www.docsriver.com 定制及广告服务　小飞鱼
更多广告合作及防失联联系方式在电脑端打开链接
http://www.docsriver.com/shop.php?id=3665

汉译世界学术名著丛书

算术基础

〔德〕G.弗雷格 著

汉译世界学术名著丛书

算术基础

——对于数这个概念的一种逻辑数学的研究

〔德〕G.弗雷格 著

王 路 译 王炳文 校

商务印书馆

2001年·北京

图书在版编目（CIP）数据

算术基础/（德）弗雷格著；王路译 —北京：商务印书馆，1998

ISBN 7-100-03239-3

Ⅰ.算… Ⅱ.①弗… ②王… Ⅲ.数学基础 Ⅳ.O143

中国版本图书馆CIP数据核字（97）第01094号

汉译世界学术名著丛书

算 术 基 础

——对于数这个概念的一种逻辑数学的研究

〔德〕G.弗雷格 著

王 路 译 王炳文 校

商 务 印 书 馆 出 版

（北京王府井大街36号 邮政编码 100710）

商 务 印 书 馆 发 行

北 京 冠 中 印 刷 厂 印 刷

ISBN 7-100-03239-3/B·489

1998年8月第1版 开本850×1168 1/32

2001年4月北京第2次印刷 印张4 3/8 插页4

定价：10.00元

www.docsriver.com 定制及广告服务　小飞鱼
更多广告合作及防失联联系方式在电脑端打开链接
http://www.docsriver.com/shop.php?id=3665

汉译世界学术名著丛书
出版说明

我馆历来重视移译世界各国学术名著。从五十年代起，更致力于翻译出版马克思主义诞生以前的古典学术著作，同时适当介绍当代具有定评的各派代表作品。幸赖著译界鼎力襄助，三十年来印行不下三百余种。我们确信只有用人类创造的全部知识财富来丰富自己的头脑，才能够建成现代化的社会主义社会。这些书籍所蕴藏的思想财富和学术价值，为学人所熟知，毋需赘述。这些译本过去以单行本印行，难见系统，汇编为丛书，才能相得益彰，蔚为大观，既便于研读查考，又利于文化积累。为此，我们从 1981 年至 1998 年先后分八辑印行了名著三百四十种。现继续编印第九辑。到 2000 年底出版至三百七十种。今后在积累单本著作的基础上仍将陆续以名著版印行。由于采用原纸型，译文未能重新校订，体例也不完全统一，凡是原来译本可用的序跋，都一仍其旧，个别序跋予以订正或删除。读书界完全懂得要用正确的分析态度去研读这些著作，汲取其对我有用的精华，剔除其不合时宜的糟粕，这一点也无需我们多说。希望海内外读书界、著译界给我们批评、建议，帮助我们把这套丛书出好。

商务印书馆编辑部

2000 年 6 月

译 者 序

弗雷格(1848—1925)是德国著名的数学家、逻辑学家、哲学家,是现代数理逻辑的创始人。他于1848年11月8日出生在德国维斯玛;1869年进耶拿大学学习,后去哥丁根大学学习,先后学习了数学、物理、化学和哲学等课程;1873年在哥丁根大学获得哲学博士学位;1874年获得耶拿大学数学系的授课资格;1879年被任命为该校副教授;1896年被任命为该校名誉教授;1918年退休;1925年去世,享年77岁。他的主要著作和论文有:《概念文字:一种模仿算术语言构造的纯思维的形式语言》(1879);《算术基础:对于数这个概念的一种逻辑数学的研究》(1884);《算术的基本规律》第一卷(1893)、第二卷(1903);《论意义和意谓》(1892);《函数和概念》(1891);《论概念和对象》(1892)等等。

弗雷格是杰出的数学家和逻辑学家。他想从逻辑推出数学。为了这一目的,他进行了三步努力。第一步是发表了《概念文字》,他在该书中构造了一种形式语言,并以这种语言建立了一阶谓词演算系统,从而提供了一种严格的逻辑工具。第二步是发表了《算术基础》,在这部著作中,他详细探讨了什么是数,什么是0,什么是1等基本概念;他批评了许多数学家和哲学家,包括密尔、康德等人关于这些问题的错误论述;他还从逻辑角度刻画了这些概念。这就为他的第三步,即以逻辑系统来构造算术奠定了基础。虽然后来由

于罗素发现了悖论，他的第三步工作没有成功，但是他的前两步工作倍受人们称赞。他的《算术基础》本身包含着许多深刻的哲学探讨，比如关于数的讨论、关于分析和综合的讨论、关于逻辑和心理学的区别的讨论。特别是他提出的三条原则，即必须把心理学的东西与逻辑的东西区别开，把主观的东西与客观的东西区别开；必须在句子联系中询问语词的意谓；必须注意概念和对象的区别，成为今天人们研究和讨论的热点。著名哲学家 M. 达米特(M. Dummett)说："我过去觉得并且现在依然觉得，《算术基础》这本书是迄今写下的几乎最完美的唯一一部哲学著作"(*The Interpretation of Frege's Philosophy*, Cambridge, Harvard University Press, 1981, ix)。我认为，这一评价是丝毫不过分的。

关于译文，有以下两点需要加以说明。

其一，弗雷格在讨论中使用了两个词，一个是"Zahl"，另一个是"Anzahl"，二者都意谓"数"。从弗雷格的论述也无法十分清楚地看出它们的区别。一些英美学者认为，"Zahl"指"number"，即"数"，而"Anzahl"指"cardinal number"，即"基数"。为此我参照了 J. L. Austin 的英译本。该书把"Zahl"译为小写的"number"，把"Anzahl"译为大写的"Number"。著名逻辑学家 Peter T. Geach 说，这个译法"对于使英文本行文流畅颇有帮助"(*Frege's Grundlagen*，载 E. D. Klemke 编 *Essays on Frege*, University of Illinois Press, Urbana, Chicago and London 1968年，467页)。因此我在翻译中把这两个词都译为"数"，但是在"Anzahl"的译名下加上重点符号，使之成为"数"，以示区别。

其二，在弗雷格的用语中，定冠词是十分重要的。他往往以加

定冠词的概念表示对象，以不加定冠词的概念表示概念，而且对此多次做过说明。因此在翻译中我尽管使译文准确，甚至为了加上定冠词而不惜使中文句子有些生硬。比如文中有“处于F这个概念之下的这个数……”，这里就有两个定冠词“这个”。读起来虽然有些不顺口，但准确地忠实于原文。

本书翻译根据：Christian Thiel 编辑的 *Die Grundlagen der Arithmetik：Ein logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl*，Felix Meiner Verlag GmbH，Hamburg，1988年版；并参照 J. L. Austin 的英译本 *The Foundations of Arithmetic：Alogico-mathematical enquiry into the concept of number*，Basil Blackwell，Oxford，1953年版。翻译中的不当之处，敬请读者批评指正。

中国社会科学院哲学所译审王炳文先生仔细校对了全部译稿，特此致谢！商务印书馆的编辑同志对本书的编辑出版做了许多有益的工作，特此致谢！

王 路
中国社会科学院哲学研究所
1992年5月

目　录

序

一这个数是什么，或者，1 这个符号意谓什么，对这个问题，人们通常得到的答案是：一个事物。此外，如果人们注意到，

“一这个数是一个事物”(“die Zahl Eins ist ein Ding”)

这个句子不是定义，因为它一边是定冠词，另一边是不定冠词，如果人们还注意到，这个句子只是说一这个数属于事物，而没有说是哪个事物，那么也许人们就不得不自己选择人们愿意称之为一的任何一个事物。但是，如果每个人都可以有权任意理解这个名称，那么关于一的同一个句子对于不同的人就会意谓不同的东西；这样的句子就不会有共同的内容。一些人也许会拒绝回答这个问题，他们暗示说，甚至算术中 a 这个字母的意谓也是不能说明的；而且，如果人们说 a 意谓一个数，那么这里就可能发现与“一是一个事物”这个定义中相同的错误。拒绝回答与 a 有关的问题是完全有理由的，因为它不是意谓确定的可指明的数，而是用来表示句子的普遍性。如果用任何一个数代入 $a+a-a=a$ 中的 a，并且处处都代入相同的数，那么总是得到一个正确的等式。a 这个字母是在这种意义上使用的。但是关于一的问题，情况就根本不同。在 $1+1=2$ 这个等式中，我们能用相同的对象，譬如月亮，两次代入 1 吗？与此相反，似乎我们代入第一个 1 的东西和代入第二个 1 的东西必须

是不同的。在前一种情况会是错误的东西，在这里却恰好是必然出现的，这是为什么呢？为了普遍地表达不同的数之间的关系，算术只有a这个字母是不够的，还必须使用b、c等等其它字母。因此应该想到，如果用1这个符号以类似的方式赋予句子以一种普遍性，它也是不够的。但是，一这个数难道不是作为具有可说明性质（譬如与自身相乘保持不变）的确定对象而出现的吗？在这种意义上，人们不能说明a的任何性质；因为a所表达的是数的一种共同性质，而$1^1=1$既不表达月亮的任何东西，也不表达太阳的任何东西，也不表达撒哈拉沙漠的任何东西，也不表达特纳里费山峰的任何东西；那么这样一个表达式的意义能是什么呢？

对于这样的问题，甚至连大多数数学家大概也不会作出令人满意的回答。然而对于科学最切近的而且看上去是如此简单的对象竟如此不清楚，难道不令人羞愧吗？关于数是什么，人们能够说出的就更少了。如果为一门重要科学奠定基础的概念有了困难，那么更精确地研究这个概念和克服这些困难，确实就是不可推卸的任务。尤其是因为，只要对算术的整个大厦的基础的认识还有缺陷，也许就很难能够完全弄清楚负数、分数和复数。

许多人肯定会认为不值得为此花费气力。正像他们认为的那样，这个概念甚至在初级读本中就得到充分的讲述，因此一劳永逸地解决了。究竟谁还相信从这样简单的东西依然能够学到一些东西呢？人们认为正整数这个概念没有任何困难，以致对儿童也能够科学地详尽地讲述它，而且每个孩子不用进一步思考，也不用知道别人考虑过什么，就确切地知道它是怎么回事。这样就常常缺少学习的首要前提：对无知的认识。结果，人们仍旧满足于粗略的理解，

尽管赫巴特(Herbart)就已经说过一种更准确的理解①。令人痛心和沮丧的是,已经获得的认识总是面临着这样得而复失的危险,从而许许多多工作似乎变成徒劳的,因为人们误认为自己占有不少财富,因而不必再加上这些工作的成果。我清楚地看到,我的工作也蒙受这样的危险。当把计算称为聚合的机械的思维时,我就遇到了那种粗略的理解②。我怀疑竟然有这样的思维。也许,人们可能更愿意承认聚合的表象;但是它对于计算没有意义。从本质上说,思维在哪里都是一样的:绝不能根据对象而考虑不同种类的思维规律。差别仅仅在于或多或少的纯粹性,以及对心理影响和思维外在的辅助手段,譬如语言、数字等等的或多或少的独立性,此外,大概还在于概念构造的精致性;但是,恰恰在这一点上,任何一门科学,即使是哲学,都不要企望会超过数学。

人们从本书将能够看出,甚至像从n到n+1这样一条表面上专属于数学的推理,也基于普遍的逻辑规律,而且不需要特殊的聚合思维的规律。当然,人们可以机械地使用数字,一如人们可以鹦鹉学舌式地说话;但是这几乎不能叫作思维。只有通过实际思维活动形成数学的符号语言,因而正像人们所说,这种语言为人们起思维作用时,才可能有思维。这并不证明,数是以一种特殊机械的方式形成的,比方说,就像沙堆是由细小的石英颗粒堆积的一样。我认为,驳斥这样的观点关系到数学家的利益,因为这种观点总是贬

① 《赫巴特全集》,哈特恩施坦恩编辑。第10卷第一部分:《教育讲座概论》(*Umriss pädagogischer Vorlesung*)§252,注释2:"二不意谓二事物,而意谓加倍",等等。

② K. 菲舍尔:《逻辑系统和形而上学或科学论》(*System der Logik und Metaphysik oder Wissenschaftslehre*),第二版,§94。

低数学这门科学的主要对象，从而贬低数学这门学科本身。但是即使在数学家的著作中，人们也发现十分类似的说法。与此相反，我们必须赋予数概念一种比其它学科中大多数概念更精致的构造，尽管它们是最简单的算术概念之一。

因此，为了驳斥那种空想：即关于正整数实际上根本不存在什么困难，而是有着普遍一致的看法，我认为评述一些哲学家和数学家对这里所考虑的问题的一些意见是有益的。人们将会看到，意见一致的情况极为罕见，出现的简直是相互对立的表达。例如，一些人说："这些单位是彼此相等的"，另一些人则认为它们是不同的，而且双方这样说都有一些不容轻易反驳的理由。通过这些考察，我试图激发人们进行更严格的研究的欲望。同时，我将预先说明别人表达的看法，以此为我自己的观点铺平道路，从而使人们预先相信，沿着其它那些道路达不到目标，而我的意见与这里众多同样有理由的意见是不同的；而且我希望以此至少基本上最终解决了这个问题。

然而，我的论述也许因此变得更有哲学味道，似乎超出了许多数学家能够理解的范围；但是对数概念进行彻底的研究必然总是导致某种哲学的结果。这个任务是数学家和哲学家共同的任务。

如果说尽管这两门科学各自都做了不少努力，但是它们的合作并不像人们希望的那样、甚至也不像可能的那样卓有成效，那么我认为这是由于心理学的思考方式在哲学中占据主导地位，它甚至侵入了逻辑领域。数学与这种方向根本没有共同点，由此很容易说明为什么许多数学家对哲学思考表示反感。例如，当施特里克

(Stricker)① 把数的表象称为运动机能的、依赖于肌肉感觉的时，数学家们在这里就不能重新认出他的数，就不知道该如何对待这样一句话。一种基于肌肉感觉建立起来的算术肯定会富有情感，但是也会变得像这种基础一样模糊。不，算术与感觉根本没有关系。同样，算术与从早先感觉印象痕迹汇集起来的内在图像也没有关系。所有这些形态所具有的这种不稳定性和不确定性，与数学概念和对象的确定性和明确性形成强烈对照。考察数学思维中出现的表象及其变化，可能确实有些用处；但是不要以为心理学能对建立算术有任何帮助。这些内在图像、它们的形成和变化对数学家本身是无关紧要的。施特里克自己就说，在“一百”这个词，他只能想到100这个符号。其他人可能会想到字母c或别的什么东西；难道由此得不出以下结论吗？即我们所说的这种内在图像对于事物本质是完全无关紧要的和偶然的，就像一块黑板和一支粉笔那样偶然的一样，根本不能把它们称为一百这个数的表象。人们确实不把这些表象看作事物的本质！人们不把如何形成一个表象的描述看作一条定义，不把对有关我们认识到一个句子的心灵和肉体条件的陈述当作一个证明，也不把对一个句子的思考与这个句子的真混淆起来！看来，人们必须记住，正像当我闭上眼睛太阳不会消失一样，当我不再思考一个句子时，它也不会不再是真的。否则我们还会得出这样的结论：人们在证明毕达哥拉斯定理时，发现必须考虑我们大脑的磷含量；而且天文学家不敢把自己的推论延伸至远古，

① 施特里克：《表象联想的研究》(*Studien über Association der Vorstellungen*, Wien, 1883)。

这样人们就不会反对他说:“你在那里计算 2·2=4;可是数的表象确实经历了发展,有它的历史!人们可能怀疑,当时它是不是就已经发展到了这种程度。你是从哪里知道这个句子在那古远的时代就已经存在的呢?生活在那个时代的人难道不能有 2·2=5 这个句子;由此出发在生存斗争中通过自然的选择才发展起 2·2=4 这个句子吗?而 2·2=4 这个句子难道不会注定要以相同的方式进一步发展成为 2·2=3 吗?”Est modus in rebus, sunt certi denique fines!试图研究事物的形成并且从它的形成认识它的本质这样一种历史考察方式确实有很大的合理性;但是它也有局限性。如果在万物长河中,没有任何东西是不变的,永恒的,那么世界就不再是可以认识的,一切就会陷于混乱。看上去,好像人们以为,概念在个别的心灵中形成就像树叶长在树上一样。而且人们认为,了解概念的形成,力图从人的心灵本性对概念进行心理学的解释,以此就能够认识概念的本质。但是这种观点使一切都成为主观的,如果跟着它走到底,就取消了真。人们称为概念史的东西,肯定要么是我们关于概念认识的历史,要么是关于语词解释的历史。人们常常是只有经过可能要持续几百年的大量的理性工作,才能够认识到概念的纯粹性质,才能剥下概念的那层陌生的、蒙蔽理性眼睛的外壳。现在,如果有人不是继续进行这项显然尚未完成的工作,而是认为它毫无价值,转而走进托儿所或者去追忆可以想象到的人类最古老的发展阶段,以便在那里像 J. S. 密尔那样发现一种譬如姜味烘饼的算术或小石子的算术,那么我们对此应该说些什么呢!缺乏的只是还要为这烘饼的香味加上一种特殊的数概念的意谓。但这与理性方法恰恰是相反的,而且无论可能怎样,都是非数

学的。数学家们对此不感兴趣是毫不奇怪的！在人们相信接近概念根源的地方，人们并没有发现概念特殊的纯粹性质，而是像隔着一层雾，看到的一切都是模模糊糊，没有区别的。这就好比有一个人，他为了了解美洲，在他第一眼隐隐约约看到他猜测的印度时，就愿意设想自己像哥伦布一样。当然这样的比较不证明任何东西；但是希望它能说明我的观点。在许多情况下，发现的历史作为进一步研究的准备工作确实可能是有用的；但是它不能代替进一步的研究。

在数学家面前，反对这样一种观点大概是没有什么必要的；但是，由于我还想为哲学家们尽可能解决上述这些有争议的问题，我就不得不稍微涉足心理学的讨论，即使仅仅是为了阻止它进入数学。

此外，数学教科书中也出现心理学的措辞。当人们感到有义务给出一条定义却又做不到这一点时，人们就要至少对达到有关对象或概念的方式加以描述。人们很容易认识到这种情况，因为在以后的论述中再也不会追溯这样一种解释。为了教学的目的，入门性的说明也是完全适宜的；但是应该始终把它与定义清楚地区别开。施劳德① 提供了一个有趣的例子，说明甚至数学家也可能把证明的根据与进行证明的内在或外在条件混淆起来。他在“唯一的公理”的标题下做出如下表达：“这条考虑的原则大概可以叫作符号的固有性公理。它使我们确信，在我们所有的推导和证明过程中，这些符号深深地铭刻在我们的记忆中，而在纸上还要更牢固一

① 《算术和代数课本》(*Lehrbuch der Arithmetik und Algebra*)。

些”,等等。

即使数学必须断然拒绝来自心理学方面的任何帮助,它也决不能否认自己与逻辑的密切联系。确实,我赞成这样一些人的观点,他们认为将这二者严格分开是不适宜的。人们同样要承认,对于推论的说服力或定义的合理性的一切研究必须是逻辑的。但是,这样的问题根本不能排斥在数学之外,因为只有回答它们,才可能达到必要的可靠性。

我也沿着这个方向,当然还要超出通常的做法。大多数数学家在类似的研究中,对于满足直接的需要表示满意。当一个定义便当地用于一个证明时,当在任何地方也遇不到矛盾时,当能够认识到表面上不相干的事物之间的联系时,当由此产生一种更高的次序和规律性时,人们习惯于把这个定义看作是充分可靠的,很少询问其逻辑理由。这种方法至少有一种好处,即人们不太容易完全错过目标。甚至我认为:定义必然能由它的富有成效性,即可以借助它进行证明,而表明是有价值的。但是一定要注意,如果定义仅仅在后来由于没有遇到矛盾而被证明是有理由的,那么进行证明的严格性依然是一种假象,尽管推理串可能没有缺陷。归根到底,人们以这种方式总是只得到一种经验的可靠性,实际上人们必须准备最终还是会遇到矛盾,而这个矛盾将使整个大厦倒塌。为此,我认为必须追溯到普遍的逻辑基础,这也许远远超出大多数数学家所认为必要的程度。

在这种研究中,我坚持以下三条基本原则:

要把心理学的东西和逻辑的东西,主观的东西和客观的东西明确区别开来;

必须在句子联系中研究语词的意谓，而不是个别地研究语词的意谓；

要时刻看到概念和对象的区别。

为了遵循第一条原则，我总是在心理学的意义上使用“表象”一词，并且把表象与概念和对象区别开来。如果人们不注意第二条基本原则，那么几乎不得不把个别心灵的内在图像或活动当作语词的意谓，而由此也违反了第一条原则。至于第三点，如果以为可以使一个概念成为对象，又不使它发生变化，那么这仅仅是一种假象。由此可见，广为流行的关于分数、负数等等的形式理论是站不住脚的。在本书中，我只能简单提示一下我是如何考虑改进这一理论的。正如在正整数的情况一样，在数的所有情况，重要的是确定一个方程式的意义。

我认为，我的成果至少会得到那些肯花功夫考虑我的根据的数学家的基本赞同。在我看来，这些成果还未付诸实施，而且也许它们都已经逐个地至少得到近似的表述；但是在它们相互联系的这一点上，它们可能确实是新颖的。有时我感到惊奇，有一些论述在某一点上与我的观点十分接近，而在另一点上又大相径庭。

哲学家根据其不同观点，对这些意见的反映也是不同的，最坏的大概是那些经验主义者，他们只愿意承认归纳是原初的推理方式，甚至都不把归纳看作推理方式，而是看作习惯。也许这个人或那个人要借此机会重新检验其认识论的基础。对于那些譬如可能说我的定义不合常理的人，我请他们考虑，这里的问题不在于是不是合常理，而在于是不是涉及问题实质，而且是不是逻辑上没有疑

议的。

我希望，哲学家们通过没有偏见的检验，在本书中也会发现一些有用的东西。

§1. 数学在长时间背离了欧几里得的严格性之后，现在又回到这种严格性，并且甚至努力超越它。在算术中，也许由于许多处理方式和概念发源于印度，因而产生一种不如主要由希腊人发展形成的几何学中那样严谨的思维方式。更高的数学分析的发现仅仅促进了这种思维方式；因为一方面，严格地探讨这些学说遇到了极大的几乎不可克服的困难，另一方面，为克服这些困难付出的努力似乎没有什么价值。然而，后来的发展总是越来越清楚地说明，在数学中一种以多次成功的运用为依据的纯粹的道德信念是不够的。许多过去被看作是自明的东西，现在都需要证明。通过证明，在一些情况下才确定了有效性的限度。函数、连续性、极限、无穷这些概念表明需要更明确的规定。负数和无理数长期以来已为科学所接受，它们的合理性却必须得到更严格的证明。

因此到处可以看到人们努力进行严格的证明，准确地划定有效性的限度，并且为了能够做到这些，努力准确地把握概念。

§2. 沿着这条道路，必然达到构成整个算术基础的数这个概念和适合于正整数的最简单的句子。当然，像 5+7=12 这样的数公式和像加法结合律这样的定律，通过每天对它们的无数次运用而得到许多次确认，因此由于想要进行证明而对它们表示怀疑，看上去简直是可笑的。但是数学的本质就在于，凡是可以进行证明的地方，就要使用证明而不用归纳来确证。欧几里得证明了许多在他看来大家本来就承认的东西。而当人们自己不满足于欧几里得的

严格性时，人们就要进行与平行公理有关的探究。

因此，那种向着极大严格性的运动已经大大超出最初感到的需要，而这种需要变得越来越广，越来越强。

证明的目的并非仅仅在于使一个句子的真摆脱各种怀疑，而且在于提供关于句子的真之间相互依赖性的认识。人们试图推动一块岩石，如果没有推动它，人们就相信这块岩石是不可动摇的。这时人们可能会进一步问，是什么东西这么稳定地支撑着它。越是深入地进行这些探究，就越不能追溯到所有事物的初真；而且这种简化本身就是一种值得追求的目标。也许这也证明一种希望：人们通过认识到人在最简单的情况凭本能所做的事情，并从中把普遍有效性提取出来，就能够获得概念构造或论证的普遍方法，这些方法即使在错综复杂的情况也可以应用。

§3. 促使我进行这样的探究，也有哲学动机。关于算术真的先验性或后验性，综合性或分析性的问题，在这里有待回答。因为，即使这些概念本身属于哲学，我也依然相信，没有数学的帮助，对它们的判定是不能成功的。当然这取决于人们赋予那些问题的意义。

常常有这样的情况，人们先获得一个句子的内容，然后沿着另一条更麻烦的途径进行严格的证明，通过这种证明，人们常常还更确切地认识到有效性的条件。因此人们一般必须把两个问题区别开，即我们如何达到一个判断的内容与我们从哪里得到我们断言的根据。

根据我的观点①，先验和后验、综合和分析的那些区别与判断

① 我这当然不是要提出一种新意义，而仅仅是切中以前一些著作家，尤其是康德所考虑的东西。

的内容无关，而与做出判断的根据有关。在没有根据的地方，那些划分的可能性也就消失了。这样，一个先验错误就像譬如一个蓝概念一样甚为荒唐。如果在我的意义上称一个句子是后验的或分析的，那么这并不是在判断那些使人们得以有意识地构造句子内容的心理的、生理的和物理的情况，也不是在判断别人如何也许是错误地把句子内容看作真的；而是在判断这种被看作真的根据究竟是什么。

这样一来，在涉及数学真的时候，问题就会摆脱心理学领域，而转向数学领域。现在重要的是找到证明并且把它一直追溯到初真。如果以这种方式只达到普遍的逻辑定律和一些定义，那么就有分析的真，这里的前提是：必须也一起考虑定义的可接受性以之为基础的那些句子。但是如果不利用那些不具有普遍逻辑性质、而涉及特殊知识领域的真就不可能进行证明的话，句子就是综合的。为了使真成为后验的，肯定要依据事实得出对它的证明；就是说，要依据含有对确定对象有所陈述的没有普遍性的不可证明的真句子。相反，如果可以完全从本身既不能够也不需要证明的普遍定律得到证明，真就是先验的。①

§ 4. 从这些哲学问题出发，我们达到在数学领域本身产生出来的与这些哲学问题无关的相同的要求：只要有可能，就要最严格

① 如果人们实际上认识到普遍的真，人们也就必须承认，有这样的初始定律，因为从纯个别事实得不出任何东西，除非基于定律。甚至归纳也依据下面这个普遍原理，即归纳方法可以确立一条定律的真，或者说，可以论证它的概率。对于否认这一点的人来说，归纳不过是一种心理现象，一种方式：人们达到相信一个句子的真，而又无需为这种信念提出任何根据。

地证明算术定理;因为只有小心翼翼地避免推理串中的每个缺陷，人们才能有把握地说，这个证明依据什么原初的真命题;而且只有在人们认识到这一点时，人们才能回答那些问题。

如果人们现在试图满足这个要求，人们很快就会达到一些句子，只要这些句子中出现的概念不能被分析为更简单的或者化归为更普遍的概念，这些句子就不能被证明。现在这里首先必须被定义或者被认为是不可定义的东西是数。这将是本书的任务。[1]判定算术规律的实质，将依赖于这个任务的完成。

在我开始探讨这些问题本身之前，我要先说几句对于回答这些问题可能有指导意义的话。如果从其它一些观点出发得出一些理由，说明算术的定理是分析的，那么这些理由也适合于它们的可证明性和数这个概念的可定义性。与此相反的结果将有这样的理由，即这些句子的真是后验的。因此首先要对这些争议点做一些说明。

---

① 因此，在下文中凡不做进一步说明的地方，所谈的数将只是正整数，它们回答“多少”这个问题。

I．一些著作家关于算术句子的性质的意见

数公式是可证明的吗？

§5. 必须把像 2+3=5 这样的涉及确定的数的数公式与对所有整数都有效的普遍定律区别开来。

这样的数公式被一些哲学家① 看作像公理一样是不可证明的和直接显然的。康德②宣布它们是不可证明的和综合的，但是对把它们叫作公理则有所顾忌，因为它们不是普遍的，还因为它们的数是无穷的。汉克尔③ 把这种有关无穷多不可证明的原初真命题的看法称为不合适的和怪谬的，这是有道理的。实际上，这种看法与理性对于第一根据要一目了然的要求是矛盾的。那么，

$$135664+37863=173527$$

是直接明了的吗？不是！而且康德正是用这一点来说这些句子的综合性质的。但是实际上这对于其不可证明性却是不利的；因为，

---

① 霍布斯、洛克、牛顿。参见鲍曼的《论时间、空间和数学》(Baumann, *Die Lehren von Zeit, Raum und Mathematik*, [Band I]S. 241u. 242, S. 366ff. , S. 475)。

② 《纯粹理性批判》(*Kritik der reien Vernunft*, Hartenstein. Ⅲ. S. 57)。

③ 《复数及其函数讲义》(*Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihre Functionen*, S. 53)。

由于它们不是直接明了的，若是不通过证明，怎么才能理解它们呢？康德想借助手指或点的直觉，这样他就陷入一种危险：使这些句子与他的观点相反，表现为经验的；因为 37863 根手指的直觉无论如何绝不是纯粹的。"直觉"这个表达似乎也是不太合适的，因为 10 根手指通过其相互排列就已经能够唤起不同的直觉。那么我们真有 135664 根手指或点的直觉吗？如果我们有这样的直觉，如果我们有 37863 根手指的直觉和 173527 根手指的直觉，那么我们就一定立即明白这个等式的正确性，即使它是不可证明的，至少也适合于手指；但是情况并非如此。

康德显然只考虑了比较小的数。于是，对于比较小的数通过直觉是直接明了的公式，对于大数就会是可证明的。然而难办的是，要对较小的数和大数做出根本的区别，尤其是在不可能划出明确界线的地方。如果譬如从 10 起，数公式是可证明的，那么人们就有理由问：为什么不是从 5 起，从 2 起，从 1 起呢？

§6. 另一些哲学家和数学家也断言了数公式的可证性。莱布尼兹[①] 说：

"2 加 2 等于 4，这不是直接的真；假定 4 表示 3 加 1。人们可以如下证明这一点：

定义：1） 2 是 1 加 1

2） 3 是 2 加 1

3） 4 是 3 加 1

公理：如果代入相等的数，等式依然保持不变。

① 《新论》(*Nouveaux Essais*, [Liv.] Ⅳ. [Ch. Ⅶ.], § 10. Erdm. S. 363)。