

大连理工大学学术研究丛书

docer  
www.docer.com  
在文川网购买古书  
古书书城  
获取电子书

# 线性鲁棒控制的理论与计算

## Theory and Computation of Linear Robust Control

吴志刚◎著



大连理工大学出版社  
Dalian University of Technology Press

大连理工大学学术研究丛书

# 线性鲁棒控制的理论与计算

吴志刚 著

大连理工大学出版社

© 吴志刚 2003

## 图书在版编目(CIP)数据

线性鲁棒控制的理论与计算 / 吴志刚著. —大连: 大连理工大学出版社, 2003.10

大连理工大学学术研究丛书

ISBN 7-5611-2427-9

I. 线… II. 吴… III. 鲁棒控制 IV. TP273

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 086240 号

大连理工大学出版社出版

地址:大连市凌水河 邮政编码:116024

电话:0411-4708842 传真:0411-4701466 邮购:0411-4707961

E-mail: dulp@mail.dlptt.ln.cn URL: http://www.dulp.cn

大连海事大学印刷厂印刷

大连理工大学出版社发行

---

幅面尺寸:140mm×203mm 字数:240千字 印张:9.375 插页:4

印数:1~3 000

2003年10月第1版

2003年10月第1次印刷

---

责任编辑:刘新锋

责任校对:王 纪 毕向阳

封面设计:孙宝福

---

定 价:25.00元

docsriver 文川网  
入驻商家 古籍书城

在文川网搜索古籍书城 获取更多电子书

---

# 序

在鲁棒控制方法中, $H_\infty$ 控制理论是比较成功的体系。 $H_\infty$ 设计方法已经用于解决航空、航天、机械、化工等诸多领域的控制问题,应用领域的需求使得数值方法的重要性日益增加。这与“科学计算已经同理论与实验共同构成当代科学研究三大支柱”的趋势是一致的。

近年来,随着系统控制理论的发展,求解控制问题的算法也日趋成熟,并出现了许多可用于解决工程实际控制系统设计的软件包。但是,由于系统复杂程度和规模的增加,控制系统设计的算法也面临着许多新的挑战。不仅仅是 $H_\infty$ 控制问题,即使是极点配置、LQ控制这样相对经典的问题,其数值求解算法也有重新审视和改进的必要,因此需要从新的角度理解和研究控制系统设计中的计算问题。结构力学与控制理论的相互模拟为此提供了一条新的途径。对偶变量体系的引入改变了以往弹性力学中大量运用半逆凑合法的传统而导向理性的求解方法;反之,基于对偶变量体系的结构力学方法也被用于求解 $H_\infty$ 控制和滤波中的计算问题,而且对于连续和离散系统、有限和无限时间控制问题,其求解方法本质上是统一的,这本书的内容也反映了这一特点。现代控制理论奠基于一对偶变量体系之上,而将应用力学的方法引入到控制理论,则可以使其其中的一些基本问题的求解得到重要推进。

当代科技发展的一个突出特点是不同学科之间的相互渗透,具备多方面良好性能指标的工程系统的设计必然需要不同领域科研人员的合作。智能化材料、智能化结构、智能化系统就充分体现

了这一发展方向,其中控制理论与技术所起的核心作用是不言而喻的。当然,工程系统的设计必然需要通过科学计算得到的结果。因此本书在介绍  $H_\infty$  控制的基本理论的同时,更强调数值求解算法,而这些算法则来源于结构力学。这对于理解不同学科之间的联系和自觉地综合运用各学科的知识进行系统的分析和设计是有益的。

控制理论还有分散控制、系统参数识别、自适应系统等方面的课题。对此,学科相互间的渗透融合、新的方法论将会有更大的意义。本书也是学科渗透和新方法论方面的产物。同时也表明在这方面控制理论的发展还留有很大的空间。



2003年8月

---

## 前 言

作者 1998 年 9 月到大连理工大学博士后流动站工作,在钟万勰院士的指导下开始  $H_\infty$  控制理论及控制系统设计算法等方面的研究工作。本书就是以此期间的研究报告为基础加以充实和整理完成的。

系统的鲁棒性始终是反馈控制系统设计的核心问题之一。作为目前解决鲁棒控制问题比较完善的理论体系, $H_\infty$  控制理论的实际应用还需要辅之以方便可靠的数值求解方法,以 MATLAB 工具箱为代表的控制系统 CAD 软件中集成了诸多的算法,提供了相当强大的控制系统分析与设计功能。但是,目前仍然有一些基本的计算问题需要进一步研究,如复杂大系统控制问题,有限时间控制问题等,而对已有的方法也有重新认识的必要。作者认为,研究和解决同一个问题可以有不同的方法,而方法的不同则源于对问题本质不同角度和程度的理解与认识, $H_\infty$  控制系统设计中的计算问题也是如此。

结构力学与最优控制的模拟理论为理解与研究控制问题提供了一条新的途径,本书以这一理论多年来的研究成果为基础,力求发展形式统一的  $H_\infty$  系统设计算法。书中分别介绍了离散系统  $H_\infty$  控制和滤波问题、连续系统  $H_\infty$  控制和滤波问题的基本理论,并通过建立  $H_\infty$  控制与滤波系统的最优  $H_\infty$  范数、Hamilton 系统特征值、两类变量广义 Rayleigh 商三者之间的联系,阐述了  $H_\infty$  优化设计问题的新内涵。以此为基础,介绍了概念清晰、形式统一的求解  $H_\infty$  设计问题的数值方法。当然,限于作者的水平,在基于新的理

论研究解决问题的过程中难免会出现一些不恰当乃至不正确的方法和结论,在此诚恳地希望各位同行给予批评和指正。

作者希望在此表达对导师钟万勰院士真诚的感谢。作者到大连理工大学工作以来,钟万勰院士在学术研究中不断给予作者及时的指导和帮助,使作者能够尽快在新的领域起步。钟万勰院士审阅了本书的初稿,并提出了许多宝贵的修改意见。作者的研究工作还得到了钱令希院士、林家浩教授的关心和指导,在此表示诚挚的谢意。另外,本书第九章是钟万勰院士、高强同学和作者合作的最新研究成果,在此感谢他们同意将此作为本书的一部分。同时还要感谢作者的导师马兴瑞教授和王本利教授,他们培养了作者从事科学研究工作的基本素质,并始终对作者的工作给予关心和帮助。

作者的研究工作得到了中国空间技术研究院、中国博士后科学基金的资助,本书的出版得到了大连市学术专著出版基金、大连理工大学工程力学系以及大连理工大学学术著作出版基金的资助,在此表示诚挚的谢意。

作者同时感谢大连理工大学博士后流动站、大连理工大学工程力学系的各位老师、同学和朋友,作者能够顺利完成博士后期间的研究和本书的写作,与他们对作者及家人生活上的关心和工作上的帮助是分不开的。

吴志刚

2003年8月



---

# 目 录

序

前言

第一章 线性鲁棒控制基础	1
1.1 鲁棒控制的基本问题	2
1.1.1 系统不确定性描述	2
1.1.2 控制系统的鲁棒性	4
1.1.3 基于 $H_\infty$ 性能指标的控制系统设计	5
1.1.4 $H_\infty$ 系统设计中的计算问题	7
1.2 多变量线性系统	9
1.2.1 线性系统模型	10
1.2.2 系统的频率响应	14
1.2.3 系统的零点和极点	15
1.2.4 系统的稳定性、可控性、可观性	17
1.2.5 系统状态观测器	20
1.2.6 信号与系统的范数	24
1.2.7 Lyapunov 方程	26
1.2.8 Riccati 方程	28
1.3 LQG 控制	31
1.3.1 全信息控制	32
1.3.2 Kalman 滤波	33

1.3.3 LQG 控制 .....	34
1.4 变分法基本概念 .....	35
1.5 常微分方程和差分方程特征值问题 .....	40
参考文献 .....	43
<b>第二章 离散系统 <math>H_\infty</math> 全信息控制</b> .....	46
2.1 离散 $H_\infty$ 全信息控制 .....	46
2.2 Hamilton 差分系统特征值 .....	52
2.3 广义 Rayleigh 商 .....	55
2.4 最优 $H_\infty$ 范数计算 .....	59
2.4.1 Wittrick-Williams 特征值计数公式 .....	59
2.4.2 扩展 Wittrick-Williams 特征值计数公式 .....	59
2.4.3 算法描述 .....	62
2.5 算例 .....	64
参考文献 .....	75
<b>第三章 离散系统 <math>H_\infty</math> 滤波</b> .....	77
3.1 离散 $H_\infty$ 滤波 .....	77
3.2 最优 $H_\infty$ 范数与 Hamilton 差分系统特征值 .....	81
3.3 矩阵特征值及广义 Rayleigh 商 .....	84
3.4 最优 $H_\infty$ 范数的计算 .....	88
3.4.1 扩展 Wittrick-Williams 特征值计数公式 .....	88
3.4.2 算法描述 .....	91
3.5 算例 .....	92
参考文献 .....	101
<b>第四章 离散系统 <math>H_\infty</math> 输出反馈控制简介</b> .....	103
4.1 时变系统输出反馈控制 .....	103
4.2 定常系统输出反馈控制 .....	105
4.3 延时反馈控制 .....	107

4.4 即时反馈控制 .....	109
参考文献 .....	110
<b>第五章 连续系统 <math>H_\infty</math> 滤波</b> .....	<b>111</b>
5.1 连续系统 $H_\infty$ 滤波 .....	111
5.2 Hamilton 微分系统特征值 .....	113
5.2.1 Hamilton 微分方程的共轭点 .....	113
5.2.2 Rayleigh 原理 .....	115
5.3 Hamilton 微分方程特征值问题离散化 .....	117
5.3.1 Hamilton 及 Sturm-Liouville 型微分方程 离散化 .....	118
5.3.2 混合能矩阵合并公式及特征值计数公式 .....	120
5.3.3 混合能矩阵的微分方程 .....	123
5.3.4 混合能矩阵计算 .....	124
5.4 最优 $H_\infty$ 范数计算 .....	126
5.4.1 算法描述 .....	127
5.4.2 算例 .....	128
5.5 Riccati 微分方程解的有限逃逸现象 .....	140
5.5.1 有限逃逸条件 .....	141
5.5.2 算例 .....	143
参考文献 .....	146
<b>第六章 <math>H_\infty</math> 滤波微分方程求解</b> .....	<b>148</b>
6.1 定常线性系统 $H_\infty$ 滤波器 .....	148
6.2 混合能矩阵和向量的微分方程 .....	150
6.2.1 混合能矩阵及向量 .....	150
6.2.2 区段混合能矩阵计算 .....	153
6.3 Riccati 微分方程和滤波微分方程的精细积分 .....	156
6.3.1 Riccati 方程精细积分 .....	156

6.3.2	滤波微分方程精细积分 .....	157
6.4	算法与算例 .....	158
6.4.1	算法描述 .....	158
6.4.2	算例 .....	160
	参考文献 .....	166
<b>第七章</b>	<b>连续系统 <math>H_\infty</math> 状态反馈控制</b> .....	<b>168</b>
7.1	$H_\infty$ 状态反馈控制 .....	169
7.2	对偶系统 .....	171
7.3	最优 $H_\infty$ 范数计算及闭环系统微分方程求解 .....	173
7.3.1	最优 $H_\infty$ 范数与广义 Rayleigh 商特征值 .....	173
7.3.2	区段混合能及区段合并 .....	175
7.3.3	最优 $H_\infty$ 范数计算及 Riccati 方程精细积分 .....	177
7.3.4	闭环系统微分方程精细积分 .....	180
7.4	算法与算例 .....	181
7.4.1	算法描述 .....	181
7.4.2	算例 .....	183
	参考文献 .....	192
<b>第八章</b>	<b>连续系统 <math>H_\infty</math> 输出反馈控制</b> .....	<b>194</b>
8.1	$H_\infty$ 输出反馈控制 .....	195
8.1.1	输出反馈控制器存在条件 .....	195
8.1.2	两个特殊的输出反馈控制问题 .....	199
8.2	Riccati 微分方程解的力学意义 .....	200
8.3	算法与算例 .....	206
	参考文献 .....	214
<b>第九章</b>	<b>分散 <math>H_\infty</math> 控制与滤波</b> .....	<b>216</b>
9.1	大系统分散 $H_\infty$ 控制 .....	216
9.2	$H_\infty$ 控制子系统的特征解 .....	220

9.3	特征解的正交归一性、完备性及展开定理·····	224
9.4	分散控制系统最优 $H_\infty$ 范数计算·····	228
9.5	分散控制系统算例·····	232
9.6	分散 $H_\infty$ 滤波·····	236
9.7	$H_\infty$ 滤波子系统特征解·····	241
9.8	分散滤波系统最优 $H_\infty$ 范数计算·····	244
9.9	分散滤波系统算例·····	247
	参考文献·····	251
<b>附录</b>	<b>线性系统最优跟踪问题</b> ·····	<b>254</b>
A.1	LQ 最优跟踪·····	254
A.2	区段混合能·····	256
A.2.1	区段混合能的定义·····	256
A.2.2	区段合并公式·····	258
A.3	Riccati 方程与最优控制律的精细积分·····	259
A.3.1	$\eta$ 区段矩阵计算·····	259
A.3.2	Riccati 方程的精细积分·····	262
A.3.3	向量 $b(t)$ 的精细积分·····	263
A.4	最优跟踪系统响应的精细积分·····	265
A.5	LQ 最优跟踪算例·····	266
A.6	$H_\infty$ 跟踪问题·····	272
	参考文献·····	277

---

# Contents

## Foreword

## Preface

<b>Chapter 1</b>	<b>Essentials of Linear Robust Control</b>	<b>1</b>
1.1	Introduction to Robust Control	2
1.1.1	Uncertainties of Systems	2
1.1.2	Robustness of Control Systems	4
1.1.3	$H_\infty$ Control Systems Design	5
1.1.4	Computational Problems of $H_\infty$ Control	7
1.2	Multivariable Linear Systems	9
1.2.1	Models of Linear Systems	10
1.2.2	Frequency Response of Systems	14
1.2.3	Zeros and Poles of Systems	15
1.2.4	Stability, Controllability and Observability	17
1.2.5	State Observers	20
1.2.6	Norms of Signals and Systems	24
1.2.7	Lyapunov Equations	26
1.2.8	Riccati Equations	28
1.3	LQG Control	31
1.3.1	Full Information Control	32
1.3.2	Kalman Filtering	33
1.3.3	LQG Control	34
1.4	The Calculus of Variations	35

1.5 Eigenvalues of Ordinary Differential and  
 Difference Equations ..... 40  
 References ..... 43

**Chapter 2  $H_\infty$  Full Information Control of Discrete-**

**Time Systems** ..... 46

2.1 Discrete-Time  $H_\infty$  Full Information Control ..... 46

2.2 Eigenvalues of Hamilton Difference Systems ..... 52

2.3 Generalized Rayleigh Quotient ..... 55

2.4 Computation of The Optimal  $H_\infty$  Norm ..... 59

    2.4.1 Wittrick-Williams Eigenvalues  
         Count Formula ..... 59

    2.4.2 Extended Wittrick-Williams Eigenvalues  
         Count Formula ..... 59

    2.4.3 Algorithm ..... 62

2.5 Examples ..... 64

References ..... 75

**Chapter 3  $H_\infty$  Filtering of Discrete-Time Systems** ..... 77

3.1  $H_\infty$  Filtering of Discrete-Time Systems ..... 77

3.2 The Optimal  $H_\infty$  Norm and Eigenvalues of  
 Hamilton Difference Systems ..... 81

3.3 Generalized Matrix Eigenvalue and Generalized  
 Rayleigh Quotient ..... 84

3.4 Computation of Optimal  $H_\infty$  Norm ..... 88

    3.4.1 Extended Wittrick-Williams Eigenvalues  
         Count Formula ..... 88

    3.4.2 Algorithm ..... 91

3.5 Examples ..... 92

References .....	101
<b>Chapter 4 <math>H_\infty</math> Output Feedback Control of Discrete-Time Systems</b> .....	103
4.1 Output Feedback Control of Time Variant Systems .....	103
4.2 Output Feedback Control of Time Invariant Systems .....	105
4.3 Delayed Feedback Control .....	107
4.4 Instantaneous Feedback Control .....	109
References .....	110
<b>Chapter 5 <math>H_\infty</math> Filtering of Continuous-Time Systems</b> .....	111
5.1 $H_\infty$ Filtering of Continuous-Time Systems .....	111
5.2 Eigenvalues of Hamilton Differential Systems .....	113
5.2.1 Conjugate Points of Hamilton Differential Equations .....	113
5.2.2 Rayleigh's Principle .....	115
5.3 Discretization of Eigenvalue Problems of Hamilton Differential Equations .....	117
5.3.1 Discretization of Hamilton and Sturm-Liouville Differential Equations .....	118
5.3.2 Merging of Mixed Energy Matrices and Eigenvalues Count .....	120
5.3.3 Differential Equations of Mixed Energy Matrices .....	123
5.3.4 Computation of Mixed Energy Matrices .....	124
5.4 Computation of The Optimal $H_\infty$ Norm .....	126
5.4.1 Algorithm .....	127



5. 4. 2	Examples .....	128
5. 5	Finite Escape Phenomena of Riccati Differential Equations .....	140
5. 5. 1	Conditions of Finite Escape .....	141
5. 5. 2	Examples .....	143
	References .....	146
<b>Chapter 6</b>	<b>Precise Integration of <math>H_\infty</math> Filtering Equations</b> .....	148
6. 1	$H_\infty$ Filters of Time Invariant Systems .....	148
6. 2	Differential Equations of Mixed Energy Matrices and Vectors .....	150
6. 2. 1	Mixed Energy Matrices and Vectors .....	150
6. 2. 2	Precise Integration of Mixed Energy Matrices .....	153
6. 3	Precise Integration of Riccati Differential Equations and Filtering Equations .....	156
6. 3. 1	Precise Integration of Riccati Equations .....	156
6. 3. 2	Precise Integration of Filtering Equations .....	157
6. 4	Algorithm and Examples .....	158
6. 4. 1	Algorithm .....	158
6. 4. 2	Examples .....	160
	References .....	166
<b>Chapter 7</b>	<b><math>H_\infty</math> State Feedback Control of Continuous-Time Systems</b> .....	168
7. 1	$H_\infty$ State Feedback Control .....	169
7. 2	Adjoint Systems .....	171
7. 3	Computation of The Optimal $H_\infty$ Norm and	

docsriver 文川网  
入驻商家 古籍书城

在文川网搜索古籍书城 获取更多电子书

Integration of Systems State Equations .....	173
7.3.1 The Optimal $H_\infty$ Norm and Eigenvalues of Generalized Rayleigh Quotient .....	173
7.3.2 Mixed Energy and Intervals Merging .....	175
7.3.3 Computation of The Optimal $H_\infty$ Norm and Precise Integration of Riccati Equations .....	177
7.3.4 Precise Integration of Closed Loop Systems State Equations .....	180
7.4 Algorithm and Examples .....	181
7.4.1 Algorithm .....	181
7.4.2 Examples .....	183
References .....	192
<b>Chapter 8 <math>H_\infty</math> Output Feedback Control of Continuous- Time Systems .....</b>	<b>194</b>
8.1 $H_\infty$ Output Feedback Control .....	195
8.1.1 Existence of Output Feedback Controllers .....	195
8.1.2 Two Special Cases of Output Feedback Control .....	199
8.2 Explanations of Solutions of Riccati Equations in Terms of Structural Mechanics .....	200
8.3 Examples .....	206
References .....	214
<b>Chapter 9 Decentralized <math>H_\infty</math> Control and Filtering .....</b>	<b>216</b>
9.1 Decentralized $H_\infty$ Control of Large Scale Systems .....	216
9.2 Eigensolutions of Subsystems $H_\infty$ Control .....	220
9.3 Ortho-normalized Eigensolutions, Completeness	

---

and the Expansion Theorem .....	224
9.4 Optimal $H_\infty$ Norm Computation for Decentralized Control Systems .....	228
9.5 Examples of Decentralized Control .....	232
9.6 Decentralized $H_\infty$ Filtering .....	236
9.7 Eigensolutions of Subsystems $H_\infty$ Filtering .....	241
9.8 Optimal $H_\infty$ Norm Computation for Decentralized Filtering Systems .....	244
9.9 Examples of Decentralized Filtering .....	247
References .....	251
<b>Appendix Optimal Tracking of Linear Systems .....</b>	<b>254</b>
A.1 LQ Optimal Tracking .....	254
A.2 Mixed Energy of Intervals .....	256
A.2.1 Mixed Energy of Intervals .....	256
A.2.2 Merging Equations of Intervals .....	258
A.3 Precise Integration of Riccati Equations and Optimal Control .....	259
A.3.1 Computation of Interval Matrices .....	259
A.3.2 Precise Integration of Riccati Equations .....	262
A.3.3 Precise Integration of the Vector $\mathbf{b}(t)$ .....	263
A.4 Response of Optimal Tracking Systems .....	265
A.5 Examples of LQ Optimal Tracking .....	266
A.6 Tracking Problems in an $H_\infty$ Setting .....	272
References .....	277

---

# 第一章 线性鲁棒控制基础

反馈控制系统的设计中,控制系统的鲁棒性始终是一个核心问题。控制系统的鲁棒性是指系统承受外界扰动及受控对象模型不确定性影响的能力。经典的频率域方法在一定程度上能够比较方便地处理单变量控制系统的鲁棒性问题,但在处理多变量控制系统的分析与综合问题时往往比较困难。工程实际的需要与计算技术的发展促进了控制理论从单变量频率域控制向以状态空间法为标志的多变量控制的发展。以LQG控制为代表的现代线性控制理论可以较好地解决多变量控制系统的分析与综合问题,在某些领域也有成功的应用;但是当受控对象模型存在误差时,LQG控制系统的鲁棒稳定性有可能会很差。这是因为现代控制理论完全依赖于受控对象的精确数学模型,这样设计的控制系统只对数学模型保证预期的性能指标,而设计指标在实际受控对象上能否真正实现则取决于数学模型的精确程度。而实际工程中往往不可避免地存在各种不确定因素,因此受控对象的精确模型几乎是不可能得到的,上述因素在一定程度上限制了这种设计方法的应用。近二十多年来,多变量系统的鲁棒控制问题始终是控制理论与应用领域的一个主要研究内容。在各种鲁棒控制系统设计方法中,20世纪80年代起逐渐发展起来的 $H_\infty$ 控制理论是目前解决鲁棒控制问题比较成功而完善的理论体系,而且已经出版了一些很好的教材与专著<sup>[1~7]</sup>。本书在介绍 $H_\infty$ 控制理论的基本内容的基础上,着重研究系统设计中的计算问题。

为了方便阅读,本章将首先介绍鲁棒控制的基本概念及 $H_\infty$ 控制系统设计的基本思想,还将介绍多变量线性系统分析、LQG

控制、变分法、微分方程和差分方程特征值的基础知识,作为本书后续章节的基础。本章对上述基础知识的介绍主要基于参考文献 1~5,29~33。

## 1.1 鲁棒控制的基本问题

### 1.1.1 系统不确定性描述

面向应用的鲁棒控制理论应当首先提供对系统的不确定性、系统的静态和动态性能及系统鲁棒性的量化描述方法,然后才可以利用相应的优化方法解决系统的控制问题。鲁棒控制系统设计不仅是针对某一个控制对象模型进行的,而且是面向某一个集合的控制对象模型来进行的,所设计的控制系统对属于这个集合的所有控制对象均应该保证稳定性和预定的性能指标。因此鲁棒控制理论首先要研究的是不确定性系统的描述问题,本节简要介绍系统不确定性的描述方法。本节及 1.1.2,1.1.3 的主要内容基于文献 4,5。

以图 1.1 所示的反馈控制系统为例,其中  $P(s)$  为控制对象的

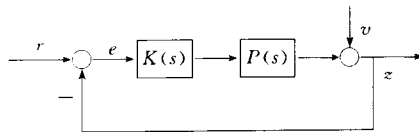


图 1.1 反馈控制系统

传递函数模型, $K(s)$ 为控制器的传递函数模型。通常的控制系统设计方法并不在模型中描述不确定性,这样的 $P(s)$ 称为控制对象的公称模型(标称模型)。鲁棒控制理论则在系统模型建立阶段就考虑这种不确定性,并给出定量描述。不确定性系统的描述包括公称模型和不确定性两个方面。不确定性亦可分为非结构不确定性和结构不确定性两大类。非结构不确定性用于表示结构不明确的

不确定性,例如频率响应位于复平面上某个集合内的不确定性。而结构不确定性则用于表示控制对象和不确定性之间的结构关系非常明确的不确定性,例如控制对象中有限个参数的不确定性。一个不确定性系统的描述包括三个方面的内容:公称模型;描述不确定性的摄动及其与公称模型的关系;摄动的最大值。据此我们可以用一个非结构化集合或结构化集合来描述一个不确定性系统。

现在要考虑图 1.1 中受控对象的模型误差,设误差的形式如图 1.2 中所示,即系统模型具有加法不确定性,则实际控制对象的传递函数模型可以表述为

$$P_A(s) = P(s) + \Delta(s) \quad (1.1.1)$$

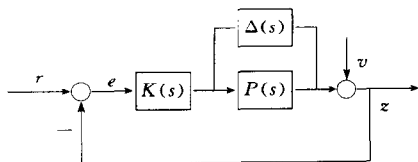


图 1.2 具有加法不确定性的反馈控制系统

其中,  $\Delta(s)$  是模型不确定性的加法摄动,  $s \in \mathbf{C}$ ,  $\mathbf{C}$  表示复数集合。对于单输入单输出系统,可以假设  $\Delta(s)$  满足

$$|\Delta(j\omega)| \leq |W(j\omega)|, \forall \omega \in \mathbf{R} \quad (1.1.2)$$

其中,  $\mathbf{R}$  表示实数集合,而  $W(s)$  是加法摄动  $\Delta(s)$  的最大值。因为这里并没有给出  $\Delta(s)$  的具体结构,所以称之为非结构不确定性。实际的控制对象则属于下面的非结构化集合

$$U_A = \{P(s) + \Delta(s) : |\Delta(j\omega)| \leq |W(j\omega)|, \forall \omega \in \mathbf{R}\} \quad (1.1.3)$$

这个非结构化集合同时描述了公称模型、表示不确定性的摄动及其与公称模型的关系以及摄动的最大值等要素,符合对不确定性系统描述所要求的三个方面的内容。现在介绍一个简单的结构化集合的例子,如果实际控制对象的传递函数模型为

$$P_A(s) = \frac{1}{s^2 + as + 1} \quad (1.1.4)$$

其中,参数  $a$  在某个区间  $[a_{\min}, a_{\max}]$  内变化,那么这个控制对象属于下列结构化集合

$$U_A = \left\{ \frac{1}{s^2 + as + 1}; a \in [a_{\min}, a_{\max}] \right\} \quad (1.1.5)$$

### 1.1.2 控制系统的鲁棒性

稳定性、渐进调节、动态特性和鲁棒性是对反馈控制系统设计的基本要求,以往的控制系统设计理论中大多只强调前三个方面而忽视了对控制系统鲁棒性的要求。下面分别对系统设计中这几个方面的基本要求作简单介绍。

稳定性是控制系统设计的最基本要求,可分为内部稳定性和外部稳定性(输入-输出稳定性)两种。前者是指控制系统从工作点附近任意初始状态出发的轨迹在时间趋于无穷时收敛于工作点,后者则是指系统在有界输入的情况下产生有界的输出,因此是一个比内部稳定性弱的概念。

渐进调节特性反映的是控制系统的稳态性能,对于图 1.1 所示系统,渐进调节是指对于一类给定的参考输入  $r$  和外部扰动  $v$ ,所设计的系统必须能够保证稳态误差为 0,即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} [r(t) - z(t)] = 0 \quad (1.1.6)$$

其中  $e$  是参考输入  $r$  与控制对象输出  $z$  之差。

动态特性是对反馈系统的目标跟踪特性和扰动抑制特性等指标的要求。对系统目标跟踪特性的要求一般可以通过使系统满足阶跃激励下的上升时间、超调量、调节时间等设计指标来达到。对于扰动抑制特性,则是要求扰动的瞬态响应尽可能小。另外,对动态特性的要求也可以用一组频率指标表示,此时对动态特性的要求是对有关函数频率特性的要求。

反馈控制系统的鲁棒性是指系统在某一类特定的不确定性条件下具有使系统的稳定性、渐进调节能力和动态特性保持不变的特性,因此控制系统的鲁棒性包含了鲁棒稳定性、鲁棒渐进调节和



鲁棒动态特性三个方面的内容。鲁棒稳定性是指系统在一组不确定性的作用下仍然能够保证反馈系统的稳定性;鲁棒渐进调节是指在一组不确定性的影响下仍然可以实现控制系统的渐进调节功能。鲁棒动态特性通常也称为灵敏度特性,即要求动态特性不受不确定性的影响。

实际控制问题的不确定性往往是有界的,鲁棒控制系统设计中一般假定不确定性在一个可能的范围内变化,要求所设计的控制器在这个不确定性范围内能使控制系统的稳定性和性能指标均保持不变。因此鲁棒控制系统设计的基本思想是找到不确定性变化的范围,并在这个范围内进行最坏情况下的系统设计。对于实际控制系统设计,确定系统中模型不确定性和外扰不确定性的变化范围是一个非常重要的问题。

### 1.1.3 基于 $H_{\infty}$ 性能指标的控制系统设计

$H_{\infty}$  控制系统设计的主导思想是极小化系统某个特定的闭环响应的峰值<sup>[4][6]</sup>。下面通过一个简单的例子来说明这个问题,仍然考虑图 1.1 中所示的单输入单输出(SISO)系统,该系统的开环和闭环频率特性分别为

$$G_K(j\omega) = P(j\omega)K(j\omega) \quad (1.1.7)$$

$$G_B(j\omega) = \frac{P(j\omega)K(j\omega)}{1+P(j\omega)K(j\omega)} \quad (1.1.8)$$

按照经典的频域控制理论,可以通过设计控制器  $K$  来调整系统的开环频率特性  $G_K$ ,使得闭环频率特性  $G_B$  满足预定的性能指标。如果实际控制对象的频响函数为

$$P(j\omega) = P_0(j\omega) + \Delta P(j\omega) \quad (1.1.9)$$

其中  $P_0(j\omega)$  为设计中所使用的标称模型,  $\Delta P(j\omega)$  表示模型与实际对象之间的误差,那么相应地开环和闭环频率特性也具有误差

$$\Delta G_K(j\omega) = G_K(j\omega) - G_{K_0}(j\omega) \quad (1.1.10a)$$

$$\Delta G_B(j\omega) = G_B(j\omega) - G_{B_0}(j\omega) \quad (1.1.10b)$$

其中开环和闭环频率特性的标称值分别为

$$G_{K_0}(j\omega) = P_0(j\omega)K(j\omega) \quad (1.1.11a)$$

$$G_{B_0}(j\omega) = \frac{P_0(j\omega)K(j\omega)}{1 + P_0(j\omega)K(j\omega)} \quad (1.1.11b)$$

即使在系统设计时没能精确地考虑模型误差引起的开环频率特性的偏差,但如果由此而引起的闭环特性的偏差足够小,那么模型误差对实际系统闭环性能的影响也不会太大。这是因为

$$\frac{\Delta G_B(j\omega)}{G_B(j\omega)} = \frac{1}{1 + P_0(j\omega)K(j\omega)} \frac{\Delta G_K(j\omega)}{G_K(j\omega)} \quad (1.1.12)$$

现在定义干扰  $v$  到输出  $z$  的闭环传递函数为

$$S(s) = \frac{1}{1 + P_0(s)K(s)} \quad (1.1.13)$$

这个传递函数可以描述开环特性的相对偏差  $\Delta G_K/G_K$  到闭环特性相对偏差  $\Delta G_B/G_B$  的增益。通过设计控制器  $K$  使  $S$  的增益足够小,就可以将闭环频率特性的偏差抑制在工程允许的范围内。定义此传递函数的  $H_\infty$  范数为

$$\|S\|_\infty = \sup_{\omega \in K} |S(j\omega)| \quad (1.1.14)$$

如果能使  $S$  的峰值比较小,则  $S$  在所有频率上的值都会比较小,从而可以抑制所有频率成分的干扰。

如果干扰  $v$  的频率成分未知但能量有限,即

$$\|v\|_2^2 = \int_{-\infty}^{\infty} v^2(t) dt \quad (1.1.15)$$

是有限值,其中  $\|v\|_2$  表示信号  $v$  的 2-范数。可以定义从输入  $v$  到输出  $z$  的系统诱导范数(induced norm)为

$$\|S\| = \sup_{\|v\|_2 < \infty} \frac{\|z\|_2}{\|v\|_2} \quad (1.1.16)$$

利用 Parseval 定理可以证明

$$\|S\| = \|S\|_\infty \quad (1.1.17)$$

所以  $H_\infty$  范数  $\|S\|_\infty$  可以描述干扰输入信号的能量到输出信号的

能量之间的最大增益,也就是系统的诱导范数, $H_\infty$ 优化设计就是极小化系统的这个诱导范数。

#### 1.1.4 $H_\infty$ 系统设计中的计算问题

$H_\infty$ 控制理论的发展经历了基于系统传递函数矩阵描述的设计阶段和直接在状态空间描述上进行设计的阶段。根据系统描述方式的不同, $H_\infty$ 控制系统设计方法也被分为频域法和时域法两类。这两类方法都适用于线性定常系统的  $H_\infty$ 优化设计问题,但时变系统、非线性系统的  $H_\infty$ 优化设计则必须以状态空间描述为基础。随着研究的深入和理论的逐渐成熟, $H_\infty$ 设计方法被用于解决航空、航天、机械、化工等诸多领域的控制系统设计问题。应用领域的需求使得数值方法研究的重要性也日益增强,在一些算法已经形成商业软件包的基础上,仍然不断有新的算法发表<sup>[9][10]</sup>。

频域法以系统的传递函数矩阵描述为基础,虽然解的表达形式简单明了,但求解过程繁琐,解法的物理意义不太明确,控制器阶次也较高。时域法则以系统的状态空间描述为基础,通过求解适当的 Riccati(黎卡提)方程实现系统设计,具有设计过程简单、计算量少、控制器阶次较低、结构特性明显等特点<sup>[3][4]</sup>。典型的  $H_\infty$ 控制系统设计软件包如 MATLAB 中的 Robust Control Toolbox(鲁棒控制工具箱)和  $\mu$  Analysis and Synthesis Toolbox( $\mu$ 分析与综合工具箱)就采用了时域设计方法<sup>[11]</sup>。MATLAB 中的 LMI Toolbox(线性矩阵不等式工具箱)提供了通过求解线性矩阵不等式实现系统设计的软件包,是近年来比较引人注目的一种方法<sup>[13]</sup>。由于时域  $H_\infty$ 性能指标的引入和时域法的应用,时变与时不变系统,有限时间及无限时间域的  $H_\infty$ 优化问题都可以在统一的框架下展开研究,而实现系统设计的基础在于 Riccati 方程的求解和  $H_\infty$ 性能指标的计算<sup>[12]</sup>。

首先介绍  $H_\infty$ 性能指标的计算问题,参考文献中所列的二等分法<sup>[14]</sup>、梯度法<sup>[15]</sup>、求解奇异控制最优  $H_\infty$ 性能指标的算法<sup>[16]</sup>,以

及计算离散系统最优  $H_2$  范数的割线法<sup>[10]</sup>等只是众多研究这一问题的文献中的一部分。这些各具特色的方法,实际上体现了对最优  $H_2$  性能指标本质意义不同角度的认识。上述方法都是针对无限时间  $H_2$  控制问题的,对有限时间域控制系统最优  $H_2$  性能指标的算法研究则相对很少。但事实上有限时间  $H_2$  控制不仅具有重要的理论意义<sup>[12]</sup>,而且具有非常重要的工程应用背景。例如现代高性能战斗机要求在几秒钟内完成飞行机动动作<sup>[17]</sup>,必须考虑有限时间内的控制系统设计。文献 17~22 从不同角度提出了有限时间  $H_2$  优化问题的最优性能指标计算方法。文献 17 基于与控制问题相联系的微分方程两端边值问题非平凡解的存在条件,通过迭代计算最优  $H_2$  性能指标;文献 18 则将问题转化为计算非线性最优控制的性能指标,可以用于线性时变系统,这种方法需求解一系列复杂的非线性矩阵微分方程。文献 19~22 基于最优控制与结构力学的模拟关系,指出了最优  $H_2$  性能指标与结构振动问题中 Rayleigh(瑞利)商本征值的联系,并利用精细积分法结合扩展的 Wittrick-Williams 算法计算这一指标。本书以此工作为基础,利用 Hamilton 微分系统和差分系统的特征值理论,分别建立了离散系统和连续系统的最优  $H_2$  性能指标与 Hamilton 差分方程及微分方程边值问题特征值<sup>[23][24]</sup>之间的联系,并系统地介绍了离散和连续系统最优  $H_2$  性能指标计算及 Riccati 方程求解的方法。最后介绍了这一研究方向的最新成果,利用 Hamilton 系统的模态综合法研究分散  $H_2$  控制和  $H_2$  滤波系统设计中的计算问题。

最优  $H_2$  性能指标的计算与 Riccati 方程的求解往往是密切相关的。为实现系统的闭环控制,也要求解 Riccati 代数方程或微分方程。Riccati 方程在科学与工程的许多领域都有应用,对其性质与解法的研究已经有相当长的历史<sup>[25]</sup>。近年来,由于对有限时间控制、时变系统控制、系统瞬态特性等问题研究的需要,对 Riccati 微分方程的解法及解的性质的研究引起越来越多的注意。

在各种求解 Riccati 微分方程的数值方法中,利用方程结构特征的矩阵值算法是颇有特色的一种方法<sup>[26]</sup>。求解 Riccati 微分方程的精细积分方法源自结构力学,也利用了这类方程的特点<sup>[27]</sup>,这一算法中的  $2^N$  类矩阵运算公式不仅可以保证数值解的高精度,而且在积分步长大幅度变化时仍能保持计算结果的一致性,另外在求解方程的同时还可计算闭环系统的状态转移矩阵和可控性矩阵等参数。

虽然  $H_\infty$  控制问题的数值方法研究已经取得丰富的成果,但是仍然有一些基本问题的数值求解方法需要进一步的研究,如有限时间控制、时变系统控制等,现有的一些数值方法也值得重新审视。例如文献 9 中根据实际例题的计算结果指出:不仅对  $H_\infty$  系统设计中的计算问题,即使对于极点配置、LQ 控制这样的经典问题,其求解途径和算法也有更新改进的必要。因此有必要从新的角度理解与研究控制系统设计中的计算问题,而借鉴其他领域的方法无疑是一条新的途径。文献 27 系统地介绍了最优控制与结构力学的模拟理论以及相应的数值方法,文献 28 中则有对这一研究方向上新的研究成果的介绍。研究控制问题的数值方法需要从形式不同的等价数学表达式中选择适于数值计算的表达式,而且由于控制问题的数值求解总是着眼于实际应用,所以算法应当尽可能地反映问题的物理本质,在保证精度的同时尽可能地使计算结果具有相应的物理意义<sup>[9][28]</sup>。

## 1.2 多变量线性系统

线性系统是控制理论中的主要研究对象,也是研究成果最为完整和成熟的系统,其中所建立的概念、原理、方法是学习和深入研究控制理论的基础。在本节和 1.3 节中,主要基于参考文献 1,2,4,5 中的相关内容对多变量线性系统的基本概念和基本知识进行

了介绍,作为理解后续章节内容的基础。

### 1.2.1 线性系统模型

#### A: 连续系统模型

线性时变系统状态空间模型的一般形式为

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}(t) \quad (1.2.1a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \quad (1.2.1b)$$

其中  $\mathbf{x}(t)$  是系统的状态向量,  $\mathbf{u}(t)$  是系统的输入向量,  $\mathbf{y}(t)$  为输出向量。矩阵  $\mathbf{A}(t)$  称为系统矩阵,  $\mathbf{B}(t)$  称为输入矩阵,  $\mathbf{C}(t)$  是输出矩阵,  $\mathbf{D}(t)$  是输入输出耦合矩阵。方程(1.2.1a)称为状态方程, 方程(1.2.1b)称为量测或输出方程。

对方程(1.2.1a)积分,可以得到系统的状态

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_0^t \Phi(t, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (1.2.2)$$

其中,  $\mathbf{x}(t_0)$  为初始时刻的状态,  $\Phi(t, t_0)$  是系统的状态转移矩阵, 并满足下列矩阵微分方程

$$\dot{\Phi}(t, t_0) = \mathbf{A}(t)\Phi(t, t_0), \Phi(t_0, t_0) = \mathbf{I} \quad (1.2.3)$$

系统的输出为

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\Phi(t, t_0)\mathbf{x}(t_0) + \int_0^t \mathbf{C}(t)\Phi(t, \tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau + \mathbf{D}(t)\mathbf{u}(t) \quad (1.2.4)$$

对于线性定常系统

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (1.2.5a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (1.2.5b)$$

式(1.2.2)和式(1.2.4)可以表示为

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t_0) + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (1.2.6)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t_0) + \int_0^t \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (1.2.7)$$

其中

docsriver 文川网  
入驻商家 古籍书城

在文川网搜索古籍书城 获取更多电子书

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2!}A^2t^2 + \frac{1}{3!}A^3t^3 + \dots$$

显然指数矩阵  $e^{At}$  是计算  $\mathbf{x}(t)$  和  $\mathbf{y}(t)$  的关键,其精细计算的方法见文献 27。根据式(1.2.7)可以定义系统的脉冲响应矩阵如下

$$\mathbf{g}(t) = \begin{cases} \mathbf{C}e^{At}\mathbf{B} + \mathbf{D}\delta(t), & t \geq 0 \\ \mathbf{0}, & t < 0 \end{cases} \quad (1.2.8)$$

其中,  $\delta(t)$  是 Dirac 脉冲函数,脉冲响应矩阵  $\mathbf{g}(t)$  的各元素可根据(1.2.7)计算。初始条件  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{0}$  时,令输入向量中各元素为

$$u_k(t) = \begin{cases} \delta(t), & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases} \quad (1.2.9)$$

则有

$$g_{ij}(t) = y_i(t) \quad (1.2.10)$$

由此还可以给出系统输出的另一种表达式

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}e^{At}\mathbf{x}(t_0) + \int_0^t \mathbf{g}(t-\tau)\mathbf{u}(\tau)d\tau = \mathbf{C}e^{At}\mathbf{x}(t_0) + \mathbf{g}(t) \otimes \mathbf{u}(t) \quad (1.2.11)$$

上式中的  $\otimes$  是卷积符号。

需要指出的是,系统的状态空间模型并不是惟一的。一个实际系统的状态空间描述可以有无穷多个,只要将一个系统的状态向量重新进行线性组合就可以得到一组新的状态向量。这个过程实际上就是通过对状态向量基底的变换来形成一个新的状态模型,新模型与原模型之间的联系则是相似变换。在相似变换下,系统的输入输出并不发生变化,因此从输入输出角度来看,存在相似变换关系的不同状态空间模型描述的仍然是同一物理系统。通过相似变换,可以得到具有特定代数结构与数值计算特性的状态模型,从而简化系统的分析与设计<sup>[2]</sup>。

考虑式(1.2.5)所描述的线性定常系统,如果定义一个新的状态变量



$$\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}(t) \quad (1.2.12)$$

其中,  $\mathbf{T}$  是一个常值可逆矩阵, 并将其代入式(1.2.5) 可得

$$\mathbf{T}\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = (\mathbf{AT})\tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{Bu}(t) \quad (1.2.13a)$$

$$\mathbf{y}(t) = (\mathbf{CT})\tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{Du}(t) \quad (1.2.13b)$$

上式左乘  $\mathbf{T}^{-1}$  就可得到系统新的状态空间模型

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT})\tilde{\mathbf{x}}(t) + (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{B})\mathbf{u}(t) \quad (1.2.14a)$$

$$\mathbf{y}(t) = (\mathbf{CT})\tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{Du}(t) \quad (1.2.14b)$$

其状态变量为  $\tilde{\mathbf{x}}$ 。显然, 新模型与原模型之间的关系为

$$\mathbf{A} \Rightarrow \mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}; \mathbf{B} \Rightarrow \mathbf{T}^{-1}\mathbf{B}; \mathbf{C} \Rightarrow \mathbf{CT}; \mathbf{D} \Rightarrow \mathbf{D} \quad (1.2.15)$$

上述变换称为线性系统的相似变换。

比较式(1.2.5) 和式(1.2.14) 可知两者的输入输出关系并没有发生变化, 由此可知系统的输入输出在相似变换下并不发生变化, 所以描述系统输入输出关系的传递函数模型在相似变换下也是不变的。

### B: 离散系统模型

时变系统的离散状态空间模型为

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}(k)\mathbf{u}(k) \quad (1.2.16a)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}(k)\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}(k)\mathbf{u}(k) \quad (1.2.16b)$$

若其中的系数矩阵与  $k$  无关, 则成为定常系统的状态空间模型

$$\mathbf{x}(k+1) = \Phi\mathbf{x}(k) + \mathbf{H}\mathbf{u}(k) \quad (1.2.17a)$$

$$\mathbf{y}(k) = \mathbf{C}\mathbf{x}(k) + \mathbf{D}\mathbf{u}(k) \quad (1.2.17b)$$

将线性连续系统的状态方程化为离散时间状态方程有许多方法, 如欧拉法、零阶保持近似方法、双线性变换等。对于线性定常系统来讲, 零阶保持近似方法是比较普遍的离散化方法, 简述如下:

设系统(1.2.5) 的输入在采样间隔  $\Delta t$  内保持不变, 即

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}(0), t \in [0, \Delta t) \quad (1.2.18)$$

则在采样时刻  $\Delta t$  时的状态可表示为