数理哲学导论

〔英〕罗 素著

商 务 印 书 馆

数理哲学导论

〔英〕罗素著

晏成书译

商务印书馆

1982年·北京

INTRODUCTION TO
MATHEMATICAL PHILOSOPHY

By

Bertrand Russell

1930 Printed in Great Britain by Neill & Co., LTD., Edinburgh.

本书据 1930 年爱丁堡英文本译出

数理哲学导论

〔英〕罗 素 著

晏成书 译

商 务 印 书 馆 出 版

（北京王府井大街 36 号）

新华书店北京发行所发行

民族印刷厂印刷

统一书号：2017 · 283

1982 年 6 月第 1 版	开本 850×1168 1/32
1982 年 6 月北京第 1 次印刷	字数 149 千
印数 17,300 册	印张 6 3/8

定价：0.83 元

www.docsriver.com 定制及广告服务　小飞鱼
更多广告合作及防失联联系方式在电脑端打开链接
http://www.docsriver.com/shop.php?id=3665

译 者 序

这本书是罗素的数理哲学的一本通俗著作。它是罗素继1903年问世的《数学原则》和1910—1913年出版的三大卷皇皇巨著《数学原理》之后所写的一本书。由于前二者分量太大，内容艰深，一般人，甚至专门从事数学原理探讨的人，难以通读，于是罗素写了这本书。在这本书中罗素以他的明白晓畅的笔法陈述了数学原理研究中确定的科学结果。所谓的数学原理研究中确定的科学结果特别包括数理逻辑方面的结果。罗素认为，数理逻辑作为一种方法，有助于传统的哲学问题，特别是数理哲学问题的解决，在这本书中他将数理逻辑的主要结果以一种既不需要数学知识，也不需要运用数学符号能力的形式陈述出来。在这本书中罗素还清楚明确地陈述了他的数理哲学观点。这就是人们通常称做的逻辑主义。谈到罗素的数理哲学或者逻辑主义，经常为人们所征引的就是这本书的一些章节。

在本书中罗素以数学的算术化作为起点。所谓的数学的算术化，就是用自然数定义数学中的其它概念，由自然数的性质导出数学中的所有命题。在肯定数学能归约到自然数的理论后，下一步应该是将自然数的理论再行归约，归约到最小一组概念和前提。这个工作由皮亚诺(Peano)所完成。皮亚诺将全部自然数的理论归约到三个概念：0、数与后继——即在自然数次序中一数的次一数，以及五个基本命题或称公理。然而，一方面皮亚诺的公理不能保证确有适合这些公理的数存在，另一方面皮亚诺的三个基本概念又容许无数不同的解释。究竟什么是数，它是否也能定义？弗芮格

(Frege)致力于解答这个问题。他成功地用逻辑上更基本、更简单的概念，甚至可以说纯逻辑的概念定义数。所谓数就是某一个类的数(项数或基数)，而一个类的数就是所有和这个类有一一对应关系的类的类。然后用一个类的数来定义0与后继，进而定义自然数。不仅皮亚诺的三个基本概念都可以定义，皮亚诺的五个基本命题,其中包括数学归纳法，也都可以由以上的定义推导出来。在自然数中,1是0的后继,2是1的后继，如此等等。自然数形成一个有一定次序的序列。在自然数序列的基础上，罗素逐步地引出有理数、实数和复数。在弗芮格之外,康托(Cantor)从不同的出发点独自一人建立了完整的无穷基数与无穷序数的理论。罗素在本书中把弗芮格的数的概念和康托的理论结合起来介绍。他还介绍了康托的一般的序列的极限和序列的连续性的定义。由于高等数学中几乎每一件东西都依赖于极限概念，极限概念可以说是整个高等数学的基础。为了给数学提供足够的基础,我们还需要一些公理,如选择公理,罗素称之为乘法公理。数学家一直使用乘法公理,然而只是崔梅罗(Zermelo)才第一次使公理有一个清晰明白的形式。没有这个公理,数学中的许多命题就不能证明。罗素在本书中讨论了公理的几个等价形式和公理在无穷基数即自反数（和自己的真子类有一一对应关系的数）证明中的作用。近年来关于选择公理的研究有了很大的进展，但是罗素的讨论仍然有效。为了建立超穷数的理论和实数理论，我们需要整数和分数的无穷类或无穷集合、无穷序列。我们需要假定有无穷多个个体存在的无穷公理。在讨论到个体,个体的类,类的类等等时，我们会很自然地想到把这一切包含在一起的一个最大的类。但是如果假定有一个包含一切的最大类,我们会遇到矛盾,这就是罗素发现的有名的悖论。究竟类是什么，在构造类的过程中应该有些什么限制？这是数理哲学或者说数学基础的根本问题，本书就以此为终结。

以上列举的属于数学原理研究中确定的科学结果。当然，其中有的定义，如有理数、实数的定义，由于受罗素的类型论的影响，显得不必要的复杂，如根据他的定义，分数 $n/1$ 不等于整数 n，今天已不再采用这些定义，另有新的定义。同时也应该指出，我们在上面没有列举的，但是为了得出以上结果所必需的数理逻辑方面的理论，如关系的逻辑理论，其内容也是科学的。书中的演绎理论部分虽然从今天看有不够严格之处，譬如说，未能明确地区分公理、前提与推演规则，但基本上也是正确的。另外，罗素在本书中有许多言论，如最易把握的概念是既不过于复杂也不十分简单的概念，在数学中重要的不是我们所研究的东西的内在性质，而是它们相互之间的关系的逻辑性质等，很富启发性。

所有这些都是我们能从本书获益的。

本书也有错误，其为错误已是公论，这就是罗素的逻辑主义：把数学等同于逻辑，或者说数学是逻辑的延伸。其所以是错误，从乘法公理和无穷公理的性质就可以看出。我们已经指出，许多数学命题的证明和一些数学概念的定义需要这两个公理。尽管这两个公理可以只用逻辑概念来陈述，可是我们决不能说乘法公理和其它的逻辑命题，如 p 与非 p 不能同真等一样，可以只从逻辑判定其真假。至于断定有无穷多个个体存在的无穷公理，更明显地不具有逻辑的性质，其根据只能是物理学。仅仅从以上所说就知道，数学不是逻辑的延伸，不能归约为逻辑。

除了逻辑主义以外，罗素把类看成是逻辑的虚构，因此数也是逻辑的虚构，这样的观点显然也是错误的。如果说抽象的、一般的东西不同于具体的、个别的东西，是我们的感觉知觉所不能得到的，无疑是对的。但是说，抽象的一般的东西，如类或集合是人们思维的虚构，或者说符号的虚构，应该用奥卡姆(Occam)的剃刀剃掉，这种唯名论的思想是不了解个别和一般的辩证关系，不了解

“任何个别（不论怎样）都是一般。任何一般都是个别的（一部分，或一方面，或本质）。”（列宁：《谈谈辩证法问题》）并且，在罗素主张用命题函项来消去类时，他没有想到命题函项所表示的性质、关系和类一样，也是抽象的、一般的。

为了避免悖论，罗素提出了类型论以及还原公理，但是他自己承认，这个理论还不确定，还是混乱的和模糊的。从今天从事数学基础研究的学者来看，也是如此。因之在这里我们也就不必多说。

以上各点这里不及深入分析，略述所见，希望引起读者进一步思考。

目 录

序　　言

这本书原本是想作为一个"导论"，而不是想对它所处理的问 v
题作一个详尽的讨论。有些结果直到现在为止只是对于精通逻辑符号的人才可以应用，但是将它们用一种给初学者最少困难的方式陈述出来，这一点似乎还是可望作到的。关于那些仍然受到严重怀疑的问题，我们已经作了最大的努力以避免武断，在某种程度上这种努力支配了我们所要讨论的题目的选择。数理逻辑的初始部分比起它稍后的部分来没有那样明确地为人知道，但是这些部分至少和后面的部分具有同样的哲学兴趣。在以下诸章中所陈述的许多东西称之为"哲学"是不适当的，尽管它们所涉及的问题包含在哲学中如此之久，以致关于它们还不曾有令人满意的科学存在。例如，无穷与连续的性质就是这样，在早日它们属于哲学，现在却归在数学中。在这个领域中所获得的许多确定的科学结果在严格的意义上或许不能认为是包含在数理哲学中。在知识的边境上有一些问题，关于这些问题至今还不曾得到比较确定的结论，人们很自然地期望数理哲学来处理这些问题。可是，除非我们认识了数学原理中比较科学的部分，对于这些问题的探讨很可能难获结果。所以一本讨论这些部分的书可以自称是一本数理哲学**导论**，虽则，除非它越出了它的范围，它很难声称它所处理的是哲
学的一部分。就某些接触到本书的人看来，它所处理的一部分 vi
知识似乎取消了许多传统哲学，甚至于很大一部分流行于今日的哲学。然而也就是这种情形以及它与尚未解决的问题的关联，数理逻辑与哲学有关。因为这个原因和题目固有的重要性，将数理

逻辑的主要结果在一种既不需要数学知识，也不需要运用数学符号的能力的形式中简单地叙述出来，或许有用。虽然在这里和别处一样，从进一步研究的观点看，方法比结果更重要，但是这种方法在下面这么一本书的框架中不能很好地加以说明。希望一些读者能感到足够的兴趣，继续方法的研究，正是由于方法，数理逻辑可以有助于传统哲学问题的探讨，但是这个题目我们在下面不打算讨论。

B. 罗素

编 者 注

着重分别数理哲学与数学之哲学、认为这本书在现在的丛书* vii
中没有地位的人们可以参看作者自己在序言中关于这一点的声明。作者在那里提议：对哲学的领域作一番调整，将类、连续、无穷这样一些问题从哲学中转移到数学中，以便看出下面的定义和讨论对于“传统哲学”的关系，这个提议不必大家都赞同。但是即便哲学家们不能同意将这些范畴的评论贬低到任何特殊的科学中，无论如何，有一点很重要，就是，这些概念在数学中占据了极其重要的地位，哲学家们应该知道数学科学所赋与它们的精确意义。在另一方面，如果有些数学家觉得这些定义和讨论似乎是一种简单事物的雕琢和小题大做，我们最好从哲学那面提醒他们，这里和别处没有两样，表面的单纯可以隐藏复杂。不论对于哲学家还是数学家，或者如本书的作者那样一身二任的人，这种复杂问题的解决是他们的任务。

* 本书原来收在 J. H. Muirhead 所编的哲学丛书中。——译者

第一章　自然数串 1

数学这门学问当我们从它的最熟悉的部分开始时，可以沿着两个相反的方向进行。比较熟悉的方向是构造的，趋向于渐增的复杂，如：从整数到分数，实数，复数；从加法和乘法到微分与积分，以至更高等的数学。至于另一方向对于我们比较生疏，它是由分析我们所肯定的基本概念和命题，而进入愈来愈高的抽象和逻辑的单纯；取这种方向，我们不问从我们开始所肯定的东西能定义或推演出什么，却追问我们的出发点能从什么更普遍的概念与原理定义或推演出来。研究进行的方向不同是数理哲学的特点，就是这个特点使数理哲学与普通数学大异其趣。但是我们必须了解这区别不在主题内容，而在研究者的思想状况。早期希腊几何学家从埃及人陆地测量的经验规则，得到了能证明这些规则的普遍命题，并且由这些普遍命题达到欧几里得的公理与公设，按照上面的解释，他们确是从事于数理哲学；但如我们在欧几里得几何中所见，一旦达到公理与公设，它们的演绎的运用却属于普通意义的数 2
学。总之，数学与数理哲学之间的区分取决于激发研究的兴趣上，和研究所达到的阶段上；而不在研究所涉及的命题。

这个区别我们还可以另一种方式叙述。在数学中最明显易知的概念，从逻辑上来说，并不是初始的概念；从逻辑演绎的观点看，它们是出现在中途某处的概念。就如最易见的物体是那些既不甚远，也不很近，既不过大，也不太小的物体；同样，最易把握领会的概念是那些既不过于复杂，也不十分简单（我们用逻辑意义上所谓的“简单”）的概念。并且正如我们需要两种工具，望远镜和显微

镜，以扩大我们的视力一样；我们需要两种工具以扩张我们的逻辑能力：一个能引导我们进到高等数学；一个能带领我们追溯我们在数学中所习用、假定的概念和命题的逻辑基础。由于分析我们的普通的数学概念，追究它们的逻辑基础，我们将发现我们获得了新的见识，新的能力，并且由于在这番探讨后，采取新的前进路线，我们可以获得一种方法以达到完全崭新的数学题材。

本书的目的是简单地、不用专门技巧地解释数理哲学，凡初步讨论所难解说的、不确定的或困难的部分，不予涉及。欲求详尽的研讨，可见《数学原理》(《Principia Mathematica》)一书①。本书的讨论只想作为一个引论。

对于今日受过初等教育的人，数学最明显的出发点就是整数串，

1, 2, 3, 4…等等。

3 或许只有稍具数学知识的人才会想到：整数是从 0 而不是从 1 开始的，但是这一点知识程度我们是要假定的，我们要以如下的数串：

$$0, 1, 2, 3, \cdots, n, n+1, \cdots$$

作为我们的出发点。此后当我们谈到“自然数串”时，我们所指的就是这一串数。

仅仅在文明的高级阶段上，我们方能以这一串数作为我们的起点。发现一对鸡、两昼夜都是数 2 的实例，一定需要很多年代，其中所包含的抽象程度确实不易达到。至于 1 是一个数的发现，也必定很困难。说到 0，这更是晚近加入的，希腊人和罗马人没有这个数字。假使我们曾经从事于早期的数理哲学的研究，我们必得从比自然数串不那么抽象的东西入手，而以自然数串作为在我

① Cambridge University Press, vol. i., 1910; vol. ii., 1911; vol. iii., 1913. Whitehead and Russell 著。

们追溯的探讨中所达到的一个阶段。反之，当我们对数学的逻辑基础逐渐熟悉时，我们可以追溯到比现在所达到的更远的地方，那时我们的出发点将是在分析中比自然数还较后的一个阶段。但是在目前，自然数似乎代表数学中最易知、最熟悉的东西。

我们对于自然数虽是熟悉，却并没有了解。什么是“数”，什么是“0”，什么是“1”，很少人严格解释过，更不用说下定义。不难看出，任何0以外的自然数能够从0开始，由重复地加1得到，但是何谓“加1”，何谓“重复地”，它们的意义是什么，我们必须加以定义。这些问题可并不容易解决。直到最近，人们都相信算术的基本概念中至少有一些由于过于简单和基本而不能定义。因为所有被定义的概念是借助于其它概念来定义的，显然，为了有一个作定义的起点，人类知识必须接受一些易明的，没有定义的概念，以此
为满足。至于是否必须有**不能**定义的概念，这一点还不清楚：可能 4
在作定义时，我们由一个定义追溯到在前的一个定义，一直下去，无论我们后退多远，我们总还可以走得更远。另一方面也可能当分析进行得够远时，我们能够达到一些概念，它们实在是简单，因此在逻辑上不容下一种分析的定义。这个问题我们不必解决；为了我们的目的，只须注意，由于人类能力有限，我们所知道的定义必须从某些概念开始，这些概念虽则或许不是永远不能定义，但在当前还不曾定义。

所有传统的纯粹数学，包括解析几何在内，全可以看作是有关自然数的命题所组成。这也就是说，其中的概念可以用自然数来定义，其中的命题可以从自然数的性质推演得出。——当然，在每种情形下，还得加上一些纯逻辑的概念和命题。

很早以前就有人猜测，所有传统的纯粹数学或许都能从自然数推导出来，但是这一点的真正发现，却是非常近的事。从前，毕达哥拉斯相信，不仅数学，就是其它各种事理都能从数演绎出来，

在把数学“算术化”时，他发现一个极严重的困难，那就是不可通约量，特别是正方形的边与对角线不可通约性的存在。如果正方形边长一寸，那么对角线的寸数是 2 的平方根，可是这似乎根本不是一个数。这样引起来的问题只是在我们的时代才被解决，并且只是借助于把算术归约到逻辑才得以**完全**解决，这一点我们将在以下诸章中阐明。至于现在，我们姑且承认数学的算术化。虽然这是一个非常重要的功绩，但是我们不拟详论。

5 在把所有传统的纯粹数学归约到自然数的理论后，逻辑分析中的下一步骤是将这理论本身归约到最小一组前提和未定义的概念，而这理论即从它们演绎出来。这件工作为皮亚诺(Peano)所完成。他证明：除加上一些纯逻辑的概念和命题外，整个自然数的理论能够从三个基本概念和五个基本命题演绎得出。这三个概念和五个命题因而似乎可以代替全部传统的纯粹数学，假使它们能由其它的概念和命题来定义或证明，全部纯粹数学也能。如果我们可以用重量这个词，那么它们的逻辑“重量”等于从自然数的理论演绎出来的整个科学系列；所以假若引用的纯粹逻辑工具没有谬误，那么如果五个基本命题的真实性得到保证，整个系列的真实性也得以肯定。对数学进行分析的工作由于皮亚诺的研究而大获便利。

皮亚诺算术中的三个基本概念是：

0，数，后继。

他以“后继”（successor）指在自然次序中一数的次一数。也就是说，0 的后继是 1，1 的后继是 2，如此类推。至于他所谓“数”乃是指所有自然数所构成的类(class)①。他没有假定我们知道这类中所有的分子，仅假定当我们说这个或那个是一个数时，我们知道

① 在本章中我们用“数”这个字限于这种意义(按，即指包括 0 在内的自然数全体——译者)，以后我们将在更一般的意义上使用这个字。

我们何所指，正如我们不知道所有的个别的人，而当我们说“琼斯是一个人”时，我们知道我们何所指一样。

皮亚诺所肯定的五个基本命题是：

(1) 0 是一个数。

(2) 任何数的后继是一个数。

(3) 没有两个数有相同的后继。

(4) 0 不是任何数的后继。 6

(5) 任何性质，如果 0 有此性质；又如果任一数有此性质，它的后继必定也有此性质；那么所有的数都有此性质。

五个基本命题中的最后一个是数学归纳法原则。关于数学归纳法，以下将详细论述；现在我们提到它，只是因为它出现在皮亚诺的算术分析中。

我们且略加考虑从这三个概念和五个命题如何得出关于自然数的理论。首先，我们定义 1 为“0 的后继”、2 为“1 的后继”，如是继续下去。显然，我们可以用这些定义达到我们想要得到的任何的数，因为，由于(2)，我们所达到的每一个数有一个后继，并且，由于(3)，这个数不可能是任何已经定义的数，因如不然，两个不同的数会有相同的后继；又因为(4)，在这一串后继中，没有一个我们所得到的数会是 0。从而一串后继给与我们一串连续无尽的新数。由于(5)，所有的数都属于这一串数中，这一串数就是从 0 开始，由一个继续一个的后继所构成；这点其实应该分为两点来说明：因为我们知道，(a) 0 属于这一串数，又(b)假如一数 n 属于这一串数，它的后继也是如此，依据数学归纳法，每个数都属于这一串数。

如果我们希望定义两数之和，那么取任一数 m，我们定义 $m+0$ 为 m，$m+(n+1)$ 为 $m+n$ 的后继。由于(5)，不论 n 为何数，这就是 m 与 n 之和的定义。同样，我们能够定义任何两数之积。读者可以很容易地使自己确信，任何普通的初等算术命题都

能为这五个前提所证明，如有任何困难，可参看皮亚诺书中的证明。

现在我们要越过皮亚诺的研究而进入弗芮格(Frege)的探讨，
7 这是件必然的事，我们且思考其所以为必然的理由。我们已知皮亚诺将数学“算术化”做到最后完善的地步，弗芮格则第一个成功地将数学“逻辑化”。他的前辈们证明了一些算术概念对于数学是充分的，他再将这些算术概念归约到逻辑。本章中我们不预备实际陈述弗芮格的数和个别的数的定义，但是我们将说出一些理由，为什么皮亚诺的研究不如它看起来那样的根本，或者简单地说，不够彻底，以致还要有人作进一步的研究。

第一，皮亚诺的三个基本概念——就是“0”，“数”和“后继”——能容许无数不同的解释，所有这些解释都能满足那五个基本命题。下面我们列举几个例子。

(1) 令“0”指 100，而“数”指自然数串中 100 以上的数。依这种解释，所有我们的基本命题，即使是第四个，都可满足。因为：虽则 100 是 99 的后继，然而 99 却不是一个我们当前所谓的“数”。显然，任何其它的数都可以代替这个例子中的 100。

(2) 使“0”具通常的意义，而令“数”指我们通常所谓的“偶数”并且令一数的“后继”指由这数加 2 所得的数。于是“1”将为数二所代替，“2”将为数四所代替，如此等等。“数”串现在成为

$$0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8, \cdots$$

所有皮亚诺的五个前提仍可满足。

(3) 令“0”指数一，“数”指如下的集合

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16} \cdots$$

而所谓一个数的“后继”所指的就是一个数的“一半”。对于这样的一串数，所有皮亚诺的五个公理仍真。

很明显，这样的例子可能有无穷多。事实上，给定任一串

$$x_0, \ x_1, \ x_2, \ x_3, \ \cdots, \ x_n, \ \cdots$$

只要它是无尽的，不包含重复，有一个首项，并且没有一项不能从 8
首项通过有穷的步骤达到，那么我们就有一个项的集合适合皮亚诺的公理。这一点的形式证明虽然稍长，却很容易了解。我们可令“0”指 x_0，“数”指项的整个集合，并且使 x_n 的“后继”指 x_{n+1}。那么

(1) “0 是一个数”，就是说，x_0 是这个集合的分子。

(2) “任何数的后继是一个数”，即：在这个集合中任取一项 x_n，x_{n+1} 也属于这个集合，也是这个集合的一分子。

(3) “没有两个数有相同的后继”，即，如果 x_m 与 x_n 是这个集合中两个不同的分子，则 x_{m+1} 与 x_{n+1} 不同；这个结果是从在这个集合中没有重复这个假设得出的。

(4) “0 不是任何数的后继”，即：在这个集合中没有一项在 x_0 的前面。

(5) 至于皮亚诺的第五公理现在成为：任何性质，如果 x_0 有此性质，又如果 x_n 有此性质，x_{n+1} 必定也有，那么所有的 x 都有这性质。

这些性质一个一个与数的性质相对应。

如象以下形式的一串

$$x_0, \ x_1, \ x_2, \ x_2, \ \cdots, \ x_n, \ \cdots$$

在其中有一个首项，每一项有一个后继(因此没有末项)，没有重复，而且每一项可以由出发点在一有穷的步骤内达到，这样的一串叫做一个序级 (progression)。序级在数学原理中具有非常的重要性。如我们适才所见，每一个序级都适合皮亚诺的五个公理。相反，也可证明：凡适合皮亚诺公理的每一个串都是一个序级。因此这五个公理可用来定义序级的类：所谓“序级”就是“那些适合这五

个公理的串”。任何序级都可以作为纯粹数学的基础：我们可以称
呼它的首项为“0”，项的整个集合为“数”，序级中一项的次一项为
9 此项的“后继”，这样的序级不必是数组成的，它可由空间的点，时
间的瞬间或者任何取之不尽的项所组成。每个不同的序级导致传
统的纯粹数学所有命题的不同解释；所有这些可能的解释同
样真。

在皮亚诺的系统中，关于他的基本概念的这些不同解释，我们无以区别。它假定了我们已经知道“0”的意义，而不会假定这个符号指100，或者克利奥佩特拉的方尖碑（埃及古代两个方尖碑之一，今在伦敦——译者），或者任何它可能指称的东西。

“0”、“数”与“后继”不能用皮亚诺的五个公理去定义，而必须单独地了解，这一点非常重要。我们需要的是，我们的数不仅适合数学公式，并且能在恰当的方式中应用于普通的事物。若在一个系统中，“1”指100，“2”指101，如此类推，这样的系统对于纯粹数学可能完全合适，但是不能适合日常生活。我们有十个手指，两个眼睛和一个鼻子，我们需要“0”“数”与“后继”所具有的意义，能给我们的手指，眼睛，鼻子适当的定量，适当的数目。关于我们用“1”与“2”等所指的东西的知识，虽说不够明白或清晰，可是我们已经具有，我们在算术中数的用法必须符合这种知识。由皮亚诺的方法，我们不能保证这种相符的情形，如果我们采取他的方法，我们只能说：“我们知道‘0’、‘数’与‘后继’的意义是什么，然而我们不能用别的更简单的概念解释它们”。在必需时这么说是十分合法的，并且在**某些**地方我们都必需这么说，就是：“我们知道我们已有的概念的意义是什么，然而我们不能用其它更简单的概念来解释这种意义”。但是，数理哲学的目的是尽可能将这种说法推后，尽可能寻求更简单的概念以解释我们已有的概念。由于算术的逻辑理论，我们确实能将这种说法延搁一段很长的时间，确实能追溯到

一些更简单的概念。

或许有人提出，我们不能定义“0”、“数”与“后继”，也不必假定我们知道这些概念的意义，不必令它们与通常的意义相符；反之，我们可以让它们代表任何能适合皮亚诺公理的三个概念。如此，10
它们将是既未定义，也没有一个确定意义的概念：它们将是“变项”，是我们对之作某种假设——就是在五个公理中陈述的种种——但此外别无规定的概念。如果我们采取这个计划，我们的定理将不再是关于确定的项的集合，所谓“自然数”的定理，而是关于一切项的集合的定理，只要这些项的集合具有某种性质。这种方法并不荒谬，它提供一种推广，对于某种目的，确有价值。但从两个观点看来，这种方法未能为算术奠定一个适当的基础。第一，它不能使我们知道是否确有适合皮亚诺公理的项的集合；它甚至没有略略提示任何方法，以发现是否有这样的项的集合。第二，如我们已经说过的，我们需要我们的数能计数通常的事物，也就是要求我们的数不仅具有某种形式的性质，还应该具有一种**确定**的意义。这种确定的意义须以算术的逻辑理论来定义。

11 # 第二章　数的定义

“什么是一个数？”这个问题人们常常想到，但只是在我们这个时代才得到正确的解答。这个解答为弗芮格于一八八四年在他的《算术基础》(Grundlagen der Arithmetik)① 一书中所给出。虽然这本书十分简短，并不难，并且非常重要，可是它几乎不曾引起注意，其中所包含的数的定义事实上也是一向不为人所知，直到一九〇一年才为本书作者所发现。

在试作数的定义时，首先须将我们研究的第一步辨析明白。许多哲学家尝试作出数的定义，实际上却去定义为许多事物所形成的复合(plurality)，这是件完全不相干的事。“数”是一切数的特性，正如“人”是所有人的特性一样。许多事物所形成的复合并非是数的一例，而是某个特殊的数的实例。譬如三个人的一组是数3的实例，而数3又是数的一例；但是三人组并不是数的一例。这点似乎很浅近，不值一提；然而已经显示出，哲学家中，除了极少数的例外，这点对于他们确实是很微妙，不易想到的。

一个特殊的数和一个含有这个数目的聚合(collection)决不相
12 同：数3决不同于布朗、琼斯、鲁宾逊组成的三人组。数3是一切三个一组所共有的东西，它使它们与别的聚合不同。一个数表示出某些聚合，或者明确一点说，含有那个数目的聚合的特性。

在这里我们要作一个规定，此后我们将不再说一个“聚合”，而以一个“类”(class)或者有时以一个“集合”(set)来代替。和这些词

① 相同的然而是更充分的解答，更详细的发展，见他的《算术的基本定律》(Grundgesetze der Arithmetik)一书第一卷，该书一八九三年出版。

同义的在数学中还有集(aggregate)和簇(manifold)等。关于“类”，以后我们将详细讨论，目前我们尽可能地少涉及。但是有几点说明必须立即提出。

一个类或者一个集合可以乍看似乎完全不同的两种方法来定义：或者我们可以列举它的分子，如同我们说“这个集合我指的是布朗，琼斯，鲁宾逊”时一样；或者我们可以提出一个特性，如同我们说到“人类”或者“伦敦的居民”时的情形一样。列举的定义称为“外延”定义，提出一个特性的定义称为“内涵”定义。这两种定义中，在逻辑上是内涵定义比较基本。这点可由两点理由来说明：(1)外延定义常可归约到一个内涵定义；(2)内涵定义常不能归约到外延定义，即使在理论上，也是不可能的。这两点都需要几句解释。

(1) 布朗，琼斯和鲁宾逊，他们每个人都据有某种性质，这种性质是整个宇宙中任何其它东西所没有的，这就是所以为布朗、或者琼斯或者鲁宾逊的性质。这个性质可以作为由布朗、琼斯和鲁宾逊所组成的类的一个内涵定义。考虑“x是布朗，或者x是琼斯，或者x是鲁宾逊”这样一个式子，它只对于三个x是真的，即只对于布朗、琼斯和鲁宾逊三个人是真的。在这一方面它象一个有三个根的一个三次方程式。它指出一种性质，这种性质为这三个人所组成的类的分子所共有，并且只属于这些分子，而不属于其它。 13
任何外延确定的类显然可以同样处理。

(2) 显而易见，事实上关于一个类我们常常能够知道得很多，却不能列举它的分子。没有一个人能够实际地列举尽所有的人，甚或只是所有的伦敦居民，然而关于这两类我们仍然知道得很多。这足以表明：外延定义对于我们关于一个类的知识不是必要的。并且就无穷类而论，我们发现，对于仅仅生活在一个有穷时间内的生命，就是在理论上，列举也是不可能的。我们不能列举所有的自

然数，我们说自然数是 0，1，2，3，等等，到了某个时候我们必须满足于"等等"。我们不能列举一切分数，一切无理数，或者任何其它的无穷集合。因此我们关于所有这些集合的知识，只能从一个内涵定义得到。

当我们试作数的定义时，以上两点说明对于三方面都有关系。第一，数本身形成一个无穷集合，所以不能由列举来定义。第二，有给定的项数的集合本身可能也形成一个无穷的集合。例如我们推测在这个世界上有无穷多的三个一组，也就是说，所有的三个一组又形成一个无穷的集合，如若不然，世界上事物的总数将是有穷的，这虽可能，事实上似乎未必如此。第三，我们希望有一种定义数的方法，使无穷数也成为可能，要这样，我们就必须能够说出一个无穷集合的项数，而这样一个集合必须由内涵来定义，或者说，由一个性质来定义，这性质是它的所有分子所共有的，并且只为这些分子所共有。

有些时候，为了某些目的，一个类和一个定义它的特性事实上可以互相替换。可是二者之间仍然有很大的区别：只有一个类有给定的一组分子，或者说，给定的一组份子只能组成一个类；但是
14 相反地，一给定的类常可由许多不同的特性来定义。如人可以定义为无毛的两足动物，或者，有理性的动物，或者定义为具有斯威夫特所描写的亚胡的那些特性者。〔按：亚胡（Yahoo）为英国小说家斯威夫特（Swift）所著《格列佛游记》中具有人的形状与恶习的兽——译者〕。唯其因为作定义的特性决不是唯一的，才使类成为有用；否则我们会满足于只为它们的分子所共有的那些性质①。但是只要当唯一性无甚关系或不太重要的时候，这些性质中的任何一个都可以用来代替类。

---

① 象后面将要解释的，类可以看成为逻辑的虚构，从定义的特性中构造出来的。但是现在姑且承认类是真实的，可以使我们的解释变得简单容易。

现在回到数的定义，很明显，数就是将某些集合，即那些有给定项数的集合，归在一起的一种方法。我们可以假定所有的对子为一起，所有的三个一组为另一起，如此下去。这样我们得到各种不同的一起一起集合，每一起由有给定项数的集合所组成。每一起是一类，它的分子是集合，也就是类；因此每一起是一个类的类。例如，由所有的对子所组成的一起是一个类的类：因为每一个对子是一个有两个分子的类，所以所有的对子归在一起是一个拥有无穷多个分子的类，其中的每一个分子又是有两个分子的类。

但是我们如何决定两个集合属于同一起？对于这个问题我们会很自然地回答道："找出每一个集合有多少分子，假如它们有同样数目的分子，那么就归入同一起"。可是这个答案假定我们已经定义了数，并且假定我们知道如何找出一个集合有多少项。对于计数的运算我们是太习以为常了，以致这样一个假定很容易地忽略过去。事实上，计数虽然熟悉，在逻辑上它却是一个非常复杂的运算；并且如把它作为发现一个集合有多少项的方法，只有在这个集合是有穷时，才可以使用。然而我们定义数时却不可预先假定所有的数都是有穷的；并且因为数是被用于计数中的，在任何情形下，我们如利用计数来定义数，就会陷入一个恶性循环。所以，我 15
们需要其它的方法，以决定什么时候两个集合有同样的项数。

就事实论，发现两个集合是否有相同的项数比定义它们的项数是什么在逻辑上简单得多。下面的实例可以表明这一点。如果在世界上没有一个地方实行多夫制或多妻制，那么显然在任何时刻丈夫的数目刚好等于妻子的数目。我们不需要户口调查来证实这一点，也不需要知道丈夫和妻子的准确数目是多少，可是仍可知道这两个集合的数目必定相同，因为每一个丈夫有一个妻子，并且每一个妻子有一个丈夫。丈夫与妻子的关系是所谓的"一对一"的关系。

所谓“一对一”的关系，就是：如果 x 对 y 有所说的关系，则没有其它的项 x' 对 y 有这种关系；并且 x 对于 y 以外的任何项 y' 也没有同样的关系。只满足两个条件中的第一个的关系称为“一对多”关系，只满足第二个的关系称为“多对一”关系。在这些定义中并未使用数 1，这是必须注意的。

在基督教的国家里，丈夫对妻子的关系是“一对一”；在回教国家里这种关系是“一对多”；在西藏是“多对一”。又父亲对儿子的关系是“一对多”；儿子对父亲是“多对一”，至于长子和父亲的关系则是“一对一”。如 n 是任一数，n 对 $n+1$ 的关系是一对一；n 对 $2n$ 或 $3n$ 的关系也是。当我们仅考虑正数时，n 对 n^2 的关系也是一对一；但如承认负数，这种关系就变为二对一，因为 n 与 $-n$ 有相同的平方数。这些例子应该足够说明一对一，一对多，多对一这三种关系的概念。这些关系在数学原理中占据一个重要的位置，不仅对于数的定义是如此，在许多别的方面也如此。

如果有一个一对一的关系，使一类中的每一项与另一类中的
16 一项对应，如象婚姻关系使丈夫与妻子对应一样，则称这两类“相似”(similar)。下面几个辅助定义将帮助我们更准确地把这个定义陈述出来：我们说，所有与别的东西有某给定关系的各项所形成的类叫做这关系的**前域**(domain)：因此父亲是父子关系的前域，丈夫是夫妻关系的前域，妻子是妻子对丈夫的关系的前域，而丈夫与妻子一起是婚姻关系的前域。妻子对丈夫的关系是丈夫对妻子的关系的**逆关系**(converse)。同样，**小于**是**大于**关系的逆关系，**后于**是**先于**关系的逆关系，等等。一般地，无论何时 x 与 y 之间有某种给定的关系，这种关系的逆关系就是 y 与 x 之间的那种关系。又一个关系的**后域**(converse domain)就是它的逆关系的前域：所以妻子这一类是丈夫对妻子的关系的后域。现在我们陈述相似的定义如下：

所谓一类“相似”于另一类，就是在它们之间有一个一对一的关系，一类是这关系的前域，另一类是它的后域。

以下几点是很容易证明的：(1)每一类都相似于它自己，(2)如果一类 α 相似于一类 β，那么 β 相似于 α，(3)假使 α 相似于 β，而且 β 相似于 γ，那么 α 相似于 γ。一个关系当它具有这些性质中的第一种时，称为是**自反的**(reflexive)，具有第二种性质时称为**对称的**(symmetrical)，具有第三种时称为**传递的**(transitive)。显而易见，一个既是对称的又是传递的关系在它的整个域中必也是自反的。具备这些性质的关系是很重要的一种关系，值得注意的是：相似就是这种关系中之一。

如果两个有穷类相似，它们必有相同的项数，否则，就没有相同的项数，这一点对于普通常识是很显然的。计数的动作就是在 17
被数的一类事物与用以数物的自然数(除去 0)之间建立一一对应的关系。于是普通常识得出结论，在被数的一类事物中所有事物的数目与用于计数中直到最后一数所有的那么多的数相等。我们又知道，只要我们限制于有穷数，从 1 到 n 刚好有 n 个数。所以假定集合是有穷的，则用于数这集合的最后一数就是这集合所有的项数。但是这个结果，除去仅适用于有穷集以外，还倚赖和假定这一事实，就是：相似的二类有相同的项数；因为当我们计数时，譬如说有 10 个事物，我们所做的就是表示这类事物和从 1 到 10 的数的集合相似。所以在逻辑上相似概念已经被假定在计数的运算中，这个概念对于我们虽然没有计数熟悉，从逻辑上来说却是更简单。又通常在计数中，必须将被数的事物排成一定的次序，如第一，第二，第三等等，但是次序并非数的本质，从逻辑的观点看来，这是不相干的附加，不必要的复杂化。相似概念不要求一个次序：例如，我们已经见到丈夫的数目与妻子的数目相等，然而并不曾在他们中间建立一个先后次序。相似概念也不需要限制于一切有穷类。

例如，一面取自然数(除去 0)，一面取以 1 为分子的分数，很明显，我们能够使 2 与$\frac{1}{2}$，3 与$\frac{1}{3}$相对应，如此类推，因而证明这两个无穷类相似。

我们可以依以上的方法利用相似概念来决定什么时候两个集合属于同一起，这就是我们在本章前面所提出的问题。我们要有一起包含那些没有分子的类，这就是数 0 。然后一起包含一切只有一个分子的类，是为数 1 。然后一起为所有对子所组成的类，是
18 为数 2 ，如此继续下去。给定任何集合，我们可以定义它所属的那一起为与之“相似”的一切集合所组成的类。显而易见，譬如说，假使一个集合有三个分子，一切与之相似的集合所组成的类就是所有的三个一组所组成的类。无论一个集合有多少项数，与之“相似”的集合必有相同的项数。我们可以用相似作为“有相同项数”的**定义**。显然，只要我们限制于有穷集，由这个定义所得的结果与惯用的方法一致。

直到现在我们不曾涉及一丝一毫矛盾。但当我们临到真正地定义数时，我们不能避免一种乍见似觉矛盾的印象，可是这种印象不久就会消失。我们会很自然地想到，譬如说，对子的类和数 2 不同。关于对子的类我们没有疑问，它是不容置疑的，也不难定义，至于数 2 ，却无论如何是个形而上学的东西，关于这样的东西，我们决不能感知它的存在，或者说，我们决不能捉摸到它。所以不去追求一个成为问题的，总是不可捉摸的数 2 ，而使自己满足于为我们所确知的一切对子的类，这种态度是比较审慎的。于是我们确立如下的定义：

一个类的数是所有与之相似的类的类。

如此，对子的数即是所有对子的类。事实上，按照我们的定义，所有对子的类乃是数 2 。这个定义不免有点奇怪，但是意义确定，无可怀疑，并且凡我们期望于数的一切性质，这样定义的数完

全具备，这点也不难证明。

现在我们可以继续定义一般的数为：由于相似关系而集合在一起的任一起类。更仔细说，一个数是一个类的集合，其中任何二分子，即二个类，彼此相似，并且在这集合以外，没有一个类相似于 19
这个集合以内的任一类。换言之，一个数（一般的）是一个集合，在此集合中任一分子所有的项数即是这个数；或者更简单的：

所谓数就是某一个类的数。

这个定义字面上似乎循环，但其实不然。我们定义“一个给定的类的数”没有用一般的数的概念；所以我们可以用“一给定的类的数”来定义一般的数而不犯任何逻辑错误。

这种定义事实上是非常普通的。例如父亲类可以从定义什么是一个人的父亲入手，然后父亲类就是所有为人父者。同样，假如我们要定义平方数，我们必须首先定义何谓一数是另一数的平方，然后定义平方数的类就是所有为另一数的平方者。这种方法非常普通，认清它是合法的，甚至常常是必要的，这点很重要。

如今我们已经给出适合于有穷集的数的定义，剩下的是了解它将如何适用于无穷集。但是首先我们必须判定何谓“有穷”与“无穷”，这是本章范围内所不能做到的。

20 第三章　有穷与数学归纳法

我们在第一章中已经知道，假使我们知道“0”、“数”与“后继”这三个概念的意义，自然数全都可以定义出来。但是我们可以更进一步：如果我们知道“0”与“后继”的意义是什么，我们也能够定义出所有的自然数。注意到这件工作如何完成将有助于我们了解有穷与无穷之间的区别，以及用以完成这定义的方法为何不能推广到有穷类以外。我们且不考虑如何定义“0”与“后继”，此刻先假定我们已经知道这两概念的意义，而来说明如何从这两概念得到所有其它的自然数。

显而易见，我们能够达到任何指定的数，譬如说 30,000。我们先定义“1”为“0 的后继”，然后定义“2”为“1 的后继”，照样继续下去。在一个指定的数，例如 30,000 的情形下，假使我们有耐心，我们能够一步一步照这样前进达到这数，这个证明可由实际的实验完成，我们可以一直继续，直到我们真正达到 30,000。但是实验的方法虽可以适用于每一个特殊的自然数，却不能用于证明一个普遍的命题，就是：一切数都能以这种方法得到，亦即，从 0 起一步一步由一数到它的后继的方法得到。然则是否有其它的方法证明这个命题？

让我们由另一个途径来考虑这个问题：有了概念“0”与“后
21 继”我们能够得到些什么数？是否有别的方法，我们能用来定义这些数的整个的类？作为 0 的后继，我们得到 1；作为 1 的后继，又有了 2；作为 2 的后继，更得到 3；如此类推。然而我们所希望代替的正是这“如此类推”，我们要以其它较不含糊的，较确定的东西来

代替它。我们或者要说，“如此类推”的意义就是前进到后继的步骤可以重复有穷次；但是我们所讨论的问题正是如何定义“有穷数”，所以在我们的定义中，切不可使用这个概念，我们的定义必须不假定已经知道什么是有穷数。

这个问题的关键在于**数学归纳法**。记住在第一章中，这就是我们为自然数所建立的五个基本命题中的第五个。它述说：如果 0 有一性质；又如任一数有此性质，它的后继必定也有此性质，那么所有的自然数都有此性质。这一条在以前是当作一个原则，但是现在我们要取作定义。凡遵从数学归纳法的一串项，它们的数目和从 0 起通过接连的步骤由一个到次一个可以得到的数一样多，这一点是不难了解的，可是它很重要，我们要比较详细地讨论。

我们最好从一些定义开始，这些定义在别的方面也是有用的。

假使无论何时一数 n 有一性质，它的后继 $n+1$ 也有，则称这性质在自然数串中是“遗传的”(hereditary)。同样，如 n 是一类中的一份子，$n+1$ 也是，则称这类是“遗传的”。虽则我们并没有假定知道以下这一点，可是这是容易了解的，说一个性质是遗传的，等于说，从某数起一切自然数，或者说，不比某数小的一切自然数，都有这性质，譬如说，可能所有不比 100 小的自然数，或者所有不比 1000 小的自然数都有这性质，或者也可能所有不比 0 小的自然数都有这性质，那就是，没有一个例外，所有的自然数都具备这性质。

如果 0 有一个性质，并且这性质是遗传的，则称此性质为“归纳的”。同样，一个类如果是遗传的，并且 0 是它的一分子，则称这 22
类是“归纳的”。

给定一个遗传类，0 是它的一分子，那么 1 也必是它的一分子，因为一个遗传类包括它的分子的后继，而 1 就是 0 的后继。同样，给定一个遗传类，1 是它的一分子，那么 2 也是它的一分子；如