(2n+1)\cdot 2^{n-1}$.

又 $S_1=3$ 也满足此式，故 $S_n=(2n+1)\cdot 2^{n-1}$ 为所求.

例 5 在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+n^2(n\in\mathbf{N}^*)$，求其通项公式 a_n.

解 设

$$a_{n+1}+(n+1)^2+k(n+1)+c=2(a_n+n^2+kn+c)$$

将 $a_{n+1}=2a_n+n^2$ 代入上式，比较系数得 $k=2,c=3$. 于是

$$a_{n+1}+(n+1)^2+2(n+1)+3=2(a_n+n^2+2n+3)$$

令 $b_n=a_n+n^2+2n+3$，则 $\{b_n\}$ 是公比为 2，首项为 $b_1=a_1+1^2+2+3=7$ 的等比数列.

从而 $b_n=b_1\times 2^{n-1}=7\times 2^{n-1}$，故

$$a_n=b_n-n^2-2n-3=7\times 2^{n-1}-n^2-2n-3$$

5.10.7 数列求和的若干方法——化归思想的运用

数列求和是数列的重要内容，其中特殊数列求和及其蕴含的化归思想方法是我们学习的重点. 数列求和有如下一些基本方法：

(1)倒序相加法

课本在推导等差数列的求和公式时，就是采用的倒序相加法.

例 1 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_5+a_9+a_{12}+a_{16}=40$，求 S_{20}.

解 由 $$a_5+a_9+a_{12}+a_{16}=40,\quad a_{16}+a_{12}+a_9+a_5=40$$

两式相加，有

$$2[(a_5+a_{16})+(a_9+a_{12})]=4(a_5+a_{16})=80$$

所以 $$a_5+a_{16}=20$$

所以 $$S_{20}=\frac{(a_1+a_{20})\cdot 20}{2}=\frac{(a_5+a_{16})\cdot 20}{2}=200$$

(2)错位相减法

课本在推导等比数列的求和公式时，就是采用的错位相减法.

例 2 求和 $S_n=1\cdot 2^n+2\cdot 2^{n-1}+\cdots+n\cdot 2+(n+1)$.

解 因 $S_n=1\cdot 2^n+2\cdot 2^{n-1}+\cdots+n\cdot 2+(n+1)$，两端同乘以 $\frac{1}{2}$，得

$$\frac{1}{2}S_n=1\cdot 2^{n-1}+2\cdot 2^{n-2}+\cdots+n+\frac{1}{2}(n+1)$$

上述两式相减得

$$\frac{1}{2}S_n=2^n+2^{n-1}+\cdots+2+1-\frac{1}{2}(n+1)=\frac{2^{n+1}-1}{2-1}-\frac{1}{2}(n+1)=2^{n+1}-\frac{n}{2}-\frac{3}{2}$$

故 $S_n=2^{n+2}-n-3$ 为所求.

(3)分组相加法

例 3 由数列 $1,1+2+1,1+2+3+2+1,1+2+3+4+3+2+1,\cdots$ 的前 4 项的值，推测第 n 项 $a_n=1+2+3+\cdots+(n-1)+n+(n-1)+\cdots+3+2+1$ 的结果，并给出证明.

解 由

$$a_1=1=1^2,\ a_2=1+2+1=4=2^2$$

$$a_3=1+2+3+2+1=9=3^2$$

$$a_4=1+2+3+4+3+2+1=16=4^2$$

推测 $a_n = n^2$.

这可用分组相加求和法证明如下

$$a_n = 1+2+3+\cdots+(n-1)+n+(n-1)+\cdots+3+2+1=$$
$$[1+(n-1)]+[2+(n-2)]+\cdots+[(n-1)+1]+n=$$
$$n+n+\cdots+n+n(\text{共 } n \text{ 个}) = n^2$$

(4)裂项相消法

例 5 求和 $S_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{(n+1)n}$.

解 由于$\frac{1}{(n+1)\cdot n} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$,则

$$S_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\cdots+\frac{1}{(n+1)n} = 1+\frac{1}{2\cdot 1}+\frac{1}{3\cdot 2}+\frac{1}{4\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n+1)\cdot n} =$$
$$1+(1-\frac{1}{2})+(\frac{1}{2}-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}) =$$
$$1+1-\frac{1}{n+1} = 2-\frac{1}{n+1}$$

(5)差式递推法

例 6 求和 $S_n = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$.

解 设 k 为正整数,则由$(k+1)^3 = k^3+3k^2+3k+1$,有

$$(k+1)^3 - k^3 = 3k^2+3k+1$$

当 k 分别取 $1,2,\cdots,n$ 时,得

$$2^3-1^3 = 3\times 1^2+3\times 1+1$$
$$3^3-2^3 = 3\times 2^2+3\times 2+1$$
$$\vdots$$
$$(n+1)^3-n^3 = 3\cdot n^2+3\cdot n+1$$

将以上 n 个等式两边相加,得

$$(n+1)^3-1 = 3(1^2+2^2+\cdots+n^2)+3(1+2+\cdots+n)+n$$

故
$$S_n = \frac{1}{3}[(n+1)^3-1-\frac{3}{2}(n+1)n-n] = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

(6)列举归纳法

例 7 数列$\{a_n\}$中,$a_1 = -\frac{2}{3}$,其前 n 项和S_n 满足 $a_n = S_n+\frac{1}{S_n}+2(n\geqslant 2)$,求 S_n.

解 因 $a_2 = S_2-S_1 = S_2-a_1 = S_2+\frac{1}{S_2}+2$,则 $S_2 = -\frac{3}{4}$.同理 $S_3 = -\frac{4}{5}$,$S_4 = -\frac{5}{6}$.归纳推测 $S_n = -\frac{n+1}{n+2}$.此时,由

$$S_n - S_{n-1} = a_n = -\frac{n+1}{n+2}-(\frac{-n}{n+1}) = -\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

及
$$S_n+\frac{1}{S_n}+2 = -\frac{n+1}{n+2}+(-\frac{n+2}{n+1})+2 = \frac{-(n+1)^2-(n+2)^2+2(n+1)(n+2)}{(n+1)(n+2)} =$$
$$\frac{[(n+2)-(n+1)]^2}{(n+1)(n+2)} = -\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

故 $S_n=-\frac{n+1}{n+2}$满足已知条件 $a_n=S_n+\frac{1}{S_n}+2(n\geq2)$，故 $S_n=-\frac{n+1}{n+2}$.

注　对于结论 $S_n=-\frac{n+1}{n+2}$也可运用数学归纳法证明.

5.11　不等式问题

5.11.1　由实数的性质到不等式的性质——化归思想的运用

任意两个实数 a,b 之间具有以下性质

$$a-b>0\Leftrightarrow a>b,a-b=0\Leftrightarrow a=b,a-b<0\Leftrightarrow a<b$$

由此可见，要比较两个实数的大小，可化归为考察它们的差与零的大小. 利用比较实数大小的方法，可以推导出不等式的如下一系列基本性质：

(i) $a>b\Leftrightarrow b<a$（对称性）；

(ii) $a>b,b>c\Rightarrow a>c$；或 $c<b,b<a\Rightarrow c<a$（传递性）；

(iii) $a>b\Leftrightarrow a+c>b+c$（加法单调性）；

(iv)若 $c>0$，则 $a>b\Leftrightarrow ac>bc$；若 $c<0$，则 $a>b\Leftrightarrow ac<bc$（乘法单调性）.

其中，①、③、④也是不等式同解变形的基础. 从上述基本性质及实数的性质又可以推导出不等式的其他一些性质：

(v) $a>b,c>d\Rightarrow a+c>b+d$（相加法则）；

(vi) $a>b,c<d\Rightarrow a-c>b-d$（相减法测）；

(vii) $a>b>0,c>d>0\Rightarrow ac>bd$（相乘法则）；

(viii) $a>b>0,0<c<d\Rightarrow\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$（相除法则）；

(ix) $a>b,ab>0\Rightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$（倒数法则）；

(x) $a>b>0,n\in\mathbf{N}$ 且 $n>1\Rightarrow a^n>b^n$（乘方法则）；

(xi) $a>b>0,n\in\mathbf{N}$ 且 $n>1\Rightarrow\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$（开方法则）.

不等式的性质是解不等式和证明不等式的依据，我们在处理不等式问题时，经常运用不等式的性质把问题变形、化归去求解.

例 1　证明：

(Ⅰ)若 $a<b<0,c<d<0$，则 $ac>bd$.

(Ⅱ)若 $a>b>0,c<d<0,e<0$，则$\frac{e}{a-c}>\frac{e}{b-d}$.

证明　(Ⅰ)由 $a<b<0,c<d<0$，有 $-a>-b>0,-c>-d>0$，从而$(-a)(-c)>(-b)(-d)$，即 $ac>bd$.

(Ⅱ)由 $a>b>0,c<d<0$ 得 $a-c>b-d>0$，则$\frac{1}{a-c}<\frac{1}{b-d}$，又 $e<0$，故$\frac{e}{a-c}>\frac{e}{b-d}$.

说明　两个同向不等式相乘、两个异向不等式相除，应具备不等式两边都是正数的条

件;同向不等式可以相加,异向不等式可以相减;倒数不等式变向,则必须不等式两边同号等等,这是必须牢记的,否则就会出错.

例 2 已知 $f(x)=ax^2-c$,且 $-4\leqslant f(1)\leqslant -1$,$-1\leqslant f(2)\leqslant 5$,求 $f(3)$ 的范围.

解 先用 $f(1)$,$f(2)$ 表示出 a,c,由题意,得 $f(1)=a-c$,$f(2)=4a-c$.从而

$$a=\frac{1}{3}[f(2)-f(1)],\quad c=\frac{1}{3}[f(2)-4f(1)]$$

于是
$$f(3)=9a-c=\frac{8}{3}f(2)-\frac{5}{3}f(1)$$

运用已知条件,求得 $-1\leqslant f(3)\leqslant 20$.

注 若由 $-4\leqslant a-c\leqslant -1$,$-1\leqslant 4a-c\leqslant 5$ 消元,得 $0\leqslant a\leqslant 3$,$1\leqslant c\leqslant 7$,求得 $-7\leqslant f(3)\leqslant 20$,这是由于同向不等式多次相加影响了同解性,扩大了解的范围.

5.11.2 实系数一元不等式的统一解法——函数思想的运用

利用实系数一元连续函数 $y=f(x)$,在其存在且无零点的区间内保号(即保正、负号),可以给出一元高次不等式、绝对值不等式、分式不等式、三角不等式等的简单的统一求解方法,有两种形式:

(1)验值法形式

此方法的具体步骤是:

(i)构造函数 $f(x)$,由所解不等式两边作差,即得 $f(x)$;

(ii)求 $f(x)$ 的定义域;

(iii)求 $f(x)$ 的零点,即解方程 $f(x)=0$;

(iv)在其零点依次将定义域分成的各个区间(偶重零点舍去,若原不等式中有等号则不舍,注意具体问题具体处置)内取一值代入 $f(x)$,看其值的正负,从而求得原不等式的解.

下面,以课本中的例题为例说明之.

例 1 解不等式 $|x^2-5x+5|<1$.

解 令 $f(x)=|x^2-5x+5|-1$,知其定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

由 $f(x)=0$,解得(即由 $x^2-5x+5=1$ 或 $x^2-5x+5=-1$ 求得)$x_1=1$,$x_2=4$,$x_3=2$,$x_4=3$.

在区间 $(-\infty,1)$,$(1,2)$,$(2,3)$,$(3,4)$,$(4,+\infty)$ 中,有 $f(0)>0$,$f(\frac{3}{2})<0$,$f(\frac{5}{2})>0$,$f(\frac{7}{2})<0$,$f(\frac{9}{2})>0$.

故原不等式的解集为 $\{x|1<x<2$,或 $3<x<4\}$.

例 2 解不等式 $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x-3}<0$.

解 令 $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2-2x-3}$,知其定义域为 $x\neq -1$,且 $x\neq 3$ 的所有实数.

由 $f(x)=0$,解得(即由 $x^2-3x+2=0$,求得)$x_1=1$,$x_2=2$,在区间 $(-\infty,-1)$,$(-1,1)$,$(1,2)$,$(2,3)$,$(3,+\infty)$ 中,有 $f(0)<0$,$f(\frac{5}{2})<0$.

故原不等式的解集为 $\{x|-1<x<1$,或 $2<x<3\}$.

例 3 解不等式 $x(x-3)(x+1)(x-2)\geqslant 0$.

解 令 $f(x)=x(x-3)(x+1)(x-2)$，知其定义域为 $(-\infty,+\infty)$. 由 $f(x)=0$，求得 $x_1=0, x_2=3, x_3=-1, x_4=0$.

在区间 $(-\infty,-1)$，$(-1,0)$，$(0,2)$，$(2,3)$，$(3,+\infty)$ 中，有 $f(-\frac{1}{2})<0$，$f(\frac{5}{2})<0$. 故原不等式的解集为

$$\{x \mid x\leqslant -1 \text{ 或 } x\geqslant 3 \text{ 或 } 0\leqslant x\leqslant 2\}$$

例 4 解不等式 $\sqrt{3x-4}-\sqrt{x-3}>0$.

解 令 $f(x)=\sqrt{3x-4}-\sqrt{x-3}$，由 $\begin{cases}3x-4\geqslant 0\\ x-3\geqslant 0\end{cases}$，知其定义域为 $[3,+\infty)$.

由 $f(x)=0$，解得 $x=\frac{1}{2}$ 不在定义域内. 在区间 $[3,\infty)$，有 $f(4)>0$. 故原不等式的解集为 $\{x \mid x\geqslant 3\}$.

例 5 解不等式 $2^{x^2-2x-3}<(\frac{1}{2})^{3(x-1)}$.

解 令 $f(x)=2^{x^2-2x-3}-(\frac{1}{2})^{3(x-1)}$，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$. 由 $f(x)=0$，有 $2^{x^2-2x-3}=2^{-3(x-1)}$，即 $x^2-2x-3=-3(x-1)$，解得 $x_1=-3, x_2=2$.

在区间 $(-\infty,-3)$、$(-3,2)$、$(2,+\infty)$ 中，有 $f(0)<0$，故原不等式的解集为 $\{x \mid -3<x<2\}$.

例 6 解不等式 $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-3x-4)>\log_{\frac{1}{3}}(2x+10)$.

解 令 $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}(x^2-3x-4)-\log_{\frac{1}{3}}(2x+10)$，其定义域为 $\begin{cases}x^2-3x-4>0\\ 2x+10>0\end{cases}$，即 $\{x \mid -5<x<-1 \text{ 或 } x>4\}$.

由 $f(x)=0$，解得 $x_1=-2, x_2=7$. 在区间 $(-5,-2)$、$(-2,-1)$、$(4,7)$、$(7,+\infty)$ 中，有

$$f(-\frac{3}{2})>0,\quad f(5)>0$$

故原不等式的解集为

$$\{x \mid -2<x<-1 \text{ 或 } 4<x<7\}$$

(2)序轴法形式

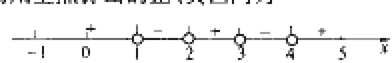
此方法的具体步骤是：

(i)～(iii)同验值法，但注意使 $f(x)$ 的最高次项系数为正；

(iv)在数轴上标出定义域、零点(原不等式含有等号用实点，不含等号用空点表示)，并从右至左依次在数轴上分成的部分中以"+"、"-"相间标出，找出与原不等式 $f(x)>0$ ($f(x)<0$) 值相符的区间即可(也要注意偶次零点、分式中的分子分母最高次项系数为正等问题).

下面，以上述几例为例说明之.

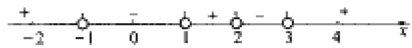
对于例 1，在数轴上均用空点标出的正、负区间为



标负的区间为 $(1,2)$，$(3,4)$，故原不等式的解集为

$$\{x|1<x<2 \text{ 或 } 3<x<4\}$$

对于例 2，在数轴上均用空点标出的正、负区间为



标负的区间为$(-1,1)$，$(2,3)$，故原不等式的解集为

$$\{x|-1<x<1 \text{ 或 } 2<x<3\}$$

对于例 3，在数轴上均用实点标出的正、负区间为

标正的区间$(-\infty,-1)$，$(0,2)$，$(3,+\infty)$，故原不等式的解集为

$$\{x|x\leqslant -1 \text{ 或 } 0\leqslant x\leqslant 2 \text{ 或 } x\geqslant 3\}$$

5.11.3 两个不等式的一般形式——模型思想的运用

对于如下两个不等式：

（Ⅰ）已知 a,b 都是正数，且 $a\neq b$，求证

$$a^3+b^3>a^2b+ab^2 \quad ①$$

（Ⅱ）求证

$$\sqrt{3}+\sqrt{7}<2\sqrt{5} \quad ②$$

我们可以给出这两个不等式的更一般的形式，并以此作为两个不等式模型，将其中的参数取某些特殊值，便可得到课本中的另一些例、习题中的不等式.

(1)模型Ⅰ及应用

由式①可得如下模型Ⅰ：

已知 a,b 是正数，$pq>0$，则

$$a^{p+q}+b^{p+q}\geqslant a^pb^q+a^qb^p \quad ③$$

当且仅当 $a=b$ 时等号成立.

证明 由 $p\cdot q>0$，知 p 与 q 同号，此时，当 $a>0,b>0$，由幂函数 $y=x^p$ 和 $y=x^q$ 在$(0,+\infty)$上都同时为增函数，知 a^p-b^p 与 a^q-b^q 总是同号或同时为零（当且仅当 $a=b$ 时同时为零），则

$$(a^p-b^p)(a^q-b^q)\geqslant 0$$

从而

$$a^{p+q}+b^{p+q}\geqslant a^pb^q+a^qb^p$$

其中等号当且仅当 $a=b$ 时成立.

式③中的 p,q 取某些特殊值，便可得一系列特殊的不等式. 例如：

(i)取 $p=q=1$，则有 $a^2+b^2\geqslant 2ab$，或者当 $a,b\in\mathbf{R}$ 时，有

$$a^2+b^2=|a|^2+|b|^2\geqslant 2|a|\cdot|b|\geqslant 2ab$$

(ii)取 $p=q=\frac{1}{2}$，则有

$$a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$$

(iii)取 $p=4,q=2$，则有

$$a^6+b^6\geqslant |a|^4\cdot|b|^2+|a|^2\cdot|b|^4=a^4b^2+a^2b^4$$

(iv)取 $p=1,q=\frac{1}{2}$，则有

$$a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}\geqslant ab^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}b=\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})$$

即

$$\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}\geqslant\sqrt{a}+\sqrt{b}$$

例 证明下列不等式

(Ⅰ)设 $a,b\in\mathbf{R}^{+}$,且 $a\neq b$,则

$$\frac{a^3}{b}+\frac{b^3}{a}>\frac{1}{2}(a+b)^2$$

(Ⅱ)设 $a,b,c\in\mathbf{R}^{+}$,则

$$a^2+b^2+c^2\geqslant\frac{a+b}{2}\sqrt{ab}+\frac{b+c}{2}\sqrt{bc}+\frac{c+a}{2}\sqrt{ca}$$

(Ⅲ)已知 $x>-1$,且 $x\neq 0$, $n\in\mathbf{N}$,且 $n\geqslant 2$,求证

$$(1+x)^n>1+nx$$

略证 (Ⅰ)取 $p=3,q=1$,由式(*),有

$$a^4+b^4>a^3b+ab^3$$

取 $p=q=2$,由式(*),有

$$a^4+b^4>2a^2b^2$$

由上述两不等式两边相加整理即得证;

(Ⅱ)取 $p=\frac{1}{2},q=\frac{3}{2}$,由式(*),有

$$a^2+b^2\geqslant a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}+a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}=(a+b)\sqrt{ab}$$

$$b^2+c^2\geqslant(b+c)\sqrt{bc},c^2+a^2\geqslant(c+a)\sqrt{ca}$$

此三式两边相加整理即得证;

(Ⅲ)由 $x>-1$ 知 $1+x>0$.又由式(*),当 $x\neq 0$ 时,有

$$(1+x)^2+1^2>(1+x)+(1+x)$$

$$(1+x)^3+1^3>(1+x)^2+(1+x)$$

$$\vdots$$

$$(1+x)^n+1^n>(1+x)^{n-1}+(1+x)$$

以上 $n-1$ 个不等式两边相加整理即得证.

(2)模型Ⅱ及应用

由式②可得如下模型Ⅱ:

若 $a_1,a_2,a_3,a_4\in\overline{\mathbf{R}}^{-}$,且 $a_1+a_4=a_2+a_3=M$, $a_1<a_2\leqslant a_3<a_4$,则

$$\sqrt{a_1}+\sqrt{a_4}<\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3} \qquad ④$$

证明 考虑函数 $f(x)=\sqrt{M-x}+\sqrt{x}(x\geqslant 0)$,注意到 $f(x)\geqslant 0$,则

$$f(x)=\sqrt{(\sqrt{M-x}+\sqrt{x})^2}=\sqrt{M+2\sqrt{-(x-\frac{M}{2})^2+\frac{M^2}{4}}}$$

在$[0,\frac{M}{2}]$上单调递增,及 $a_1<a_2\leqslant a_3<a_4$,且

$$a_1+a_4=a_2+a_3=M$$

有 $a_1,a_2\in[0,\frac{M}{2}]$,从而有 $f(a_1)<f(a_2)$,即

$$\sqrt{a_1}+\sqrt{a_4}<\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}$$

④中的 a_1,a_2,a_3,a_4 取某些特殊值,便可得一系列特殊的不等式,例如:

(i)取 $a_1=5,a_2=6,a_3=7,a_4=8$,则有$\sqrt{6}+\sqrt{7}>2\sqrt{2}+\sqrt{5}$.

(ii)取 $a_1=3,a_2=4,a_3=4,a_4=5$,则有$\sqrt{3}+\sqrt{5}<4$.

(iii)取 $a_1=2,a_2=3,a_3=4,a_4=5$,则有$\sqrt{3}+\sqrt{4}>\sqrt{5}+\sqrt{2}$,即$\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}>\sqrt{5}-2$.

(iv)取 $a_1=a-3(a\geqslant3),a_2=a-2,a_3=a-1,a_4=a$,则有$\sqrt{a}-\sqrt{a-1}<\sqrt{a-2}-\sqrt{a-3}$.

(v)取 $a_1=0,a_2=a-b(a>b>0),a_3=b,a_4=a$,则有$\sqrt{a}-\sqrt{b}<\sqrt{a-b}$.

(vi)取 $a_1=1,a_2=3,a_3=8,a_4=10$,则有$\sqrt{3}+\sqrt{8}>1+\sqrt{10}$.

5.11.4　二元与三元均值不等式的巧用——转换思想的运用

模型转换常指将一个原型迅速恰当地提炼转变到某一模型上.为了简捷地实现某些不等式的论证,我们应善于将有关式子进行恰当的变形,巧妙地运用二元或三元均值不等式来证明.

例1　已知 a,b 是正数,且 $a\neq b$,求证:$a^3+b^3>a^2b+ab^2$.

证法1　当 $a\neq b$ 时,由 $a^2+b^2>2ab$ 及 a,b 为正数,有

$$(a^2+b^2)\cdot(a+b)>2ab\cdot(a+b)$$

即

$$a^3+b^3+(a^2b+ab^2)>2a^2b+2ab^2$$

故

$$a^3+b^2>a^2b+ab^2$$

证法2　当 $a,b\in\mathbf{R}^+$ 且 $a\neq b$,有 $a+b>2\sqrt{ab}$,亦即$(a+b)^2>4ab$,亦有

$$(a+b)^3>4ab(a+b)$$

故

$$a^3+b^3>4a^2b+4ab^2-3a^2b-3ab^2=a^2b+ab^2$$

证法3　当 $a,b\in\mathbf{R}^+$ 且 $a\neq b$ 时,有$\frac{a^2}{b}+b>2a$,亦即$\frac{a^2}{b}>2a-b$,从而

$$a^3+b^3=ab\left(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{a}\right)>ab[(2a-b)+(2b-a)]=a^2b+ab^2$$

证法4　当 $a,b\in\mathbf{R}^+$ 且 $a\neq b$ 时,有

$$a^2b+ab^2=a\cdot a\cdot b+a\cdot b\cdot b<\frac{a^3+a^3+b^3}{3}+\frac{a^3+b^3+b^3}{3}=a^3+b^3$$

例2　如果 a,b 都是正数,且 $a\neq b$,求证:$\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}>\sqrt{a}+\sqrt{b}$.

证明　因 $a,b\in\mathbf{R}^+$ 且 $a\neq b$,有

$$\frac{a}{\sqrt{b}}+\sqrt{b}>2\sqrt{a},\quad \frac{b}{\sqrt{a}}+\sqrt{a}>2\sqrt{b}$$

上述两不等式两边分别相加并化简即证.

例3　已知 a,b 都是正数,$x,y\in\mathbf{R}^+$,且 $a+b=1$,求证:$ax^2+by^2\geqslant(ax+by)^2$.

证明　$ax^2+by^2=(ax^2+by^2)(a+b)=a^2x^2+b^2y^2+ab(x^2+y^2)\geqslant$
$a^2x^2+b^2y^2+2abxy=(ax+by)^2$

例 4 求证：$3(1+a^2+a^4)\geqslant(1+a+a^2)^2$.

证明 $3(1+a^2+a^4)=1+1+a^2+1+a^4+a^2+a^2+a^4+a^4=$

$1+(1+a^2)+(1+a^4)+a^2+(a^2+a^4)+a^4\geqslant 1+2a+2a^2+a^2+2a^3+a^4=$

$1^2+a^2+(a^2)^2+2\cdot 1\cdot a+2\cdot 1\cdot a^2+2\cdot a\cdot a^2=(1+a+a^2)^2$

例 5 已知 a,b,c 是不全相等的正数，求证：$(ab+a+b+1)\cdot(ab+ac+bc+c^2)>16abc$.

证明 $(ab+a+b+1)\cdot(ab+ac+bc+c^2)=[(ab+1)+(a+b)]\cdot$

$[(ab+c^2)+(ac+bc)]>(2\sqrt{ab}+2\sqrt{ab})\cdot(2c\sqrt{ab}+2c\sqrt{ab})=16abc$

例 6 如果 a,b,c 为正数，那么 $a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$.

证法 1 由

$$(a-b)(a^2-b^2)+(b-c)(b^2-c^2)+(c-a)(c^2-a^2)\geqslant 0$$

有

$$2(a^3+b^3+c^3)\geqslant a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)\geqslant$$
$$a\cdot 2bc+b\cdot 2ac+c\cdot 2ab=6abc$$

故

$$a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$$

证法 2 由

$$3(a^2+b^2+c^2)=a^2+b^2+c^2+(a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(c^2+a^2)\geqslant$$
$$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2=$$
$$\frac{1}{2}[(a^2+b^2)+(b^2+c^2)+(c^2+a^2)]+2ab+2bc+2ca\geqslant$$
$$ab+bc+ca+2ab+2bc+2ca=3(ab+bc+ca)$$

有

$$3(a^2+b^2+c^2)\geqslant(a+b+c)^2$$

亦有

$$3(a^2+b^2+c^2)\cdot(a+b+c)\geqslant(a+b+c)^3$$

故

$$a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$$

证法 3 由证法 2 有 $(a^2+b^2+c^2)\geqslant ab+bc+ca$，亦有

$$(a^2+b^2+c^2)(a+b+c)\geqslant(ab+bc+ca)(a+b+c)$$

故

$$a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$$

证法 4 由证法 2 有 $(a+b+c)^2\geqslant 3(ab+bc+ca)$，亦有

$$(a+b+c)^3\geqslant 3(ab+bc+ca)\cdot(a+b+c)$$

故

$$a^3+b^2+c^3\geqslant 3abc$$

证法 5 因 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$，则 $a^3,b^3,c^3\in\mathbf{R}^+$. 由

$$a^3+b^3\geqslant 2\sqrt{a^3b^3},\quad c^3+abc\geqslant 2\sqrt{abc^4}$$

有

$$a^3+b^3+c^3+abc\geqslant 2\sqrt{a^3b^3}+2\sqrt{abc^4}\geqslant 2\sqrt{2\sqrt{a^3b^3}\cdot 2\sqrt{abc^4}}=4abc$$

故

$$a^3+b^3+c^3\geqslant 3abc$$

5.11.5 构作函数证明不等式——函数思想的运用

把某些不等式的证明统归到函数思想方法下研究，能有效地揭示数式结构变化的规律，反映数式间的相互联系，使不等式证明由研究状态进到研究过程，引起传统数学观念的更新.

(1)利用函数的单调性证明不等式

例1　设 $a,b\in\mathbf{R}^+$,求证:

(Ⅰ)$\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}$(当且仅当 $a=b$ 时取"="号);

(Ⅱ)$\frac{2ab}{a+b}<\sqrt{ab}$($a\neq b$ 时).

证明　构作函数 $f(x)=\frac{a^{x+1}+b^{x+1}}{a^x+b^x}(x\in\mathbf{R})$,则

$$f(x)=\frac{b(a^x+b^x)+(a-b)a^x}{a^x+b^x}=b+\frac{a-b}{1+(\frac{b}{a})^x}$$

当 $a=b$ 时,$f(x)=b$ 为常数函数;

当 $a>b$ 时,$a-b>0$,$0<\frac{b}{a}<1$,$(\frac{b}{a})^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是减函数,从而$\frac{a-b}{1+(\frac{b}{a})^x}$在 $\mathbf{R}$ 上是增函数,即 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上是增函数;

当 $a<b$ 时,$a-b<0$,$\frac{b}{a}>1$,$(\frac{b}{a})^x$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数,从而$\frac{a-b}{1+(\frac{b}{a})^x}$在 $\mathbf{R}$ 上是增函数,即 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上是增函数.

综上可知,若 $x_1<x_2$,则 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$.

当 $a=b$ 时,则 $f(x_1)=f(x_2)$.

(Ⅰ)由 $-\frac{1}{2}<0$,有 $f(-\frac{1}{2})\leqslant f(0)$,即

$$\frac{(a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}})a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}{(a^{-\frac{1}{2}}+b^{-\frac{1}{2}})a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}}=\sqrt{ab}=f(-\frac{1}{2})<f(0)=\frac{a^1+b^1}{a^0+b^0}=\frac{a+b}{2}$$

(Ⅱ)由 $-1<-\frac{1}{2}$ 且 $f(-1)<f(-\frac{1}{2})$,即有$\frac{2ab}{a+b}<\sqrt{ab}(a\neq b)$.

注　还有 $f(-2)\leqslant f(-1)\leqslant f(-\frac{1}{2})\leqslant f(0)\leqslant f(\frac{1}{2})\leqslant f(1)\leqslant f(2)$等.

例2　已知 $a,b,m\in\mathbf{R}^+$,并且 $a<b$,求证:$\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}$.

证明　构作函数 $f(x)=\frac{a+x}{b+x}=1+\frac{a-b}{b+x}$,则知 $f(x)$在区间$(-b,+\infty)$上单调递增.由 $m>0$,有 $f(m)>f(0)$,即$\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}$.

例3　设 $a,b,c,d\in\mathbf{R}$ 且 $a<c$,$b>d$,求证:$(a-b)(a^2+b^2)<(c-d)(c^2+d^2)$.

证明　由 $a<c$,$b>d$,知 $a-b<c-d$.注意到幂函数 $y=x^3$ 在 $\mathbf{R}$ 上是增函数,知

$$a^3<c^3,b^3>d^3\quad 且\quad (a-b)^3<(c-d)^3$$

由上述前两式,有

$$a^3-b^3<c^3-d^3$$

由上述后一式加上 $2(a^3-b^3)<2(c^3-d^3)$,有

$$3(a^3-a^2b+ab^2-b^3)<3(c^3-c^2d+cd^2-d^3)$$

故
$$(a-b)(a^2+b^2)<(c-d)(c^2+d^2)$$

(2)利用二次函数的非负性质证明不等式

例 4 已知 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,求证:$\dfrac{b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2}{a+b+c}\geqslant abc$.

证明 原不等式等价于

$$(b^2+c^2-bc)a^2-bc(b+c)a+b^2c^2\geqslant 0$$

构作函数

$$f(x)=(b^2+c^2-bc)x^2-bc(b+c)x+b^2c^2$$

注意到

$$b^2+c^2-bc\geqslant 2bc-bc=bc>0$$

表明此二次函数 $f(x)$ 的二次项系数大于零.因其判别式

$$\Delta=[-bc(b+c)]^2-4(b^2+c^2-bc)\cdot b^2c^2=-3[bc(b-c)]^2\leqslant 0$$

从而

$$f(x)\geqslant 0$$

故 $f(a)\geqslant 0$,即证得原不等式成立.

例 5 已知 $ab\neq bc$,求证:$(a^2+b^2)(c^2+d^2)>(ac+bd)^2$.

证明 构作函数 $f(x)=(a^2+b^2)x^2-2(ac+bd)x+c^2+d^2$,则由 $ab\neq bc$ 知 $f(x)=(ax-c)^2+(bx-d)^2>0$,从而知其判别式 $\Delta<0$,故有

$$[-2(ac+bd)]^2-4(a^2+b^2)(c^2+d^2)<0$$

即

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)>(ac+bd)^2$$

5.11.6 运用放缩法证明不等式——化归思想的运用

在对问题作细致观察的基础上,展开丰富的联想,开启思维的大门,将待处理的问题变化(转化)为目标模式或规范问题,从而使原问题得到解决,称之为化归.下面我们运用放缩化归思想来处理一些不等式问题:

例 1 求证:$\sqrt{3}+\sqrt{7}<2\sqrt{5}$.

证明 $\sqrt{3}+\sqrt{7}=\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{7})^2}=\sqrt{10+2\sqrt{21}}<\sqrt{10+2\sqrt{25}}=2\sqrt{5}$,即证.

例 2 求证:$\sqrt{6}+\sqrt{7}>2\sqrt{2}+\sqrt{5}$.

证明 $2\sqrt{2}+\sqrt{5}=\sqrt{(\sqrt{8}+\sqrt{5})^2}=\sqrt{13+2\sqrt{40}}<\sqrt{13+2\sqrt{42}}=$

$$\sqrt{(\sqrt{6})^2+(\sqrt{7})^2+2\sqrt{6}\cdot\sqrt{7}}=\sqrt{6}+\sqrt{7}$$

例 3 已知 $a\geqslant 3$,求证

$$\sqrt{a}-\sqrt{a-1}<\sqrt{a-2}-\sqrt{a-3}$$

证明 原不等式可改写为

$$\sqrt{a}+\sqrt{a-3}<\sqrt{a-2}+\sqrt{a-1}$$

由

$$\sqrt{a}+\sqrt{a-3}=\sqrt{(\sqrt{a}+\sqrt{a-3})^2}=\sqrt{a+a-3+2\sqrt{a^2-3a}}<$$

$$\sqrt{(a-1)+(a-2)+2\sqrt{a^2-3a+2}}=\sqrt{a-2}+\sqrt{a-1}$$

即证.

例 4 已知 $a>b>0$,求证:$\sqrt{a}-\sqrt{b}<\sqrt{a-b}$.

证明 原不等式可改写为 $\sqrt{a}<\sqrt{a-b}+\sqrt{b}$.由

$$\sqrt{a}=\sqrt{(a-b)+b}<\sqrt{(a-b)+b+2\sqrt{a-b}\cdot\sqrt{b}}=\sqrt{a-b}+\sqrt{b}$$

即证.

对于上述四道例题,一般地,我们有.

例 5　设 $a_1,a_2,a_3,a_4\in$ 非负实数,且 $a_1+a_4=a_2+a_3$, $a_1<a_2\leqslant a_3<a_4$,则 $\sqrt{a_1}+\sqrt{a_4}<\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}$.

证明　由 $a_1+a_4=a_2+a_3$,有

$$a_4^2+a_1^2=a_3^2+a_2^2+2a_2a_3-2a_1a_4$$

又由

$$a_4>a_3\geqslant a_2>a_1\geqslant 0$$

有

$$a_4-a_1>a_3-a_2\geqslant 0$$

即有

$$a_4^2+a_1^2-2a_1a_4>a_3^2+a_2^2-2a_2a_3$$

亦有

$$a_3^2+a_2^2+2a_2a_3-2a_1a_4-2a_1a_4>a_3^2+a_2^2-2a_2a_3$$

亦即

$$a_2\cdot a_3>a_1\cdot a_4$$

于是

$$\sqrt{a_1}+\sqrt{a_4}=\sqrt{(\sqrt{a_1}+\sqrt{a_4})^2}=\sqrt{a_1+a_4+2\sqrt{a_1a_4}}<\sqrt{a_1+a_4+2\sqrt{a_2a_3}}=\sqrt{a_2+a_3+2\sqrt{a_2a_3}}=\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}$$

注　对于例 5 中的 a_1,a_2,a_3,a_4 取特殊值,即得例 1~例 4.

(i)取 $a_1=3,a_2=a_3=5,a_4=7$ 即为例 1;

(ii)取 $a_1=5,a_2=6,a_3=7,a_4=8$ 即为例 2;

(iii)取 $a_1=a-3(a\geqslant 3),a_2=a-2,a_3=a-1,a_4=a$ 即为例 3;

(iv)取 $a_1=0,a_2=a-b(a>b>0),a_3=b,a_4=a$,即为例 4.

例 6　求证:$(\frac{a+b}{2})^2\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}$.

证明　令 $a=\lambda+k,b=\lambda-k(\lambda>0)$,则 $\frac{a+b}{2}=\lambda$, $\frac{a^2+b^2}{2}=\lambda^2+k^2$. 显然有 $\lambda^2\leqslant\lambda^2+k^2$,故

$$(\frac{a+b}{2})^2\leqslant\frac{a^2+b^2}{2}$$

例 7　已知 a,b 都是正数,求证:$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

证明　令 $a=\lambda+k,b=\lambda-k(\lambda>0$ 且 $\lambda>|k|)$,则 $1-\frac{k^2}{\lambda^2}\leqslant 1$,且

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{\lambda^2-k^2}{\lambda}=\sqrt{\lambda^2-k^2}\cdot\sqrt{1-\frac{k^2}{\lambda^2}}$$

$$\sqrt{ab}=\sqrt{\lambda^2-k^2},\quad\frac{a+b}{2}=\lambda,\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}=\sqrt{\lambda^2+k^2}$$

由于

$$\sqrt{\lambda^2-k^2}\cdot\sqrt{1-\frac{k^2}{\lambda^2}}\leqslant\sqrt{\lambda^2-k^2}\leqslant\lambda\leqslant\sqrt{\lambda^2+k^2}$$

故

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\leqslant\sqrt{ab}\leqslant\frac{a+b}{2}\leqslant\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

例 8　已知 a,b,m 都是正数,并且 $a<b$. 求证:$\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}$.

证明 令$\frac{a+m}{b+m}=M,\frac{b-a}{b+m}=N$,则 $M+N=1$. 又

$$N=\frac{b-a}{b+m}<\frac{b-a}{b}(b>a>0,m>0)$$

从而

$$M=(M+N)-N>1-\frac{b-a}{b}=\frac{a}{b}$$

故

$$\frac{a+m}{b+m}>\frac{a}{b}$$

例 9 已知△ABC 的三边长是 a,b,c,且 m 为正数,求证:$\frac{a}{a+m}+\frac{b}{b+m}>\frac{c}{c+m}$.

证明 令

$$\frac{a}{a+m}+\frac{b}{b+m}-\frac{c}{c+m}=M$$

$$\frac{m}{a+m}+\frac{m}{b+m}-\frac{m}{c+m}=N$$

则

$$M+N=1$$

由于

$$N=\frac{m}{a+m}+\frac{m}{b+m}-\frac{m}{c+m}$$

则若 $a\geqslant b\geqslant c$ 时,显然 $N<1$. 若 $c>b>a$ 时

$$N=\frac{m}{a+m}+\frac{(c-b)m}{(b+m)(c+m)}<\frac{m}{a+m}+\frac{a}{a+m}=1(注意\ c-b<a)$$

从而

$$M=(M+N)-N>1-1=0$$

故

$$\frac{a}{a+m}+\frac{b}{b+m}>\frac{c}{c+m}$$

5.12 复数问题

5.12.1 对复数概念的深刻认识——对应思想的运用

对应将各种类别、各种层次的对象联系起来,展现出它们之间某些相似或相同的属性,使各种数学对象能够相互结合、转化并协调和谐呈现.

复数是形如 $a+bi(a,b\in\mathbf{R})$的数,任何一个复数都可以由一个有序实数对(a,b)唯一确定,也就是说任何一个复数 $a+bi$ 和一个有序实数对(a,b)对应;反过来,任何一个有序实数对(a,b)对应着一个复数 $a+bi$. 按约定,$b=0$时,复数 $a+0\cdot i$ 是实数,简写为 a,它由有序实数对$(a,0)$确定.

认清了以上的对应关系,将有助于深刻认识以下的问题.

(1)复数的几何意义与向量表示

由于复数 $a+bi$ 与有序实数对有对应关系,就使得我们能借用平面直角坐标系来表示复数. 如:复数 $a+bi$ 可以用点 $Z(a,b)$来表示. 这样建立直角坐标系来表示复数的平面就叫做复平面,其中 x 轴叫做实轴,y 轴除去原点的部分叫做虚轴. 表示实数 $a+0\cdot i$ 的点$(a,0)$都在实轴上,表示纯虚数 $0+bi(b\neq0)$的点$(0,b)$都在虚轴上. 每一个复数,有复平面内唯一的一个点和它对应;反过来,复平面内的每一个点,有唯一的一个复数和它对应. 因而,复数集 $\mathbf{C}$ 和复平面内所有点的集合是一一对应的. 这就是复数的一个几何意义.

由于复平面内的点 $Z(a,b)$表示复数 $a+bi(a,b\in\mathbf{R})$,联结 OZ(O 为原点),规定 O 为

起点，Z 为终点，则有向线段$\overrightarrow{OZ}$同复数 $a+bi$ 联系起来，而有向线段可以看成向量，因而有向线段$\overrightarrow{OZ}$就把复数同向量联系. 复数可以用向量来表示，而且，向量$\overrightarrow{OZ}$由点 Z 唯一确定；反过来，点 Z 也可由向量$\overrightarrow{OZ}$唯一确定. 因此，复数集 $\mathbf{C}$ 与复平面内所有以原点 O 为起点的向量组成的集合也是一一对应的. 这就是复数的向量表示的几何背景.

利用复数的几何意义与向量表示，可以简捷地处理某些复数问题，或抓住求解问题的关键.

例 1　已知两个复数集合 $A=\{z\mid |z-2|\leqslant 2\}$，$B=\{z\mid z=\frac{z_1}{2}\cdot i+b, z_1\in A, b\in\mathbf{R}\}$.

（Ⅰ）若 $A\cap B=\varnothing$，求 b 的范围；

（Ⅱ）若 $A\cap B=B$，求 b 的值.

解　由 $z=\frac{z_1}{2}\cdot i+b$，得 $z_1=\frac{2(z-b)}{i}$. 因 $z_1\in A$，故 $|z-2|=|\frac{2(z-b)}{i}-2|\leqslant 2$，即

$$|z-(b+i)|\leqslant 1$$

由复数集与复平面内点集的一一对应关系，可知复数集 A，B 分别是复平面内的圆面

$$(x-2)^2+y^2\leqslant 4 \quad 和 \quad (x-b)^2+(y-1)^2\leqslant 1$$

（Ⅰ）若 $A\cap B=\varnothing$，两圆圆心距 $d=\sqrt{(b-2)^2+1}>2+1$，解得 $b>2+2\sqrt{2}$或 $b<2-2\sqrt{2}$.

（Ⅱ）若 $A\cap B=B$，即两圆圆心距 $d\leqslant 1$，即$(b-2)^2+1\leqslant 1$，解得 $b=2$.

例 2　在复平面内有三点 M_1，M_2，M_3，对应的复数分别为 $1+z$，$1+2z$，$1+3z$，且 $|z|=2$，O 为原点，求当 $S_{\triangle M_1OM_2}+S_{\triangle M_2OM_3}=2$ 时对应的复数 z.

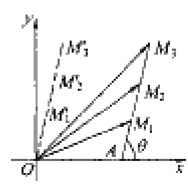


图 138

解　设向量$\overrightarrow{AM_1}=\overrightarrow{OM'_1}$，$\overrightarrow{AM_2}=\overrightarrow{OM'_2}$，$\overrightarrow{AM_3}=\overrightarrow{OM'_3}$分别对应复数 z，$2z$，$3z$，如图 138，则它们有相同的幅角主值 $\theta(0\leqslant\theta<2\pi)$.

由复数与向量的对应关系（或向量加法的几何意义），可知$\overrightarrow{OM_1}$，$\overrightarrow{OM_2}$，$\overrightarrow{OM_3}$分别与复数 $1+z$，$1+2z$，$1+3z$ 对应，则

$$S_{\triangle OAM_3}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{AM_3}|\cdot\sin\theta=3\sin\theta$$

$$S_{\triangle OAM_1}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}|\cdot|\overrightarrow{AM_1}|\cdot\sin\theta=\sin\theta$$

则

$$S_{\triangle M_1OM_2}+S_{\triangle M_2OM_3}=S_{\triangle OAM_3}-S_{\triangle OAM_1}=2\sin\theta=2$$

所以 $\sin\theta=1$. 又 $0\leqslant\theta<2\pi$，则 $\theta=\frac{\pi}{2}$，故 $z=2i$.

(2)共轭复数、复数的模与幅角

实部相等、虚部互为相反数的两个复数叫做共轭复数，即 $a+bi$ 与 $a-bi$ 为共轭复数，这两者之间是一个特殊的一一对应：$(a,b)\leftrightarrow(a,-b)$，不管是不是有 $a=0$ 或 $b=0$，都使得复平面内表示这两个互为共轭复数的点 Z 与 $\bar{Z}$ 都关于实轴对称(或重合于实轴上).

在复平面内，可看到：当点 Z 变成它关于实轴的对称点 $\bar{Z}$ 时，其实质就是对 $a+bi$ 取共轭复数变成了 $a-bi$，即$\overline{a+bi}=a-bi$，由此则有

$$\overline{a-bi}=\overline{\overline{a+bi}}=a+bi$$

复数 $a+bi$ 所对应的向量$\overrightarrow{OZ}$的模(即有向线段$\overrightarrow{OZ}$的长度)r 叫做复数 $a+bi$ 的模(或绝

对值),这实际上就是点 Z 到原点 O 的距离(非负实数),因而有 $|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$,由此可知两个互为共轭复数的模相等;式子 $|z|=r$ 表示模等于 r 的复数有无穷多,且均在以原点为圆心,模长 r 的半径的圆周上.因而复数与模的对应是多对一的关系.

以 x 轴的正半轴为始边、向量 $\overrightarrow{OZ}$ 所在射线为终边的角 θ 叫做复数 $z=a+bi$ 的辐角.不等于零的复数 $a+bi$ 的辐角有无限多个相差 2π 的值.适合于 $0\leqslant\theta<2\pi$ 的辐角 θ 的值叫做辐角的主值.因而复数与其辐角的对应是一对多,而非零复数与其辐角主值对应是一对一.

5.12.2 复数丰富多彩的性质——变换思想的运用

复数具有丰富多彩的性质和特性.如:

(i) $a+bi=c+di\Leftrightarrow a=c$,且 $b=d(a,b,c,d\in\mathbf{R})$;

(ii) $\bar{z}=z\Leftrightarrow z$ 为实数;

(iii) $z\in\mathbf{C},a\in\mathbf{R},a\neq0$ 时,$|z-a|=|z+a|\Leftrightarrow z$ 为纯虚数;

(iv) $\bar{z}=\dfrac{1}{z}\Leftrightarrow|z|=1$;

(v) $\bar{z}z=|z|^2=|\bar{z}|^2,\cdots$

这些特性为我们解决复数问题提供了"肥沃"的等价转换"土壤".

例1 已知 z_1,z_2 是两个给定的复数,且 $z_1\neq z_2$,它们在复平面上分别对应于点 Z_1 和点 Z_2,如果 z 满足方程 $|z-z_1|-|z-z_2|=0$,那么 z 对应点 Z 的集合是( ).

(A)双曲线 (B)线段 Z_1Z_2 的垂直平分线

(C)椭圆 (D)分别过 Z_1,Z_2 的两条相交直线

解 由题设及前述特性(iii),知应选(B).

例2 求满足 $|z|=1$ 及 $|z+\dfrac{1}{2}|=|z-\dfrac{3}{2}|$ 的复数 z 的集合.

解 由 $|z+\dfrac{1}{2}|=|z-\dfrac{3}{2}|$,有 $|(z-\dfrac{1}{2})+1|=|(z-\dfrac{1}{2})-1|$,又显然 $z-\dfrac{1}{2}\neq0$.则由前述特性(iii)知 $z-\dfrac{1}{2}$ 为纯虚数,从而 z 的实部为 $\dfrac{1}{2}$,又由 $|z|=1$,知 $z=\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

故 z 的集合是 $\{\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\}$.

例3 已知 $z=1+i$,如果 $\dfrac{z^2+az+b}{z^2-z+1}=1-i$,求实数 a,b 的值.

解 由 $z=1+i$,有

$$\frac{z^2+az+b}{z^2-z+1}=\frac{(1+i)^2+a(1+i)+b}{(1+i)^2-(1+i)+1}=\frac{(a+b)+(a+2)i}{i}=(a+2)-(a+b)i$$

由题设条件知 $$(a+2)-(a+b)i=1-i$$

根据复数相等的转换条件,得

$$\begin{cases}a+2=1\\-(a+b)=-1\end{cases}\quad 解得\quad\begin{cases}a=-1\\b=2\end{cases}$$

例4 若 $z\in\mathbf{C},z^2+\dfrac{9}{z^2}$ 为实数,当 $z^2\neq\bar{z}^2$ 时,求复数 z 对应的点 Z 的轨迹方程.

解 因 $z^2+\dfrac{9}{z^2}$ 为实数,则 $z^2+\dfrac{9}{z^2}=\overline{(z^2+\dfrac{9}{z^2})}=\bar{z}^2+\dfrac{9}{\bar{z}^2}$,即 $z^2-\bar{z}^2=9\times\dfrac{z^2-\bar{z}^2}{z^2\bar{z}^2}$.

而 $z^2\neq\bar{z}^2$，则有 $z^2\cdot\bar{z}^2=9$，即 $|z\bar{z}|^2=9$. 故 $|z|^2=3$，即 $|z|=\sqrt{3}$ 为所求.

例 5　已知 z_1,z_2 是复数，且 $z_1\cdot z_2\neq 0$，$A=z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1$，$B=z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2$. 问 A、B 可不可以比较大小？若可以，指明大小关系.

解　由 $B=z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2=|z_1|^2+|z_2|^2$ 为实数，有

$$\bar{A}=\overline{z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1}=\bar{z}_1z_2+\bar{z}_2z_1=A$$

可见 A 也是实数，所以 A,B 可以比较大小. 由

$$A-B=(z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1)-(z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2)=(z_1-z_2)\cdot(\bar{z}_2-\bar{z}_1)=$$
$$-(z_1-z_2)\cdot(\overline{z_1-z_2})=-|z_1-z_2|^2\leqslant 0$$

即 $A\leqslant B$.

例 6　设复数 z_1 和 z_2 满足关系式 $z_1\bar{z}_2+\bar{\alpha}z_1+\alpha\bar{z}_2=0$，其中 α 为不等于 0 的复数.

证明　（Ⅰ）$|z_1+\alpha|\cdot|z_2+\alpha|=|\alpha|^2$；

（Ⅱ）$\dfrac{z_1+\alpha}{z_2+\alpha}=\left|\dfrac{z_1+\alpha}{z_2+\alpha}\right|$.

证明　（Ⅰ）由 $z_1\bar{z}_2+\bar{\alpha}z_1+\alpha\bar{z}_2=0$，有

$$|z_1+\alpha|\cdot|z_2+\alpha|=|z_1+\alpha|\cdot|\overline{z_2+\alpha}|=|(z_1+\alpha)(\bar{z}_2+\bar{\alpha})|=$$
$$|z_1\bar{z}_2+\bar{\alpha}z_1+\alpha\bar{z}_2+\alpha\bar{\alpha}|=|\alpha\bar{\alpha}|=|\alpha|^2$$

（Ⅱ）$\dfrac{z_1+\alpha}{z_2+\alpha}=\dfrac{(z_1+\alpha)(\bar{z}_2+\bar{\alpha})}{(z_2+\alpha)(\bar{z}_2+\bar{\alpha})}=\dfrac{|\alpha|^2}{|z_2+\alpha|^2}=\dfrac{|z_1+\alpha||z_2+\alpha|}{|z_2+\alpha|^2}=\dfrac{|z_1+\alpha|}{|z_2+\alpha|}=\left|\dfrac{z_1+\alpha}{z_2+\alpha}\right|$

例 7　若复数 z_1,z_2,z_3 的模都是 r，求 $\left|\dfrac{z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1}{z_1+z_2+z_3}\right|$ 的值.

解　由 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=r$，有 $z_1\bar{z}_1=z_2\bar{z}_2=z_3\bar{z}_3=r^2$，则

$$\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}=\frac{\bar{z}_1}{z_1\bar{z}_1}+\frac{\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2}+\frac{\bar{z}_3}{z_3\bar{z}_3}=\frac{1}{r^2}(\overline{z_1+z_2+z_3})$$

$$z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1=z_1z_2z_3\cdot\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right)$$

故

$$\left|\frac{z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1}{z_1+z_2+z_3}\right|=|z_1z_2z_3|\cdot\left|\frac{\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}}{z_1+z_2+z_3}\right|=r^3\cdot\frac{1}{r^2}=r$$

5.12.3　处理复数问题的一条有效途径——方程思想的运用

由于复数具有丰富多彩的特性，例如两个复数相等的充要条件是实部、虚部对应相等；共轭复数的诸多等式……. 这些特性为我们把某些复数问题转化为方程(组)问题，或利用方程(组)的有关知识来处理提供了背景，因此，运用方程思想方法来处理复数问题是一条有效的求解复数问题的途径.

(1)利用复数相等得到方程组

例 1　求 i 的立方根.

解　设 $z=x+y\mathrm{i}(x,y\in\mathbf{R})$，则由 $(x+y\mathrm{i})^3=\mathrm{i}$，得

$$x^3-3xy^2+(3x^2y-y^3)\mathrm{i}=\mathrm{i}$$

由复数相等的条件，得

$$\begin{cases} x^3-3xy^2=0 & ① \\ 3x^2y-y^3=1 & ② \end{cases}$$

由①，当 $x=0$ 时代入②，得 $y=-1$；

由①，当 $x=\pm\sqrt{3}y$ 时代入②，得 $y=\frac{1}{2}$.

故 i 的三个立方根为

$$z_1=-\mathrm{i},\quad z_2=\frac{-\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2},\quad z_3=\frac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{2}$$

例 2 已知 $z\in\mathbf{C}$，解方程 $z\cdot\bar{z}-3\mathrm{i}\bar{z}=1+3\mathrm{i}$.

解 设 $z=x+y\mathrm{i}(x,y\in\mathbf{R})$，将其代入原方程得

$$(x+y\mathrm{i})(x-y\mathrm{i})-3\mathrm{i}(x-y\mathrm{i})=1+3\mathrm{i}$$

整理，得
$$x^2+y^2-3y-3x\mathrm{i}=1+3\mathrm{i}$$

由复数相等的条件，得 $\begin{cases} -3x=3 \\ x^2+y^2-3y=1 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$，或 $\begin{cases} x=-1 \\ y=3 \end{cases}$.

故原方程的解为 $z_1=-1, z_2=-1+3\mathrm{i}$.

例 3 复数 z_1,z_2,z_3 的辐角分别为 α,β,γ，又 $|z_1|=1,|z_2|=k,|z_3|=2-k$，且 $z_1+z_2+z_3=0$，问 k 各为何值时，$\cos(\beta-\gamma)$ 分别取得最大值和最小值，并求出最大值和最小值.

解 设 $z_1=\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha, z_2=k\cos\beta+\mathrm{i}k\sin\beta, z_3=(2-k)\cos\gamma+\mathrm{i}(2-k)\sin\gamma$.

由 $z_1+z_2+z_3=0$，得方程组

$$\begin{cases} \cos\alpha=(k-2)\cos\gamma-k\cos\beta & ① \\ \sin\alpha=(k-2)\sin\gamma-k\sin\beta & ② \end{cases}$$

由①^2+②^2，得

$$1=(k-2)^2+k^2-2(k-2)\cdot k\cos(\gamma-\beta)$$

由题设可知 $k\neq0, k\neq2$，则

$$\cos(\beta-\gamma)=\frac{(k-2)^2+k^2-1}{2k(k-2)}=1+\frac{3}{2(k-1)^2-2}$$

又由
$$|\cos(\beta-\gamma)|\leqslant1$$

有
$$\left|1+\frac{3}{2(k-1)^2-2}\right|\leqslant1\Leftrightarrow\frac{1}{2}\leqslant k\leqslant\frac{3}{2}$$

故当 $k=1$ 时 $[\cos(\beta-\gamma)]_{\max}=-\frac{1}{2}$；

当 $k=\frac{1}{2}$ 或 $\frac{3}{2}$ 时，$[\cos(\beta-\gamma)]_{\min}=-1$.

(2)取共轭复数得方程(组)

例 4 已知 $z_1,z_2\in\mathbf{C}, z_1\cdot z_2=0$，求证：$z_1,z_2$ 中至少有一个是 0.

解 由
$$z_1\cdot z_2=0 \qquad ①$$

两边取共轭复数，得

$$\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2=0 \qquad ②$$

①×②，得

$$0=z_1z_2\cdot\bar{z}_1\bar{z}_2=(z_1\cdot\bar{z}_1)(z_2\cdot\bar{z}_2)=|z_1|^2\cdot|z_2|^2$$

所以$|z_1|^2=0$或$|z_2|^2=0$，即$z_1=0$或$z_2=0$.

用例4的方法也可以处理例2. 由

$$z\bar{z}-3i\bar{z}=1+3i \qquad ③$$

两边取共轭复数，得

$$\bar{z}z+3iz=1-3i \qquad ④$$

③－④，得$z+\bar{z}=-2$，则$\bar{z}=-2-z$，将其代入式③，得

$$z^2+(2-3i)z+1-3i=0$$

即

$$(z+1)[z+(1-3i)]=0$$

故

$$z_1=-1,z_2=-1+3i$$

(3)灵活运用有关方程的知识

例5 设z_1,z_2是非零复数，且$z_1^2-kz_1z_2+z_2^2=0(k\in\mathbf{R})$，$\bar{z}_2z_1$实部为0(即$\mathrm{Re}(\bar{z}_2z_1)=0$)，求证：$|z_1|=|z_2|$，且$k=0$.

证明 由$\mathrm{Re}(\bar{z}_2z_1)=\mathrm{Re}(|\bar{z}_2|^2\cdot\frac{z_1}{z_2})=|\bar{z}_2|^2\mathrm{Re}(\frac{z_1}{z_2})=0$知$\frac{z_1}{z_2}$为纯虚数，又$k\in\mathbf{R}$，则原方程$(\frac{z_1}{z_2})^2-k\cdot(\frac{z_1}{z_2})+1=0$有两个共轭的纯虚数根$\frac{z_1}{z_2}$和$\overline{(\frac{z_1}{z_2})}$，由韦达定理，得方程组

$$\begin{cases}(\frac{z_1}{z_2})+\overline{(\frac{z_1}{z_2})}=0=k\\(\frac{z_1}{z_2})\cdot\overline{(\frac{z_1}{z_2})}=1\end{cases} \quad 解得 \quad \begin{cases}k=0\\|z_1|^2=|z_2|^2\end{cases}$$

故$|z_1|=|z_2|$，且$k=0$.

5.12.4 借图速解复数题——数形结合思想的运用

复数的几何意义与向量表示，为运用数形结合思想方法奠定了基础. 涉及复数的模、辐角及其最值问题常常借助于图形来解答.

例1 已知复数z的模为1，试求$u=|2iz-5+4i|$的最大值与最小值.

解 由

$$u=|2iz-5+4i|=|2i|\cdot|z-\frac{5}{2i}+2|=2|z-(-2-\frac{5}{2}i)|$$

u表示单位圆$|z|=1$上的点Z与点$Z_1(-2,-\frac{5}{2})$的距离的2倍. 如图139，从图形上，得

$$u_{\max}=2|AC|=2(|OA|+|OC|)=2\left(\sqrt{(-2)^2+(-\frac{5}{2})^2}+1\right)=\sqrt{41}+2$$

$$u_{\min}=2|AB|=2(|OA|-|OB|)=\sqrt{41}-2$$

例2 已知$|z|=1$，且$z^5+z=1$，求z.

解 由$|z|=1$知$|z^5|=|z|^5=1$，由$z^5+z=1$并注意复数加法的几何意义，不难发现z，1，z^5所对应的三点A,B,C及原点O构成平行四边形的四个顶点，如图140，且此平行四边形为菱形，即$\triangle OAB$为正三角形. 故

$$z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \quad 或 \quad z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

例 3 若 $|z_1|=|z_2|=1$，且 $|z_1+z_2|=\sqrt{2}$，求 $|z_1-z_2|$.

解 由复数加法及减法的几何意义知 $|z_1+z_2|$ 和 $|z_1-z_2|$ 是以 $\overrightarrow{OZ_1}$ 和 $\overrightarrow{OZ_2}$ 为两邻边的平行四边形的两条对角线的长，如图 141，由

$$|z_1|=|z_2|=1,\quad |z_1+z_2|=\sqrt{2}$$

知此平行四边形为正方形．故另一条对角线长 $|z_1-z_2|=\sqrt{2}$.

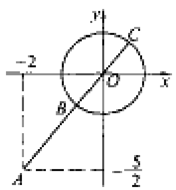


图 139

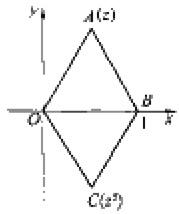


图 140

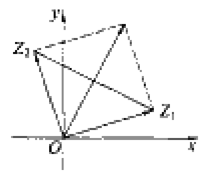


图 141

例 4 设 $z\in\mathbf{C}$，$a\in\mathbf{R}$，且 $az\neq0$，则 $|z-a|=|z+a|\Leftrightarrow z$ 为纯虚数.

证明 在复平面内，设复数 $z,a,-a$ 所对应的点分别为 P,A,B，如图 142，因 $z\neq0$，则点 P 不可能是坐标原点，即线段 AB 的中点.

即 $|z-a|=|z+a|\Leftrightarrow|\overrightarrow{AP}|=|\overrightarrow{BP}|\Leftrightarrow$ 动点 P 的轨迹为线段 AB 的中垂线且除去 AB 的中点 $\Leftrightarrow P$ 点的轨迹为虚轴 $\Leftrightarrow z$ 为纯虚数.

例 5 已知复数满足不等式 $z\bar{z}+\mathrm{i}z-\mathrm{i}\bar{z}\leqslant0$，求 $\arg(z+\mathrm{i})$ 的最大值与最小值.

解 将 $z\bar{z}+\mathrm{i}z-\mathrm{i}\bar{z}\leqslant0$ 化简为 $|z-\mathrm{i}|^2\leqslant1$，即 $|z-\mathrm{i}|\leqslant1$，此式表示复数 z 对应的点 Z 在以 $O_1(0,1)$ 为圆心，1 为半径的圆面上，如图 143 所示，复数 $-\mathrm{i}$ 对应点为 A，则 $|O_1A|=2$，$|O_1Z|=1$，则 $\angle O_1AZ=\frac{\pi}{6}$，即 $\frac{\pi}{3}\leqslant\arg(z+\mathrm{i})\leqslant\frac{2}{3}\pi$，故

$$\arg(z+\mathrm{i})_{\min}=\frac{\pi}{3},\quad \arg(z+\mathrm{i})_{\max}=\frac{2\pi}{3}$$

例 6 若 $z\in\mathbf{C}$，$\arg(z^2-4)=\frac{5}{6}\pi$，$\arg(z^2+4)=\frac{\pi}{3}$，求复数 z.

解 在复平面内，作 $\angle BOx=\frac{\pi}{3}$，作 $\angle AOx$ 的补角 $=\frac{\pi}{6}$（或 $\angle AOx=\frac{5\pi}{6}$），则 $\angle AOB=\frac{\pi}{2}$.

在 x 轴上取点 $E(-4,0)$，取点 $D(4,0)$，设 $\overrightarrow{OC}$ 对应复数 z^2，如图 144，则由复数加法的几何意义，知复数 z^2-4 对应的向量 $\overrightarrow{OA}$ 在以 OE，OC 为邻边的平行四边形的对角线上，且 $|CA|=4$，知复数 z^2+4 对应的向量 $\overrightarrow{OB}$ 在以 OC，OD 为邻边的平行四边形的对角线上，且 $|CB|=4$.

由于在 Rt$\triangle AOB$ 中

$$|AC|=|CB|,\quad |OC|=|AC|=4$$

且
$$\angle xOC=\angle xOB+\angle BOC=2\angle xOB=\frac{2}{3}\pi$$

则
$$z^2=4\left(\cos\frac{2}{3}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{2}{3}\pi\right)$$

故
$$z=\pm2\left(\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}\right)=\pm(1+\sqrt{3}\mathrm{i})$$

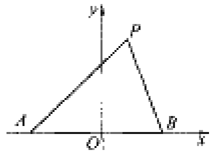


图 142

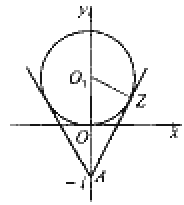


图 143

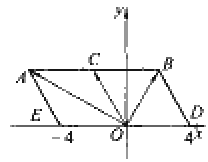


图 144

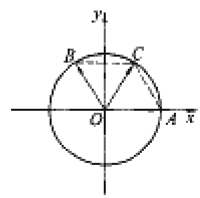


图 145

例 7 已知 $|z_1|=|z_2|=1$，且 $z_1+z_2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，求 z_1,z_2.

解 由题设知 $|z_1+z_2|=1$，又由于 $z_1+z_2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ 的辐角主值为 $\frac{\pi}{3}$，它对应的向量应为复平面单位圆，如图 145 中的 $\overrightarrow{OC}$，由 $|z_1|=|z_2|=1$ 知，OC 又作为菱形的对角线，故 z_1,z_2 对应的点只可能是图中的 A 点或是 B 点，则

$$z_1=1,z_2=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \quad 或 \quad z_2=1,z_1=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

5.12.5 复数帮了三角的忙——横向化归思想的运用

由于复数可以用三角式表示，复数的三角式运算法则及优美的棣莫佛定理为我们提供了复数在三角中的广泛应用的条件.

(1)三角公式的复数证明

例 1 证明：(Ⅰ)$\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha,\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$；

(Ⅱ)$\cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\sin\alpha,\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\cos\alpha$.

证明 (Ⅰ)令 $z=\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha)$，则

$$i\cdot z=(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})[\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha)]=\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)+i\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)$$

又
$$i\cdot z=i\cdot\cos(-\alpha)+i[i\sin(-\alpha)]=\sin\alpha+i\cdot\cos\alpha$$

由复数相等的条件，有

$$\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha,\quad \sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha$$

(Ⅱ)令 $z=\cos\alpha+i\sin\alpha$，则类似于(Ⅰ)而证(略).

例 2 证明：(Ⅰ)$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta\mp\sin\alpha\cdot\sin\beta$；

(Ⅱ)$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\cos\alpha\cdot\sin\beta$.

证明 若令 $z_1=\cos\alpha+i\sin\alpha,z_2=\cos\beta+i\sin\beta$，则

$$z_1\cdot z_2=(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)=\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$$

又
$$z_1\cdot z_2=(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)=$$
$$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta+i(\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta)$$

由复数相等的条件,有

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$$

若令 $z_1=\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha$, $z_2=\cos(-\beta)+\mathrm{i}\sin(-\beta)$,同上可得另两式(略).

例 3 证明:

(Ⅰ)$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$, $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$;

(Ⅱ)$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$, $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$.

证明 (Ⅰ)令 $z=\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha$,则

$$z^2=(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)^2=\cos 2\alpha+\mathrm{i}\sin 2\alpha$$

又 $$z^2=(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\mathrm{i}$$

由复数相等的条件,即

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha,\quad \sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

(Ⅱ)令 $z=\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha$,则

$$z^3=(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)^3=\cos 3\alpha+\mathrm{i}\sin 3\alpha$$

又 $$\begin{aligned}z^3&=(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)^3=\cos^3\alpha+3\cos^2\alpha\cdot(\mathrm{i}\sin\alpha)+3\cdot\cos\alpha\cdot(\mathrm{i}\sin\alpha)^2+(\mathrm{i}\sin\alpha)^3=\\&\cos^3\alpha-3\cos\alpha\cdot\sin^2\alpha+\mathrm{i}(3\cos^2\alpha\cdot\sin\alpha-\sin^3\alpha)=\\&\cos^3\alpha-3\cos\alpha\cdot(1-\cos^2\alpha)+\mathrm{i}[3(1-\sin^2\alpha)\cdot\sin\alpha-\sin^3\alpha]=\\&4\cos^3\alpha-3\cos\alpha+\mathrm{i}(3\sin\alpha-4\sin^3\alpha)\end{aligned}$$

由复数相等的条件即有

$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha,\quad \sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$$

(2)三角问题的复数法求解

例 4 已知 $\sin\alpha+\sin\beta=\frac{1}{4}$, $\cos\alpha+\cos\beta=\frac{1}{3}$,求 $\tan(\alpha+\beta)$的值.

解 设 $z_1=\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha$, $z_2=\cos\beta+\mathrm{i}\sin\beta$,则 $z_1+z_2=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\mathrm{i}$,又 $|z_1|=|z_2|=1$,则有 $z_1\cdot\bar{z}_1=z_2\cdot\bar{z}_2=1$. 则

$$\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2=\overline{z_1+z_2}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\mathrm{i}$$

又$\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}=\frac{z_1+z_2}{z_1z_2}$,从而

$$z_1\cdot z_2=\frac{z_1+z_2}{\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}}=\frac{z_1+z_2}{\overline{z_1+z_2}}=\frac{7}{25}+\frac{24}{25}\mathrm{i}$$

即有 $$\cos(\alpha+\beta)+\mathrm{i}\sin(\alpha+\beta)=\frac{7}{25}+\frac{24}{25}\mathrm{i}$$

故 $$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{24}{7}$$

注 若已知 $\cos\alpha+\cos\beta=a(a\neq0)$, $\sin\alpha+\sin\beta=b(b\neq0$ 且 $a\neq b)$,则可类似于例 4 求得 $\cos(\alpha+\beta)=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$, $\sin(\alpha+\beta)=\frac{2ab}{a^2+b^2}$, $\tan(\alpha+\beta)=\frac{2ab}{a^2-b^2}$.

(3)三角形中的正、余弦定理,射影定理的复数证明

这里,我们用复数统一证明三角形中的射影定理、正弦定理、余弦定理.

如图 146,设△ABC 中的 $BC=a$,$AC=b$,$AB=c$,在复平面中,△ABC 的 AB 边对应的向量在 x 轴正向上,A 点在原点 BC 边,AC 边对应的向量如图所示,则这三个对应的复数为 $\overrightarrow{AB}$:$c(\cos 0+\mathrm{i}\sin 0)$,$\overrightarrow{AC}$:$b(\cos A+\mathrm{i}\sin A)$,$\overrightarrow{BC}$:$a[\cos(\pi-B)+\mathrm{i}\sin(\pi-B)]$.

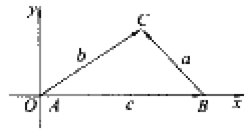


图 146

由复数加法的几何意义,有 $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$,即

$$c(\cos 0+\mathrm{i}\sin 0)+a[\cos(\pi-B)+\mathrm{i}\sin(\pi-B)]=b(\cos A+\mathrm{i}\sin A)$$

由复数相等的条件,由实部相等得射影定理,由虚部相等得正弦定理;再对上式两边取模即得余弦定理.即有 $c\cdot\cos 0+a\cdot\cos(\pi-B)=b\cos A$,即

$$c=b\cos A+a\cdot\cos B,\quad c\cdot\sin 0+a\cdot\sin(\pi-B)=b\sin A$$

即
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$$

$$[c\cdot\cos 0+a\cdot\cos(\pi-B)]^2+[c\sin 0+a\cdot\sin(\pi-B)]^2=(b\cos A)^2+(b\sin A)^2=b^2$$

即
$$b^2=c^2-2ac\cdot\cos B+a^2\cdot\cos^2 B+a^2\sin^2 B=c^2+a^2-2ac\cdot\cos B$$

在△ABC 中,由于字母的轮换性,或移动图中顶点的字母,可证得另两式.

(4)反三角问题的复数法求解

例 5　证明:$\arctan x+\operatorname{arccot} x=\frac{\pi}{2}$.

证明　设 $\arctan x=\alpha$,$\operatorname{arccot} x=\beta$,又令 $z_1=1+x\mathrm{i}$,$z_2=x+\mathrm{i}$,则 α,β 分别是复数 z_1,z_2 的一个辐角,$\alpha+\beta$ 是复数 z_1z_2 的一个辐角.

当 $x\leqslant 0$ 时,$\alpha\in(-\frac{\pi}{2},0]$,$\beta\in[\frac{\pi}{2},\pi)$,故 $\alpha+\beta\in(0,\pi)$.当 $x>0$ 时,$\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$,$\beta\in[0,\frac{\pi}{2})$,故 $\alpha+\beta\in(0,\pi)$.则对任何 $x\in\mathbf{R}$ 都有 $\alpha+\beta\in(0,\pi)$,可见 $\alpha+\beta$ 是复数 z_1z_2 的辐角主值.故

$$\arctan x+\operatorname{arccot} x=\alpha+\beta=\arg(z_1z_2)=\arg[(1+x\mathrm{i})(x+\mathrm{i})]=\arg[(x^2+1)\mathrm{i}]=\frac{\pi}{2}$$

5.12.6　复数在求解代数、平面几何问题中的应用——横向化归思想的运用

复数的代数、几何、向量及三角表示,把复数与实数、三角、平面几何和解析几何有机地联系起来,因而复数在求解代数、三角、平面几何、解析几何问题中有着广泛应用.这里仅介绍复数在求解代数、平面几何问题中的应用.

例 1　设 $a,b,c,d\in\mathbf{R}$,求证:$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(bc+ad)^2$.

证明　设 $z_1=a+b\mathrm{i}$,$z_2=c+d\mathrm{i}$,则

$$z_1\cdot z_2=(a+b\mathrm{i})(c+d\mathrm{i})=(ac-bd)+(bc+ad)\mathrm{i}$$

对上式两边取模,则有

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(bc+ad)^2$$

例 2　已知 $ad\neq bc$,求证:$(a^2+b^2)(c^2+d^2)>(ac+bd)^2$.

证明　设 $z_1=a+b\mathrm{i}$,$z_2=d+c\mathrm{i}(a,b,c,d\in\mathbf{R})$,则

$$z_1z_2=(a+b\mathrm{i})(d+c\mathrm{i})=(ad-bc)+(ac+bd)\mathrm{i}$$

对上式两边取模,则有

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ac-bd)^2+(ac+bd)^2$$

因 $ad\neq bc$，则

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)>(ac+bd)^2$$

例 3 设 $a,b,x,y\in\mathbf{R}^+$，且 $x^2+y^2=k^2(k>0)$，求证：$\sqrt{a^2x^2+b^2y^2}+\sqrt{a^2y^2+b^2x^2}\geqslant k(a+b)$.

证明 设 $z_1=ax+by\mathrm{i}$，$z_2=bx+ay\mathrm{i}$，则

$$\sqrt{a^2x^2+b^2y^2}+\sqrt{a^2y^2+b^2x^2}=|z_1|+|z_2|\geqslant|z_1+z_2|=$$
$$|(a+b)x+(a+b)y\mathrm{i}|=|(a+b)(x+y\mathrm{i})|=k(a+b)$$

例 4 求下列函数的值域：

（Ⅰ）$f(x)=\sqrt{2x^2+24x+80}+\sqrt{2x^2-12x+116}$；

（Ⅱ）$f(x)=|\sqrt{2x^2+24x+80}-\sqrt{2x^2-12x+116}|$.

解 （Ⅰ）因 $f(x)=\sqrt{2}(\sqrt{(x+6)^2+2^2}+\sqrt{(x-3)^2+7^2})$，则可设 $z_1=(x+6)+2\mathrm{i}$，$z_2=(3-x)+7\mathrm{i}$，从而

$$f(x)=y=\sqrt{2}(|z_1|+|z_2|)\geqslant\sqrt{2}|z_1+z_2|=\sqrt{2}|9+9\mathrm{i}|=18$$

由 $\frac{x+6}{2}=\frac{3-x}{7}\Rightarrow x=-4$ 时，$\arg z_1=\arg z_2$，此时等号成立，又 $x\to\infty$，$y\to+\infty$.

故所求值域为 $[18,+\infty)$.

（Ⅱ）可设 $z_1=(x+6)+2\mathrm{i}$，$z_2=(3-x)-7\mathrm{i}$，从而

$$f(x)=y=\sqrt{2}||z_1|-|z_2||\leqslant\sqrt{2}|z_1+z_2|=\sqrt{2}|9-5\mathrm{i}|=2\sqrt{53}$$

由 $\frac{x+6}{2}=\frac{3-x}{-7}\Rightarrow x=-\frac{48}{5}$ 时，$|\arg z_1-\arg z_2|=\pi$，此时等号成立，又令 $|z_1|=|z_2|\Rightarrow x=1$，此时 $y=0$.

故所求函数值域为 $[0,2\sqrt{53}]$.

注 此例运用了《代数》（下册）194 页第 6 题的结论.

例 5 证明：平行四边形对角线长的平方和等于它的四条边长的平方和.

证明 如图 147 建立复平面，设平行四边形 $OABC$ 的两顶点 A，C 对应的复数分别为 z_1，z_2，点 O 为原点，则由复数加、减法的几何意义可知，平行四边形的两条对角线 OB，CA 所对应的复数分别是 z_1+z_2，z_1-z_2. 此时，只需证

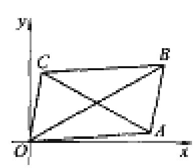


图 147

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2) \qquad (*)$$

由

$$|z_1+z_2|^2=(z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2})=(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)=$$
$$z_1\bar{z}_1+z_2\bar{z}_2+z_1\bar{z}_2+z_1\bar{z}_2=|z_1|^2+|z_2|^2+z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2$$
$$|z_1-z_2|^2=(z_1-z_2)(\overline{z_1-z_2})=(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)=$$
$$|z_1|^2+|z_2|^2-z_1\bar{z}_2-\bar{z}_1z_2$$

两式相加即得式（$*$），故结论获证.

例 6 如图 148，$\triangle ABC$ 和 $\triangle ADE$ 是两个不全等的等腰直角三角形. 现固定 $\triangle ABC$，而将 $\triangle ADE$ 绕点 A 在平面上旋转. 试证：不论 $\triangle ADE$ 旋转到什么位置，线段 EC 上必存在点 M，使 $\triangle BMD$ 为等腰直角三角形.

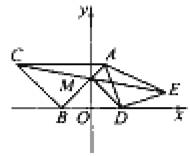


图 148

证明 设 $|BD|=2a(a>0)$，以 BD 的中点 O 为原点，BD 所在直线为实轴建立复平面，则 B,D 对应的复数分别为 $-a,a$.

设 A,C,E 对应的复数分别为 z_1,z_2,z_3，则 $\overrightarrow{DA}$ 对应的复数为 z_1-a，$\overrightarrow{BA}$ 对应的复数为 z_1+a. 由复数乘法的几何意义，得：

$\overrightarrow{DE}$ 对应的复数

$$z_3-a=(-\mathrm{i})\cdot(z_1-a) \tag{①}$$

$\overrightarrow{BC}$ 对应的复数

$$z_2+a=\mathrm{i}\cdot(z_1+a) \tag{②}$$

由①+②，得

$$z_2+z_3=\mathrm{i}(z_1+a)-\mathrm{i}(z_1-a)=2a\mathrm{i}$$

设 EC 的中点为 M，对应的复数为

$$z=\frac{z_2+z_3}{2}=a\mathrm{i}$$

从而 $|BO|=|OM|=|OD|$，且 $|BM|=|DM|$，故 $\triangle BDM$ 为等腰直角三角形.

5.12.7 复数与解析几何问题——化归思想的运用

复数的几何意义把复数与解析几何有机地联系在一起，复数问题可化归为解析几何问题，解析几何问题也可以化归为复数问题.

(1)用复数表示的解析几何问题

例 1 设复数 z 满足等式 $|z-\mathrm{i}|=1$，且 $z\neq0,z\neq2\mathrm{i}$. 又复数 ω 使得 $\frac{\omega}{\omega-2\mathrm{i}}\cdot\frac{z-2\mathrm{i}}{z}$ 为实数. 问：复数 ω 在复平面上所对应的点 Z 的集合是什么图形？并说明理由.

解 设 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbf{R}$，且 $ab\neq0)$，设 $\omega=x+y\mathrm{i}(x,y\in\mathbf{R}$，且 $x=0$ 时 $y\neq2)$，令

$$u=\frac{\omega}{\omega-2\mathrm{i}}\cdot\frac{z-2\mathrm{i}}{z}$$

则
$$u=\frac{x+y\mathrm{i}}{x+(y-2)\mathrm{i}}\cdot\frac{a+(b-2)\mathrm{i}}{a+b\mathrm{i}}=\frac{(x^2+y^2-2y)+2x\mathrm{i}}{x^2+(y-2)^2}\cdot\frac{(a^2+b^2-2b)-2a\mathrm{i}}{a^2+b^2}$$

又由 $|z-\mathrm{i}|=1$，知 $a^2+b^2-2b=0$.

由 u 是实数，知

$$-2a(x^2+y^2-2y)+2x(a^2+b^2-2b)=-2a(x^2+y^2-2y)=0$$

而 $a\neq0$，从而有 $x^2+y^2-2y=0$，即

$$x^2+(y-1)^2=1$$

故 ω 在复平面上所对应的点 Z 的集合是以点 $(0,1)$ 为圆心，1 为半径的圆，除去点 $(0,2)$.

例 2 求复数方程 $z\bar{z}+az+\bar{z}=0$（a 为正的常数）所表示的图形.

解 由 $z\bar{z}+az+\bar{z}=0$，有 $\bar{z}z+a\bar{z}+z=0$，两式相减，得

$$(a-1)(z-\bar{z})=0$$

若 $a=1$，则原方程可变为 $(z+1)(\bar{z}+1)=1$，即 $|z+1|=1$，这是一个以 $(-1,0)$ 为圆心，1为半径的圆.

若 $a\neq1$，则 $z=\bar{z}$，原方程变为 $z^2+(a+1)z=0$，从而有 $z=0$ 或 $z=-(a+1)$. 此时表示原点 $(0,0)$ 或平行于 y 轴的直线 $x=-(a+1)$.

(2)解析几何问题的复数解法

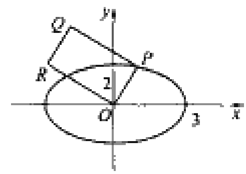


图 149

例 3 设点 P 为椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 上任意一点，以 $|OP|$ 为边长作矩形 $OPQR$，如图 149，使 $|OR|=2|OP|$，求动点 R 的轨迹.

解法 1 由椭圆方程 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 知 $a=3,b=2,c=\sqrt{5}$，其复数形式为

$$|z+\sqrt{5}|+|z-\sqrt{5}|=6 \qquad ①$$

其中 z 对应动点 P. 设动点 R 对应于复数 z'，则有 $z'=z\cdot2i$（$OPQR$ 字母按逆时针方向排列），于是将 $z=\frac{z'}{2i}$ 代入式①，得

$$\left|\frac{z'}{2i}+\sqrt{5}\right|+\left|\frac{z'}{2i}-\sqrt{5}\right|=6$$

整理，得

$$|z'+2\sqrt{5}i|+|z'-2\sqrt{5}i|=12$$

故动点 R 的轨迹是以原点为中心，焦点为 $(0,\pm2\sqrt{5})$，且长轴长为 12 的椭圆.

解法 2 设椭圆的参数方程为

$$\begin{cases}x=3\cos\theta\\ y=2\sin\theta\end{cases}\quad(\theta\text{ 为参数})$$

则 $\overrightarrow{OP}$ 对应于复数 $3\cos\theta+i\cdot2\sin\theta$，从而 $\overrightarrow{OR}$ 对应的复数为

$$(3\cos\theta+i\cdot2\sin\theta)\cdot2i=-4\sin\theta+i\cdot6\cos\theta$$

设动点 $R(x,y)$，则它的参数方程为

$$\begin{cases}x=-4\sin\theta\\ y=6\cos\theta\end{cases}\quad(\theta\text{ 为参数})$$

消去参数 θ，得 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1$.

故动点 R 的轨迹是以原点为中心，焦点在 y 轴，长、短半轴长分别为 6、4 的椭圆.

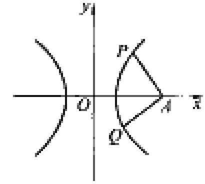


图 150

例 4 设 Q 为双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 上一个动点，以 $A(3a,0)$ 为定点将 AQ 沿顺时针方向旋转 $\frac{\pi}{2}$ 到 AP，求点 P 的轨迹方程.

解 如图 150，设 Q,P,A 点所对应的复数分别为

$$z_Q=x_0+y_0i,\quad z_P=x+yi,\quad z_A=3a(x_0,y_0,x,y\in\mathbf{R})$$

则向量 $\overrightarrow{AP}$ 对应的复数 $\overrightarrow{z_{AP}}=x-3a+yi$，向量 $\overrightarrow{AQ}$ 对应的复数 $\overrightarrow{z_{AQ}}=x_0-3a+y_0i$. 由于向量 $\overrightarrow{AQ}$ 绕定点 A 按顺时针方向旋转 $\frac{\pi}{2}$ 而得到 $\overrightarrow{AP}$，从而 $\overrightarrow{z_{AQ}}\cdot(-i)=\overrightarrow{z_{AP}}$，即

$$(x_0-3a+y_0\mathrm{i})(-\mathrm{i})=x-3a+y\mathrm{i}$$

由复数相等的条件，得$\begin{cases}x_0=3a-y\\y_0=x-3a\end{cases}$.

而点 $Q(x_0,y_0)$在已知双曲线上，可知点 P 的轨迹方程为

$$\frac{(y-3a)^2}{a^2}-\frac{(x-3a)^2}{b^2}=1$$

注　此例也可类似于例 3，设双曲线的参数方程$\begin{cases}x=a\sec\theta\\y=b\tan\theta\end{cases}$（$\theta$ 为参数），运用复数方法简捷求解.

从上述两例可以看出，在解析几何问题中，凡涉及旋转特殊角度或图形中有特殊角度的几何图形的问题，运用复数法求解是很简捷的.

思考题

1. 试证：如果 a,b,c 为正数，那么$\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$，当且仅当 $a=b=c$ 时上式取等号.

2. 求 $\sin^2 10°+\cos^2 40°+\sin 10°\cos^2 40°$的值.

3. 求 $\cos 72°-\cos 36°$的值.

4. 求 $\cos 40°\cos 80°+\cos 80°\cos 160°+\cos 160°\cos 40°$的值.

5. 有一个长方体，它的三个面的对角线长分别是 a,b,c，求它的对角线的长.

6. 在四面体 $SABC$ 中，已知 $SA=BC=a$，$SC=AB=b$，$SB=AC=c$，求此四面体的体积.

7. 直线 l 过抛物线 $y^2=2px(p\neq 0)$的焦点，并且与抛物线相交于 $A(x_1,y_1)$和 $B(x_2,y_2)$两点. 求证：对于抛物线的任意给定的一条弦 CD，直线 l 不是 CD 的垂直平分线.

8. 有一圆与直线 $2x-y+5=0$ 相切于点 $M(-2,1)$，且过点 $N(3,2)$，求此圆的方程.

9. 已知一椭圆的离心率为 $e=\frac{2}{5}\sqrt{5}$，过点$(1,0)$且与直线 $l:2x-y+3=0$ 相切于点 $P(-\frac{2}{3},\frac{5}{3})$，长轴平行于 y 轴，求此椭圆方程.

10. 求过点 $A(0,3)$，$B(3,4)$，$C(1,0)$，且切直线 $l:2x+y-1=0$ 于定点 $P(0,1)$的二次曲线方程.

11. 已知参数方程$\begin{cases}x=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^t+\mathrm{e}^{-t})\cdot\cos\theta\\y=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^t-\mathrm{e}^{-t})\cdot\sin\theta\end{cases}$

（Ⅰ）当 t 为常数时，方程表示什么曲线？

（Ⅱ）当 θ 为常数时，方程表示什么曲线？

12. 设 S_n,T_n 分别为两个等差数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的前 n 项的和，且$\frac{S_n}{T_n}=f(n)$，求证：

（Ⅰ）$\frac{a_n}{b_n}=f(2n-1)$；

（Ⅱ）$\frac{a_n+a_{n+1}}{b_n+b_{n+1}}=f(2n)$.

13. 求方程 $z^2+(a+bi)z+c+di=0(a,b,c,d\in\mathbf{R})$ 有实根的充要条件.

14. 设 $a\geqslant 0$,在复数集 $\mathbf{C}$ 中,解方程 $z^2+2|z|=a$.

15. 已知 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,求证:$\frac{(a+1)^3}{b}+\frac{(b+1)^3}{c}+\frac{(c+1)^3}{a}\geqslant\frac{81}{4}$.

16. 设 $\{a_n\}$ 是集合 $\{2^s+2^t|0\leqslant s<t$,且 $s,t\in\mathbf{Z}\}$ 中所有的数从小到大排列成的数列,即 $a_1=3,a_2=5,a_3=6,a_4=9,a_5=10,a_6=12,\cdots$ 将数式 $\{a_n\}$ 各项按照上小下大,左小右大的原则写成如下的三角形数表.

$$\begin{array}{c}3\\5\quad 6\\9\quad 10\quad 12\\\cdots\cdots\end{array}$$

(Ⅰ)写出这个三角形数表的第四行、第五行各数;

(Ⅱ)求 a_{100}.

思考题参考解答

1. **证法 1**　因 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,有

$$a+b\geqslant 2\sqrt{ab},\quad c+\sqrt[3]{abc}\geqslant 2\sqrt{c\cdot\sqrt[3]{abc}}=2\sqrt[6]{abc^4}$$

$$a+b+c+\sqrt[3]{abc}\geqslant 2\sqrt{ab}+2\sqrt[6]{abc^4}=2\sqrt[6]{ab}(\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{c^2})\geqslant$$

$$2\sqrt[6]{ab}\cdot 2\sqrt{\sqrt[3]{ab}\cdot\sqrt[3]{c^2}}=4\sqrt[3]{abc}$$

故 $a+b+c\geqslant 3\sqrt[3]{abc}$,即 $\frac{a+b+c}{3}\geqslant 3\sqrt[3]{abc}$,其中等号当且仅当 $a=b,c=\sqrt[3]{abc}$,且 $\sqrt[3]{ab}=\sqrt[3]{c^2}$,即 $a=b=c$ 时成立.

证法 2　设 $A=\frac{a+b+c}{3}$.由 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$,得 $A>0$,且 $a+b+c=3A$,于是

$$A=\frac{3A+A}{4}=\frac{a+b+c+A}{4}=\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}+\frac{c+A}{2}\right)\geqslant$$

$$\frac{1}{2}(\sqrt{ab}+\sqrt{cA})\geqslant\sqrt{\sqrt{ab}\cdot\sqrt{cA}}=\sqrt[4]{abcA}$$

则 $A^4\geqslant abcA$,$A\geqslant\sqrt[3]{abc}$,即 $\frac{a+b+c}{3}\geqslant\sqrt[3]{abc}$.其中等号当且仅当 $a=b,c=A$,且 $\sqrt{ab}=\sqrt{cA}$,即 $a=b=c$ 时成立.

2. 设

$$x=\sin^2 10°+\sin^2 50°+\sin 10°\sin 50° \qquad ①$$

$$y=\cos^2 10°+\cos^2 50°-\cos 10°\cos 50° \qquad ②$$

由①+②,得

$$x+y=2-\cos 60°=\frac{3}{2} \qquad ③$$

由①-②,得

$$x-y=-\cos 20°-\cos 100°+\cos(10°-50°)=-\cos 40°+\cos 40°=0 \qquad ④$$

解由③,④组成的方程组,得

$$\sin^2 10° + \cos^2 40° + \sin 10° \cos 40° = x = \frac{3}{4}$$

3. 设 $x = \cos 72°$，$y = \cos 36° = -\cos 144°$. 利用倍角公式，可得

$$\begin{cases} x = 2y^2 - 1 & ① \\ y = 1 - 2x^2 & ② \end{cases}$$

由①+②，得

$$x + y = -2(x + y)(x - y)$$

因 $x + y = \cos 72° + \cos 36° \neq 0$，则 $x - y = \cos 72° - \cos 36° = -\frac{1}{2}$ 为所求.

4. 设

$$x = \cos 40° \cos 80° + \cos 80° \cos 160° + \cos 160° \cos 40°$$

$$y = \sin 40° \sin 80° + \sin 80° \sin 160° + \sin 160° \sin 40°$$

则

$$x + y = \cos 40° + \cos 80° + \cos 120° = 2\cos 60° \cos 20° - \frac{1}{2} = \cos 20° - \frac{1}{2} \quad ①$$

$$x - y = \cos 120° + \cos 240° + \cos 200° = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -\cos 20° \quad ②$$

解由①、②组成的方程组，得 $x = -\frac{3}{2}$ 为所求.

5. 如图 151，在长方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中，令 $BD = a$，$A_1B = b$，$BC_1 = c$. 设长方体共顶点的三条棱 $AB = x$，$BC = y$，$BB_1 = z$，则所求对角线的长为 $l = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

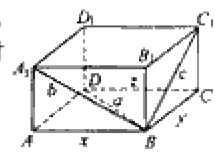


图 151

由题设有 $\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ y^2 + z^2 = c^2 \\ z^2 + x^2 = b^2 \end{cases}$，三式相加，再除以 2 得

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$$

故

$$l = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)}$$

6. 如图 152，在长方体 $AB'CS' - A'BC'S$ 中，显然相对的两个侧面的对角线相等，则有 $AC = BS$，$AS = BC$，$AB = SC$. 于是，这个长方体中的四面体 $SABC$ 是符合题设条件的四面体.

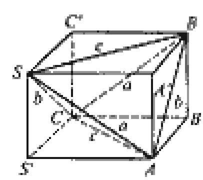


图 152

设这个长方体的长、宽、高分别为 x, y, z，即令 $S'A = x$，$S'C = y$，$S'S = z$，由题设条件有

$$\begin{cases} x^2 + z^2 = a^2 & ① \\ y^2 + z^2 = b^2 & ② \\ x^2 + y^2 = c^2 & ③ \end{cases}$$

(①+②+③)÷2−①得 $x^2 = \frac{1}{2}(a^2 + c^2 - b^2)$.

(①+②+③)÷2−②得 $y^2 = \frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2)$.

(①+②+③)÷2-③得 $z^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2)$.

而

$$V_{长方体}=xyz,\quad V_{四面体SABC}=\frac{1}{3}V_{长方体}$$

故

$$V_{四面体SABC}=\frac{1}{3}xyz=\frac{1}{12}\sqrt{2(a^2+c^2-b^2)(b^2+c^2-a^2)(a^2+b^2-c^2)}$$

注 由于

$$V_{四面体SS'AC}=V_{四面体AB'BC}=V_{四面体A'ABS}=V_{四面体C'SBC}=\frac{1}{3}S_{\triangle SAC}\cdot S'S=\frac{1}{6}xyz$$

从而

$$V_{四面体SAPC}=xyz-4\times\frac{1}{6}xyz=\frac{1}{3}V_{长方体}$$

7. 由于 CD 是抛物线 $y^2=2px$ 的弦，显然 CD 不能平行 x 轴，因此直线 l 可能与 x 轴垂直，也可能与 x 轴不垂直.

(i)若直线 l 与 x 轴垂直，由于 CD 是抛物线 $y^2=2px$ 的弦，则 CD 不能平行 x 轴，因此 l 不垂直 CD，即不是 CD 的垂直平分线；

(ii)若直线 l 不与 x 轴垂直，设它的斜率为 k. 因为它过焦点$(\frac{p}{2},0)$，故 l 的方程为 $y=k(x-\frac{p}{2})(k\neq0)$.

以下分两种情况讨论：

若 l 不垂直 CD，则 l 不是 CD 的垂直平分线；

若 l 垂直 CD，因为点 C,D 在抛物线上，C,D 的坐标可分别设为$(\frac{c^2}{2p},c)$，$(\frac{d^2}{2p},d)$ $(c\neq d)$.

其斜率 $k'=\dfrac{c-d}{\dfrac{c^2}{2p}-\dfrac{d^2}{2p}}=\dfrac{2p}{c+d}$，$CD$ 的中点坐标为$(\frac{c^2+d^2}{4p},\frac{c+d}{2})$.

下面证明 CD 的中点不在直线 l 上：

由 l 与 CD 垂直，有 $k=-\frac{1}{k'}=-\frac{c+d}{2p}$. 将 CD 的中点坐标代人 l 的方程 $y=k(x-\frac{p}{2})(k\neq0)$ 中验证，左端 $y=\frac{1}{2}(c+d)$；

右端 $k(x-\frac{p}{2})=(c+d)[\frac{1}{4}-\frac{1}{8p^2}(c^2+d^2)]$. 而$\frac{1}{8p^2}(c^2+d^2)>0$，知$\frac{1}{4}-\frac{1}{8p^2}(c^2+d^2)<\frac{1}{4}\neq\frac{1}{2}$，且 $c+d\neq0$，从而左端≠右端，即 CD 的中点坐标不满足直线 l 的方程. 故直线 l 不是 CD 的垂直平分线.

8. 将点 M 表示成"点圆"形式$(x+2)^2+(y-1)^2=0$，设所求圆的方程为

$$(x+2)^2+(y-1)^2+\lambda(2x-y+5)=0$$

将点 N 的坐标代人上述方程，求得 $\lambda=-\frac{26}{9}$. 故所求圆的方程为

$$9x^2+9y^2-16x+8y-85=0$$

9. 把点 $P(-\frac{2}{3},\frac{5}{3})$看作离心率为 $e=\frac{2}{5}\sqrt{5}$的椭圆系$(x+\frac{2}{3})^2+\frac{1}{5}(y-\frac{5}{3})^2=k$，当 $k\to$

0时的极限情形（“点椭圆”），则与直线 $l:2x-y+3=0$ 相切于该点的椭圆系，即为过直线 l 与“点椭圆”的公共点的椭圆系方程

$$(x+\frac{2}{3})^2+\frac{1}{5}(y-\frac{5}{3})^2+\lambda(2x-y+3)=0$$

把点(1,0)代入上式，求得 $\lambda=-\frac{2}{3}$. 故所求椭圆方程为 $x^2+\frac{1}{5}y^2=1$.

10. 因直线 AB 的方程为 $y-3=\frac{4-3}{3-0}(x-0)$，即 $x-3y+9=0$，直线 AP 的方程为 $x=0$，直线 BP 的方程为 $y-1=\frac{4-1}{3-0}(x-0)$，即 $x-y+1=0$.

直线 PP 的方程（即切线）为 $2x+y-1=0$. 则可设过点 A,B,P 的二次曲线方程为

$$(x-3y+9)(2x+y-1)+\lambda x\cdot(x-y+1)=0$$

由于曲线过 C 点，把 $C(1,0)$ 代入上式求得 $\lambda=-5$. 故所求二次曲线方程为

$$x^2+y^2-4x-4y+3=0$$

11. (Ⅰ)当 $t=0$ 时，有 $x=\cos\theta$ 且 $y=0$，它表示以$(-1,0)$和$(1,0)$为端点的一条线段；当 $t\neq0$ 时，消去参数 θ 得椭圆方程

$$\frac{x^2}{[\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})]^2}+\frac{y^2}{[\frac{1}{2}(e^t-e^{-t})]^2}=1$$

(Ⅱ)当 $\theta=2k\pi\pm\frac{\pi}{2}(k\in\mathbf{Z})$时，原方程变为

$$\begin{cases}x=0\\ y=\frac{1}{2}(e^t-e^{-t})\end{cases}\quad 和 \quad\begin{cases}x=0\\ y=-\frac{1}{2}(e^t-e^{-t})\end{cases}$$

它们表示 y 轴；

当 $\theta=k\pi(k\in\mathbf{Z})$时，原方程变为

$$\begin{cases}x=\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})\\ y=0\end{cases}\quad 和 \quad\begin{cases}x=-\frac{1}{2}(e^t+e^{-t})\\ y=0\end{cases}$$

它们表示两条射线，一条以(1,0)为端点且与 x 轴正向重合，另一条以$(-1,0)$为端点且与 x 轴负向重合；

当 $\theta\neq2k\pi+\frac{\pi}{2},\theta\neq k\pi(k\in\mathbf{Z})$时，由原方程消去参数 t 得双曲线方程

$$\frac{x^2}{\cos^2\theta}-\frac{y^2}{\sin^2\theta}=1$$

12. (Ⅰ)设 a_1,b_1 和 d,d' 分别为两等差数列的首项和公差，则

$$\frac{a_n}{b_n}=\frac{a_n+a_n}{b_n+b_n}=\frac{a_1+a_1+2(n-1)d}{b_1+b_1+2(n-1)d'}=\frac{a_1+a_{2n-1}}{b_1+b_{2n-1}}=$$

$$\frac{\frac{1}{2}(2n-1)(a_1+a_{2n-1})}{\frac{1}{2}(2n-1)(b_1+b_{2n-1})}=\frac{S_{2n-1}}{T_{2n-1}}=f(2n-1)$$

(Ⅱ) $\frac{a_n+a_{n+1}}{b_n+b_{n+1}}=\frac{a_1+a_1+(2n-1)d}{b_1+b_1+(2n-1)d'}=\frac{a_1+a_{2n}}{b_1+b_{2n}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot 2n(a_1+a_{2n})}{\frac{1}{2}\cdot 2n(b_1+b_{2n})}=\frac{S_{2n}}{T_{2n}}=f(2n)$

13. 必要条件：若方程有实根 x，则

$$x^2+(a+bi)x+c+di=0\Leftrightarrow(x^2+ax+c)+(bx+d)i=0\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x^2+ax+c=0 & ①\\ bx+d=0 & ②\end{cases}$$

若 $b=0$，由②得 $d=0$，而 $x\in\mathbf{R}$，由①必须 $a^2-4c\geqslant 0$；若 $b\neq 0$，由②得 $x=-\frac{d}{b}$，代入①得

$$d^2-abd+b^2c=0$$

充分条件：反之，若 $b=d=0$，$a^2-4c\geqslant 0$，显然方程有实根.

若 $b\neq 0$，$b^2-abd+b^2c=0$，则 $c=\frac{ad}{b}-\frac{d^2}{b^2}$，代入原方程得

$$z^2+(a+bi)z+\frac{d}{b}(a-\frac{d}{b}+bi)=0\Leftrightarrow(z+\frac{d}{b})[z+(a-\frac{d}{b}+bi)]=0$$

即原方程有实根 $-\frac{d}{b}$.

综上，所给方程有实根的充要条件是

$$b=d=0,a^2-4c\geqslant 0\quad 或\quad b\neq 0,d^2-abd+b^2c=0$$

14. 因 $|z|\in\mathbf{R}$，由条件知 $z^2=a-2|z|\in\mathbf{R}$，知 z 为实数或纯虚数.

若 z 为实数，则 $|z|^2+2|z|-a=0$，解得 $|z|=-1\pm\sqrt{1+a}$，舍去负值，得

$$z=-1+\sqrt{1+a}\quad 或\quad z=1-\sqrt{1+a}$$

若 z 为纯虚数，可设 $z=\pm bi(b>0)$，则有 $b^2-2b+a=0$，解得 $b=1\pm\sqrt{1-a}(0\leqslant a\leqslant 1)$，则 $z=\pm(1\pm\sqrt{1-a})i(0\leqslant a\leqslant 1)$，故

$$z=\pm(-1+\sqrt{1-a})\quad 或\quad z=\pm(1\pm\sqrt{1-a})i(0\leqslant a\leqslant 1)$$

注　此题亦可令 $z=x+yi(x,y\in\mathbf{R})$ 来解.

15. **证法 1**　不等式左边 $\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{(a+1)^3(b+1)^3(c+1)^3}{abc}}=$

$$3\cdot\frac{(a+\frac{1}{2}+\frac{1}{2})(b+\frac{1}{2}+\frac{1}{2})(c+\frac{1}{2}+\frac{1}{2})}{\sqrt[3]{abc}}\geqslant$$

$$3\cdot\frac{3\sqrt[3]{\frac{1}{4}a}\cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{4}b}\cdot 3\sqrt[3]{\frac{1}{4}c}}{\sqrt[3]{abc}}=\frac{81}{4}$$

其中等号当且仅当 $a=b=c=\frac{1}{2}$ 时取得.

证法 2　由　$\frac{(a+1)^3}{b}+\frac{27}{2}b+\frac{27}{4}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{(a+1)^3}{b}\cdot\frac{27}{2}b\cdot\frac{27}{4}}=\frac{27}{2}(a+1)$

有

$$\frac{(a+1)^3}{b}\geqslant\frac{27}{2}(a-b)+\frac{27}{4}$$

同理 $\dfrac{(b+1)^3}{c} \geqslant \dfrac{27}{2}(b-c)+\dfrac{27}{4}$， $\dfrac{(c+1)^3}{a} \geqslant \dfrac{27}{2}(c-a)+\dfrac{27}{4}$

以上三式相加，即证，当且仅当 $a=b=c=\dfrac{1}{2}$时等号成立.

16.(Ⅰ)由数表从上往右下看，上、下行各数成2倍关系；从上往左下看，上至下各行依次增加2,4,8,16.于是第四行为17,18,20,24；第五行为33,34,36,40,48.

(Ⅱ)设 n 为 a_n 的下标.在三角形数表中：

第一行第一个元下标为1；

第二行第一个元下标为$\dfrac{2\cdot(2-1)}{2}+1=2$；

⋮

第 t 行第一个元下标为$\dfrac{t(t-1)}{2}+1$.第 t 行第 s 个元下标为$\dfrac{t(t-1)}{2}+s$，该元等于 2^t+2^{s-1}.

据此判断 a_{100}所在的行：

由 $\dfrac{14\times(14-1)}{2}<100\leqslant\dfrac{15\times(15-1)}{2}$，知 a_{100} 在三角形数表第14行，由 $100=\dfrac{14\times(14-1)}{2}+9$ 知 a_{100}是14行第9个元.故 $a_{100}=2^{14}+2^{9-1}=16\ 640$ 为所求.

参考文献

[1] G·波利亚.数学与猜想[M].北京:科学出版社,1984.
[2] G·波利亚.怎样解题[M].北京:科学出版社,1982.
[3] 徐利治.数学方法论选讲[M].武汉:华中理工大学出版社,1983.
[4] M·克莱因.古今数学思想[M].上海:上海科学技术出版社,1979.
[5] D·索罗.数学思想方法入门[M].北京:科学出版社,1988.
[6] 布卢姆.教学目标分类学[M].上海:华东师大出版社,1990.
[7] 王仲春,等.数学思维与数学方法论[M].北京:高等教育出版社,1989.
[8] 李铭心,等.中学数学中的数学史[M].海口:南海出版公司,1991.
[9] 李玉琪,等.数学方法论[M].海口:南海出版公司,1991.
[10] 李慧君.初中几何教学[M].长沙:湖南教育出版社,1996.
[11] 贾云山.初中代数教学[M].长沙:湖南教育出版社,1996.
[12] 邱继勇.椭圆的一个基础性定理[J].数学通报,2005(6):30-31.
[13] 戴平等.数学方法与解题研究[M].北京:高等教育出版社,1996.
[14] 陈自强.数学解题思维方法导引[M].长沙:中南工业大学出版社,1995.
[15] 王鸿钧,等.中国古代数学思想方法[M].南京:江苏教育出版社,1989.
[16] 郑观宝."情侣圆锥曲线"及其简单性质[J].中学教研(数学),2006(9):28-29.
[17] 李林,邵玉林.浅谈培养学生数形结合的数学思想[J].数学教学通讯,2003(11):20-21.
[18] 黄加卫.极限思想在数列中的几个"闪光点"[J].中学数学月刊,2005(3):35-40.
[19] 左加林.初中代数的形象教学[M].郑州:河南教育出版社,1991.
[20] 张奠宙,等.现代数学与中学数学[M].上海:上海教育出版社,1990.
[21] 李求来,等.中学数学教学论[M].长沙:湖南师范大学出版社,1992.
[22] 王子兴,等.数学教育学导论[M].桂林:广西师范大学出版社,1996.
[23] 蔡上鹤.数学思想和数学方法[J].中学数学,1997(9):1-4.
[24] 陈捷.进一步提高对数学思想方法的认识[J].数学通报,1994(4):4-7.
[25] 吴大梁,吴大钟."基本数学思想"初探[J].福建中学数学,1988(5,6):2-5.
[26] 叶文章.也谈基本数学思想[J].福建中学数学,1989(3):4-6.
[27] 王光明,张文贵.中学数学思想方法及其教学[J].数学教学研究,1997(1):6-8.
[28] 郭立昌.浅谈加强数学思想方法教学的途径[J].数学通报,1992(6):3-5.
[29] 朱成杰.数学思想方法教学研究的几项新成果[J].数学通报,1996(11)封二-3.
[30] 黄克明.中学数学中的统计思想方法[J].数学通报,1995(10):4-6.
[31] 王永明,等.浅谈中学数学中的关系结构思想[J].数学通报,1989(2):18-21.
[32] 江兴代.初中数学思想方法教学初探[J].中学数学教学,1994(5):3-6.
[33] 罗昭旭,李启嘉.初中数学思想方法的教学目标设计[J].中学数学,1998(1):6-8.

[34] 滕发祥.数学思想方法教学新探[J].数学教学通讯,1993(5):12-14.
[35] 张国良.渗透推理论证培养逻辑思维能力[J].福建中学数学,1993(5):6-7.
[36] 何作周.谈绝对值概念教学中数学思想的渗透[J].中学数学,1995(10)4-5.
[37] 姜达荣.化归思想用于教学设计一例[J].数学教学通讯,1998(4):10.
[38] 单肖天.运用递推思想指导平面几何教学中的归纳、推理[J].数学通报,1994(9):10-12.
[39] 杨永平.运用化归思想探索解题途径[J].数学通报,1994(8):33-36.
[40] 马学芝.对数学思想和方法几个问题的探讨[J].数学通报,1994(7):18-20.
[41] 周建峰.数学领悟能力及其培养[J].中学教研(数学).2005(7):28-30.
[42] 徐有标,刘治平.高考中的数学思想方法[M].北京:龙门书局,2001.
[43] 教育部考试中心.高考数学测量理论与实战[M].北京:高等教育出版社,2005.
[44] 黄如炎.不变性(量)思想的运用[J].中学数学教学,2001(1):17-18.
[45] 卢丽芬.运动变化的思想方法[J].中学数学月刊,2002(2):26-28.
[46] 方秦金.运用系统思维原理证明不等式[J].数学教学研究,2000(2):26-27.
[47] 谢全苗.转化思想在数学解题中的应用[J].中学数学杂志(高中),2006(6):37-39.
[48] 余继光.一道渗透数学思想和教育功能的应用题[J].中学数学教学,1998(1):16-17.

作者出版的相关书籍与发表的相关文章目录

[1] 中学数学思想方法[M].长沙:湖南师范大学出版社,1999,6.
[2] 进行数学思想方法教学应注意的问题[J].中学数学,2000(1):1-4.
[3] 平面的属性与描述[J].数理报(高二),2005(27).
[4] 处理圆锥曲线问题应注意的一个方面[J].数理报(高二),2004(16).
[5] 浅谈弧度制及其应用[J].数理报(高一),2005(27).
[6] 等差数列的两个公式[J].数理报(高一),2004(14).
[7] 可化为等比数列的数列问题[J].数理报(高一),2004(16).
[8] 两道课本习题的研究[J].学习报(高二),2003(20).
[9] 运用放缩法证明不等式[J].学习报(高二),2003(5).
[10] 二元与三元均值不等式的巧用[J].学习报(高二),2003(6).
[11] 一个数学定理的八种几何解释[J].学习报(高二),2003(3).
[12] 从集合的角度看事件与概率[J].学习报(高二),2003(177).
[13] 对事件与概率的深入理解[J].学习报(高二),2003(176).
[14] 二项式定理的应用举例[J].学习报(高二),2003(175).
[15] 从集合的角度看排列组合[J].学习报(高二),2003(174).
[16] 两个原理的理解与运用[J].学习报(高二),2003(173).
[17] 射影法和解析法的配合运用[J].学习报(高二),2003(172).
[18] 平面图形的翻折问题及其求解[J].学习报(高二),2003(171).
[19] 射影法及其应用[J].学习报(高二),2003(168).
[20] 两个平面平行,垂直的判定及性质[J].学习报(高二),2003(167).
[21] 直线和平面所成的角及其求解[J].学习报(高二),2003(166).
[22] 空间直线位置关系的识别与证明[J].学习报(高二),2003(163).
[23] 平面的属性[J].学习报(高二),2003(162).
[24] 圆锥曲线的光学性质及其应用[J].学习报(高二),2002(156).
[25] 从一道例题谈起[J].学习报(高二),2002(153).
[26] 圆锥曲线的焦半径公式及应用[J].学习报(高二),2002(150).
[27] 利用圆锥曲线的定义解题[J].学习报(高二),2002(149).
[28] 圆的各种形式的方程及应用[J].学习报(高二),2002(148).
[29] 简单的线性规划及应用[J].学习报(高二),2002(146).
[30] 直线与直线方程的建立[J].学习报(高二),2002(144).
[31] 实系数一元不等式的统一解法[J].学习报(高二),2002(143).
[32] 不等式$\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}$的证明与应用[J].学习报(高二),2002(142).
[33] 两个不等式的一般形式[J].学习报(高二),2002(141).

[34] 由实数的性质到不等式的性质[J].学习报(高二),2002(140).
[35] 对数学归纳法的深入理解[J].学习报(高二),2001(53).
[36] 从一道习题的结论谈起[J].学习报(高二),2000(51).
[37] 用集合的观点处理充要条件[J].学习报(高二),2000(50).
[38] 解一元不等式的一种方法[J].学习报(高二),2000(48).
[39] 直线系方法[J].学习报(高二),2000(46).
[40] 构作函数证明不等式[J].学习报(高二),2000(43).
[41] 解析法证题浅谈[J].学习报(高二),2000(41).
[42] 漫谈 $a^{p+q}+b^{p+q}\geq a^pb^q+a^qb^p$ 型不等式[J].学习报(高二),2000(39).
[43] 定比分点公式浅析[J].学习报(高二),2000(37).
[44] 动点到两定点距离的和差最值[J].学习报(高二),2000(25).
[45] 复数帮了三角的忙[J].学习报(高二),2000(24).
[46] 极限状态的巧用[J].学习报(高二),2000(23).
[47] 轨迹方程的求法[J].学习报(高二),2000(22).
[48] 求解有条理,结论纯而全[J].学习报(高二),2000(21).
[49] 复数在求解代数、平面几何问题中的应用[J].学习报(高二),2002(20).
[50] 一道习题的求解[J].学习报(高二),2002(19).
[51] 复数与解析几何[J].学习报(高二),2000(18).
[52] 简化计算的妙方[J].学习报(高二),2000(17).
[53] 宏观调控,微观处理[J].学习报(高二),2000(16).
[54] 设而不求[J].学习报(高二),2000(15).
[55] 处理复数问题的一条有效途径[J].学习报(高二),2000(14).
[56] 一串优美的定值性质[J].学习报(高二),2000(13).
[57] 复数丰富多彩的性质与特征[J].学习报(高二),2000(12).
[58] 圆、椭圆、双曲线的定义与三道例题[J].学习报(高二),2000(11).
[59] 借图速解复数题[J].学习报(高二),2000(9).
[60] 圆、椭圆、双曲线的又一统一定义[J].学习报(高二),2000(8).
[61] 对复数概念的深刻认识[J].学习报(高二),2000(7).
[62] 直线方程 $x_0x+y_0y=r^2$ 的几何意义[J].学习报(高二),2000(6).
[63] 直线与圆有公共点的运用[J].学习报(高二),2000(2).
[64] 等差、等比中项的巧用[J].学习报(高二),2000(1).
[65] 数学求和的若干方法[J].学习报(高一),2003(23).
[66] 用归纳法解数列问题[J].学习报(高一),2003(21).
[67] 用函数观点处理等差数列问题[J].学习报(高一),2003(19).
[68] 关于对称问题的求解[J].学习报(高一),2003(13).
[69] 函数的单调区间及单调性的应用[J].学习报(高一),2003(10).
[70] 集合的图形表示及应用[J].学习报(高一),2003(5).
[71] 学习集合应注意的几个问题[J].学习报(高一),2003(3).
[72] 利用正、余弦定理求解数学问题[J].学习报(高一),2003(234).

[73] 平面向量的数量积及应用(二)[J].学习报(高一),2003(232).
[74] 平面向量的数量积及应用(一)[J].学习报(高一),2003(230).
[75] 课本中一道例题的价值[J].学习报(高一),2003(228).
[76] 平面向量的基本定理及应用[J].学习报(高一),2003(226).
[77] 向量概念及加减运算导学[J].学习报(高一),2003(225).
[78] 一道习题及变式的应用[J].学习报(高一),2003(223).
[79] 函数 $y=A\cdot\sin(\omega x+\varphi)$的变换作图与解析式求解[J].学习报(高一),2003(221).
[80] 三角函数的性质及应用[J].学习报(高一),2003(219).
[81] 角的代换与变换[J].学习报(高一),2003(217).
[82] 单位圆的应用举例[J].学习报(高一),2003(216).
[83] 对角的概念的推广与符号表示的深刻认识[J].学习报(高一),2003(214).
[84] 对等比数列的深化认识小议[J].学习报(高一),2002(209).
[85] 对等差数列的深化认识小议[J].学习报(高一),2002(207).
[86] 关于数列一般概念的理解[J].学习报(高一),2002(205).
[87] 指数函数,对数函数的单调性及应用[J].学习报(高一),2002(203).
[88] 反函数的性质及应用[J].学习报(高一),2002(199).
[89] 函数奇偶性的判定与应用[J].学习报(高一),2002(198).
[90] 映射、函数概念的深入把握[J].学习报(高一),2002(196).
[91] 运用集合思想讨论充分条件与必要条件[J].学习报(高一),2002(195).
[92] 逻辑联结词与真假命题的集合语言表示[J].学习报(高一),2002(194).
[93] 反面求解[J].学习报(高一),2002(193).
[94] 注意集合元素的特征[J].学习报(高一),2002(192).
[95] 三角形中的弦函数"平方差"公式[J].学习报(高一),2001(126).
[96] 三角式余弦定理[J].学习报(高一),2001(125).
[97] 从一道习题谈起[J].学习报(高一),2001(105).
[98] 立体几何求解题的规范化表述[J].学习报(高一),2000(103).
[99] 二面角的平面角的求法[J].学习报(高一),2000(101).
[100] 幂函数、指数函数、对数函数的参变量漫谈[J].学习报(高一),2000(99).
[101] 从反函数的定义谈起[J].学习报(高一),2000(97).
[102] 立体几何第一章中的反证法[J].学习报(高一),2000(96).
[103] 线面垂直判定定理的证明[J].学习报(高一),2000(94).
[104] 函数奇偶性的判定[J].学习报(高一),2000(92).
[105] 重视空集的特殊性和重要作用[J].学习报(高一),2000(90).
[106] 公理 3 的三个推论的证明[J].学习报(高一),2000(88).
[107] 立体几何中的几何变换[J].学习报(高一),2000(77).
[108] 余弦定理的几个简单应用[J].学习报(高一),2000(76).
[109] 一种重要的思维方式[J].学习报(高一),2000(75).
[110] 从一道例题的证法谈起[J].学习报(高一),2000(74).
[111] 一种有效的处理途径[J].学习报(高一),2000(73).

[112] 一道三角例题的多种解法[J].学习报(高一),2000(72).
[113] 一种常用的求解方法[J].学习报(高一),2000(71).
[114] 三角中的3倍角公式[J].学习报(高一),2000(70).
[115] 三类角的珠联璧合关系[J].学习报(高一),2000(69).
[116] 几道三角题的巧解[J].学习报(高一),2000(68).
[117] 立几中的"定比分点"公式[J].学习报(高一),2000(67).
[118] 两角和与差的正、余弦公式的几何推导[J].学习报(高一),2000(66).
[119] 弦函数的"平方差"公式[J].学习报(高一),2000(65).
[120] 底面为矩形的棱锥的一个美妙结论[J].学习报(高一),2000(64).
[121] 研究三角函数的重要工具——单位圆[J].学习报(高一),2000(63).
[122] 平行六面体的妙用(二)[J].学习报(高一),2000(61).
[123] 系统观念在立体几何中的应用[J].学习报(高一),2000(60).
[124] $y=A\sin(\omega x+\varphi)$图象的作法[J].学习报(高一),2000(59).
[125] 平行六面体的妙用(一)[J].学习报(高一),2000(58).
[126] 一个值得重视的公式[J].学习报(高一),2000(54).
[127] 诱导公式的新概括[J].学习报(高一),2000(53).

⊙编后语

沈文选先生是我多年的挚友，我又是这套书的策划编辑，所以有必要在这套书即将出版之际，说上两句。

有人说："现在，书籍越来越多，过于垃圾，过于商业，过于功利，过于弱智，无书可读。"

还有人说："从前，出书难，总量少，好书就像沙滩上的鹅卵石一样显而易见，而现在书籍的总量在无限扩张，而佳作却无法迅速膨化，好书便如埋在沙砾里的金粉一样细屑不可寻，一读便上当，看书的机会成本越来越大。"（无书可读——中国图书业的另类观察，侯虹斌《新周刊》，2003，总166期）

但凡事总有例外，摆在我面前的沈文选先生的大作便是一个小概率事件的结果。文如其人，作品即是人品，现在认认真真做学问，老老实实写著作的学者已不多见。沈先生算是其中一位，用书法大师教育家启功给北京师范大学所题的校训"学为人师，行为世范"来写照，恰如其分。沈先生"从一而终"，从教近四十年，除偶有涉及 n 维空间上的单形研究外将全部精力都投入到初等数学的研究中。不可不谓执著，成果也是显著的，称其著作等身并不为过。

目前，国内高校也开始流传美国学界历来的说法"不发表则自毙（Publish or Perish）"。于是大量应景之作选出，但沈先生已近退休，并无此压力，只是想将多年研究做个总结，可算封山之作。所以说这套丛书是无书可读时代的可读之书，选读此书可将读书的机会成本降至无穷小。

这套书非考试之用，所以切不可抱功利之心去读。中国最可怕的事不是大众不读书，而是教师不读书，沈先生的书既是给学生读的，又是给教师读的。2001 年陈丹青在上海《艺术世界》杂志开办专栏时，他采取读者提问他回答的互动方式。有一位读者直截了当地问："你认为在艺术中能够得到什么？"陈丹青答道："得到所谓'艺术'；有时自以为得到了，有时发现并没得到。"（陈丹青．与陈丹青交谈．上海文艺出版社，2007，第 12 页）。读艺术如此读数学也如此，如果非要给自己一个读的理由，可以用一首诗来说服自己，曾有人将古代五言《神童诗》扩展成七言。

古今天子重英豪，学内文章教尔曹。

世上万般皆下品，人间唯有读书高。

沈先生的书涉猎极广，可以说只要对数学感兴趣的人都会开卷有益，可自学，可竞赛，可教学，可欣赏，可把玩，只是不宜远离。米兰·昆德拉在《小说的艺术》中说："缺乏艺术细胞并不可怕，一个人完全可以不读普鲁斯特，不听舒伯特，而生活得很平和。但一个蔑视艺术的人不可能平和地生活。"（米兰·昆德拉．小说的艺术．董强，译．上海译文出版社，2004，第 169 页）将艺术换以数学结论也成立。

本套丛书是旨在提高公众数学素养的书，打个比方说它不是药但是营养素与维生素。缺少它短期似无大碍，长期缺乏必有大害。2007 年 9 月初，法国中小学开学之际，法国总统尼古拉·萨科奇发表了长达 32 页的《致教育者的一封信》，其中他严肃指出：当前法国教育中的普通文化日渐衰退，而专业化学习经常过细、过早。他认为："学者、工程师、技术员不能没有文学、艺术、哲学素养；作家、艺术家、哲学家不能没有科学、技术、数学素养。"

最后我们祝沈老师退休生活愉快，为数学工作了一辈子，教了那么多学生，写了那么多论文和书，你太累了，也该歇歇了。

策划编辑　刘培杰

2008 年 1 月 1 日