逻辑与演绎科学方法论导论

塔尔斯基著

周礼全　吴允曾　晏成书合譯

商务印书馆

邏輯与演繹科学方法論导論

塔 尔 斯 基 著

周礼全　吳允曾　晏成书合譯

内 部 讀 物

商　务　印　书　館

1963年·北京

Alfred Tarski

INTRODUCTION TO LOGIC
AND TO THE
METHODOLOGY OF DEDUCTIVE SCIENCES

Revised edition 1946
Oxford University Press.
New York

Original in Polish language
Translated by Dr. O. Helmer
From German

内部讀物

邏輯与演繹科学方法論导論

塔尔斯基著

周礼全　吳允曾　晏成书合譯

商　务　印　书　館　出　版
北京复兴門外翠微路
(北京市书刊出版业营业許可証出字第107号)
新　华　书　店　經　售
新　华　印　刷　厂　印　装
統一书号：2017・82

1963年3月初版　　开本 850×1168 1/32
1963年3月北京第1次印刷　　字数 213 千字
印張 9 6/16　　印数 1—3,000 册
定价 (9) 1.30 元

www.docsriver.com 定制及广告服务　小飞鱼
更多广告合作及防失联联系方式在电脑端打开链接
http://www.docsriver.com/shop.php?id=3665

俄譯本序言

著名的波兰数学家和邏輯家塔尔斯基的这本书，是数理邏輯和演繹科学方法論的通俗引論，它值得受到苏联讀者的注意。它在 1936 年以波兰文出版，1937 年譯成德文，由德国著名的斯普林格书局在維也納而不在德国出版。尽管如此，这并沒有帮书局的忙，书局沒有来得及在 1938 年德国并吞奧国以前把书全部推銷出去，因此有一部分始終被擱在书店的仓庫里……这是由于种族歧視的緣故。1941 年书的校訂和补充版本在紐約用英文出版，俄文翻譯是根据这个版本完成的。

这本书原来称为《数理邏輯和数学方法論导論》。这个名称与內容更相符合，因为这本书是一門科学的导論，这門科学的主要結果多半是数学专家在二十世紀近几十年获得的。尽管数理邏輯的工具以及数理邏輯中所使用的符号"語言"具有很专門的性质，作者成功地引导讀者到这里所考虑的問題的領域中去，几乎沒有用任何的专門符号，而使用通俗易解的語言。书中所涉及的問題的范圍很广，讀者在这里会找到关于命題邏輯問題的討論，关于集合(类)、性质、关系、函数、运算、同一与相異等概念邏輯方面的討論，关于形成概念的原則(包括所謂的抽象原則)和定义概念的方法的討論，以及关于形成命題和从一些命題推出一些命題的方法的討論，等等。书中有专門的章节用来討論演繹理論构造的原則，这就是所謂的公理学方法，和与之相联系的无矛盾性和完全性問題。一些最一般的数学理論的构造是在表示現代数学特点的方法和概念(例如，从集合論或阿貝尔群論借用来的方法和概念)的基础上

作出的；自然，所有陈述出来的原则都可以应用到这些最一般的数学理論的构造上去。

作者在书的序言中說明了自己对于数理邏輯与演繹科学方法論的意义和本质的一般观点。为了批判地討論他所提出来的原理，首先那怕是粗淺地說明一下我們对于书中所討論的問題的眞实意义的見解，在我看来是适宜的。我們簡单地讲两点。

1. 与形而上学相反，唯物辩证法教导說：眞理总是具体的，也就是說，在此时此地和一定条件下眞的东西，在另一地点、另一时間或者在另一些条件下可能不眞。因此，对于所有用一般形式提出来的問題，不能給出“断然的”回答，是或否。斯大林在1904年写道：“伯恩施坦的信徒們也曾要求馬克思主义者同样断然地回答下面这个問題：合作社（即消費生产互助社）对于无产阶級有益还是有害？馬克思主义者当然不难证明，这样提出問題是毫无意义的。他們很簡明地解釋了：一切都以时間、地点为轉移，——在无产阶級的阶級觉悟已提高到应有程度的地方，在无产者已团結成一个强固的政党的地方，如果合作社是由党着手建立和領导的，那它对无产阶級就会有很大的益处；而在沒有具备这些条件的地方，合作社对于无产阶級就会是有害的，因为合作社能使工人产生小商人的傾向和行会的閉关自守的心理，从而損害工人的阶級觉悟。”①

我們知道，从形式邏輯的規律，例如矛盾律和排中律，得出“断然的”回答，“是”或“否”，是永远可能的，但是形式邏輯的規律却不能机械地应用到所有的命题上去，像形而上学者在这点上所想的那样。

① 《社会民主党怎样理解民族問題?》，《斯大林全集》第1卷，人民出版社1953年版，第42—43頁。

研究者的技巧相当大的程度上在于，估計到环境、地点和时間这些具体条件，这样来提出問題，以便形式邏輯的規律适用于它們，以便对于問題的回答能說明所研究对象的一些最本质的方面。① 难怪人們說，問題的正确提法有时并不比問題的解决价值少。既然数学所处理的是比較普通的对象和关系，在这里获致精确的提法也就比較容易。然而，为了这个目的就不仅要拟定专門的术語，而且要制作出一些科学的、“形式化”的特殊方法，这些方法是数学所特有的，因为在数学中我們所处理的是字母演算。

其实，这种方法是自发地創造出来的，从古代开始，在像欧几里德或者阿基米德这些数学家的著作中就已經有了。由于洛巴契夫斯基的偉大发現及現代集合論数学的建立，产生了一系列的問題。这一系列的問題使得数学家把原来屬于邏輯和数学方法論領域的数学证明論的問題作为专門研究的对象。在現代，数理邏輯以及和它直接联系的演繹科学方法論是一門相当发达的科学，有它特有的問題范圍；有科学研究的专門工具；以及一系列最后确立的有意义的重要結果，这些結果既是借助于分析現有演繹理論所获得的，同时也預告着这些演繹理論的发展，因为它們屬于一定种类的任何可能的演繹理論。既然这里首先考虑的正是一些数学学科，并且所談的那些結果基本上是用数学方法得到的；那么系統地充分地說明它們必須以专門的数学修养为前提。可是作者还是成功地說明了十分广泛范圍內的問題，而沒有假定讀者有超出中等学校数学課程大綱的訓練。还因为，例如說，相应于所討論的內容，

① 同时应該注意，当情况变化时，也必須相应地改变問題的提法，因此，只有彻底辯证唯物主义地說明对象（即邏輯的和历史的处于統一之中，而邏輯的包括历史的）才是正确的。（前面所举的例子教导我們，恰恰是当某种条件变化时，公式也应該改变——这个例子特别說明了这一点。）

“形式化”方法的选擇和陈述的精确性問題,① 具有一般的科学意义,所以对于不接近数学的讀者,塔尔斯基的书也能够引起兴趣。

2. 对于邏輯感觉兴趣,特别是对于其中的現代数理邏輯部分感觉兴趣的讀者,在书中会找到一些內容,使他能够对于数理邏輯的內容和方法形成清晰的概念,并且使他能够闡明数理邏輯的基本特点。这使他可能熟諳地批判地对待資产阶級哲学家的企图,他們想利用这个領域中科学的进展向唯物主义进行斗爭,和宣傳露骨的或混乱的折衷主义和唯心主义的哲学立場(其中包括本书作者本人在內)。在这方面我們只想提請讀者注意作者所熟练应用的数理邏輯的特点(它与一切字母演算共有的特点),以及他一再强調的,数理邏輯与数学的密切联系。

字母演算之引入[为維他(F. Vieta, 1540—1603)和笛卡儿(Descartes, 1596—1650)在17世紀前半期所引入]到数学中,在这門科学的发展中起革命性的作用。恩格斯說,“笛卡儿的变数是

① 追求“形式化”的科学的严格性、精确性和确定性、眞正反映事物的本质,根据眞理的具体性原理的构造,自然,应該把这一切区别于煩瑣哲学的玩弄“严格性”和相应地“創作”形形色色的专門术語的詭計与毫无內容的空洞“形式”。我們看到,眞正科学的“形式化”本身可能是新的,对于科学发展很本质的問題提法的源泉。例如,对于数学中連續曲綫概念来說,就是如此。很长一个时期它好像是立即明显的,而不需要說明。在18世紀末与数学物理問題相联系产生一場“关于声弦”的热烈爭論,在这場爭論中,有像欧拉(L. Euler, 1707—1783)、达兰貝尔(d'Alembert, 1717—1783)、貝努义(Bernoulli, 1700—1782)和拉格朗日(J. L. Lagrange, 1736—1813)这样一些卓越的数学家参加,这使得数学家們相信,事情不是像看起来那样簡单。在19世紀引入的連續性概念的精确陈述头一次使得能够严格的证明一系列的命題,以前数学家实际上在大量的情形中利用这些命題而沒有意識到連續性概念。然而不久发現,連續性定义的这种陈述意外地滿足象塡滿整个正方形所有点的貝安諾曲綫,或連續而无处可微分的波查諾、魏尔施特拉斯函数,这种函数对应于在每一个点上沒有方向的曲綫。这些发現对于科学的进一步发展具有根本的意义。一方面,这样被发現的曲綫是具有深刻的現实意义的。另一方面,連續性概念进一步区分的問題提出来了(而且已經解决),这种区分使得能够更好地表現原来考虑的,然而还不能精确定义的形式。

数学中的轉折点。”

虽然在“变数”和变数在現代数学中的使用之間有一个本质的差異，但是維他和笛卡儿所創造的字母演算和作为現代数学的特点的演算已經有了許多共同的特点。它們的基本特点在于，虽然在口头論述中沒有人想到把命題相“加”或者相“乘”——用表达命題的公式，可是在这些演算中却已經可能根据有时很像普通算术那样的規則来进行演算。例如，可以依一定的方式加等式或不等式，用数去乘它們等等。大概任何曾經学过代数的人也都会記得，用数学中使用变数特有的代入規則来代替从一般到特殊的普通代换，例如教他不說“因为被加数的次序对于和数无关，所以 $7+5=5+7$”，而要他在公式 $a+b=b+a$ 中把 $a=7$, $b=5$ 代进去是多么不习慣。

不用說，一般而論，沒有公式的使用，一些数学推論几乎不能实現，公式的使用有时在非数学家看来，好像是特別为了使人难于理解数学著作而創造的。其实，略微熟悉数学公式就使我們能把它們分成两組：

(1) 公式

$$2+2=4,$$

$$2+2=5,$$

$$2<3,$$

$$a+b=b+a,$$

$$(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2,$$

表示眞或假，而

(2) 公式

$$2+2,$$

$$\frac{2\cdot(3+2)}{7},$$

$$2\sin\frac{\pi}{5},$$

$$\log_{10}3,$$

表示一些对象(不同于真和假的)，在所給的情形中，它們表示完全确定的数。后一种公式的显著特点表示：像“4”一样，“2+2”也是一个确定的数的指示詞，公式$\frac{2\cdot(3+2)}{7}$不仅表示由

(1) 3和2相加，

(2) 二倍所得的結果，

(3) 把所得的除以7。

是一系列运算組成的获得某数的方法，而且还有由这个方法得到的結果，在这里，这結果与数 $1\frac{3}{7}$ 相同。

也要注意，正是結果与导致它的方法的这个辯证的統一在现代数学中广泛地得到利用，这样，借助于指出一个对象可以由其它几个对象来构造的方法，使我們能規定这个对象(例如，定积分)。我們也要指出，在数学中某些困难和这有关，这些困难是这样引起来的，即，事实上不是每一种方法都得出結果；因此需要一种标准，使得我們能够把“收斂”的方法和那种不能有意义地得出确定結果的方法区别开来。

这种特点引起了要特别研究邏輯方法的願望，这些邏輯方法正是数学演算的特征。另方面，甚至这种研究的最初尝試应該是推动研究者去发現下述情形，即这种方法不过是普通邏輯規律的另外一种形式，或許邏輯本身也可以解釋成为某种演算(至少在这里所說的数学中所用的邏輯方法是如此)，这是不奇怪的。

萊布尼茲 (Leibniz, 1646—1716) 第一个从事这样的尝試，他把維他和笛卡儿的字母演算的思想推广到他所建立的微积分学上

去,① 也推广到邏輯上去。然而在邏輯領域中萊布尼茲的思想对于这一科学的发展沒有发生重要的影响。19 世紀一些数学家和邏輯学家作了一系列的努力来建立邏輯代数,其中必須首先提到德·摩根(A. De Morgan, 1806—1878),布尔(G. Boole, 1815—1864),皮尔斯(Ch., S. Peirce, 1839—1914),习玉德(E. Schröder, 1841—1902),俄罗斯学者喀山数学家和邏輯学家波列茨基(П. С. Порецкий, 1846—1907)。但是只是在 20 世紀这些研究才受到眞正的注意,这时与数学基础的危机相联系,关于在数学基础中所容許的构造对象或者規定对象的手段,和命題证明的手段的問題便尖銳地突出出来了。

誠然,关于和数学基础的危机相联系的問題,塔尔斯基在他的书中几乎沒有談到;在书中沒有說明一系列数学基础原有的重要結果,例如,与形式化"語言"中"眞理性"概念相关的結果或与演繹理論的"无矛盾性"和"完全性"的各种定义相关的結果。他觉得它們对于通俗的叙述过于困难,而他屡次强調,他的书只是个引論。作为引論,这本书实在令人滿意。书的开端已經很好;一开始,作者就闡明数学中的值和数学中使用的变数方法,而且立即討論作为数学学科的特点的两种类型的公式:(1)命題函項,和(2)指示函項。也应当指出这种情形,就是作者成功地避免了在书中有过多的形式計算,而把相应的材料放到练习中去。当然,最后这一点是以讀者能够做出所有附在每一章后面的练习,包括那些对于演算工具的构造原則上很重要的問題为先决条件的。这些练习中的多

① 上面我們援引的恩格斯的話完全說出来是这样的:"笛卡儿的变数是数学中的轉折点。因此运动和辯证法便进入了数学,因此微分和积分也就立刻成为必要的了,而它們也就立刻产生出来,并且整个讲来它們是由牛頓和萊布尼茲完成的,而不是由他們发現的。"(《自然辯证法》,人民出版社,1955 年版,第 217 頁)

数是适当地选擇和表述出来的，它們是这样簡单，的确使得讀者能够独立地做出来。

在本书的哲学方面，情形就坏得多。作者在一系列的場合有着形而上学的，有时接近馬赫主义的、混乱的唯心主义的观点。所以，他强調在数学中不存在“变数”之类的对象，說它“不可能有任何确定的性质，例如它不是正数，也不是負数，也不等于零。或者說，x 的性质是随着情形不同而变化的；有时它可以是正数，但有时又可以是負数，有时又可以等于零。”在这个地方他以以下的話作結：“这样一种东西，在我們的現实世界中根本是找不着的。这样的东西如果存在于現实世界，那将会是違背我們思想的根本規律的。”(§1)結果：客观世界的規律为我們的思維規律所制約，这是露骨的唯心主义和形而上学的主張。因为，相反，在現实世界中一切在变化着和运动着；具有某种性质的对象会失掉这种性质；相反，沒有某种性质的对象也可以有这种性质；必須多研究具体材料，以便在变化中划分出稳定的、不变的东西，以便反映运动，然后再找出在变化中的不变的規律(規律就是稳定的东西)，等等。“如果不把不間断的东西割断，不使活生生的东西簡单化、粗糙化，不加以割碎，不使之僵化，那么我們就不能想像、表达、测量、描述运动。思維对运动的描述，总是粗糙化、僵化的。不仅思維是这样，而且感觉也是这样；不仅对运动是这样，而且对任何概念也都是这样。

这也是辯证法的本质。对立面的統一、同一这个公式正是表現着这个本质。”① 塔尔斯基的书的相当一部分內容事实上正是关于科学的概念和命题的“形式化”方法，其目的在使它們服从形式

① 列宁：《哲学笔記》人民出版社，1957年，第263頁。

邏輯的規律。閱讀这本书有时給人一种印象，似乎作者认为演繹理論的命題本身，完全自动地預先就服从这要求。誠然，在他的专門性著作中，我們沒有遇到这种情形。

塔尔斯基的哲学立場毕竟不是十分确定的。作为創造性地工作着的数学家，他有时自发地站在健康的唯物主义立場上。例如，他——当然，有保留地，并且也沒有指出姓名——反对罗素(Russell)有名的說法：在数学这种科学里，我們不知道我們在說什么，也不知道我們說的是否眞实。他写道："我們必須批判地看待这些判断……有时我們发展一种演繹理論而对于它的基本詞項不賦与任何固定的意义，这样就是将这些基本詞項看作变項；在这种情形之下，我們說我們将这一理論看作一种形式系統，但这是比較少見的情形（即使考虑到§36中对于演繹理論的一般刻划中所說的也是如此）。仅当对于这一理論的公理系統可能給以几种解釋时这种情形才会发生，也就是說，如果对于这一理論中的詞項可以有几种不同的方式賦与意义，而我們不願意特別着重任何一种时，才会发生。"(§38)

在某种程度內关于他对于邏輯的态度也可以这样說。一些現代的邏輯家从反动的資产阶級哲学和馬赫主义达到数理邏輯，①作者和这些邏輯家不同，他不把邏輯看成是任意的"語言"，而且认为邏輯不应当发生在任何內容丰富的科学理論之先。依照他的說法，他是用"邏輯"一詞来"称呼这样一种科学的，这种科学分析一切科学中共同的概念的意义，建立这些概念所服从的一般規律"与关于邏輯的对象或內容的問題相联系，他談到思維的規律，还談到在邏輯中我們一般不处理任何个别的概念（它們对应于性质和

① 例如卡尔納普(R. Carnap)就是这种人。

关系)或个别的对象。① 然而在书中关于这些問題我們沒有找到十分明确的东西。首先，哲学的基本問題——关于思維与存在之間的关系的問題，从而在思維规律和其中所反映的自然与社会的規律之間的关系的問題——仍然曖昧不明。数学与邏輯之間的关系問題也沒有对讀者說清楚。要知道，像“一”、“二”等这样一些概念能够用邏輯的詞項来表示，它們仍然是个別的概念(并未变成可以把任何的个別概念放到它們的位置上的变数)！此外，旣然主張：只要把无穷性公理包括在邏輯中，就可以把算术看成邏輯的一部分，那么甚至对讀者也会造成一种印象：这个問題本质上是无意义的，假如，依照定义，把数学的基本概念和公理包括在邏輯中，那么数学，或者至少是它的某一部分，自然将是邏輯的一部分。

这里我們不可能把我們认为需要批判或者詳述的地方一一細說。并且，大多数場合，这需要先熟悉书的正文。因此，在这些地方，編者认为給以附注比較妥当。这里我們只談一个具有原则意义的問題。

从辯证唯物主义观点看来，实踐不是在理論之外的某种东西。理論依賴于实踐，假如它不为实踐所证实，它就沒有意义。归根結底，只有一个眞理的标准——实踐的标准。假如形式邏輯的证明使我們相信数学命題的眞实性，那么这是由于借助于这样的证明，所給命題的眞实性归結为：(1)其它一些命題即被当作公理的那些命題的眞实性，所給命題的眞实性归根結底是由于这些命題的眞实性；及(2)在证明中所用的邏輯推論方法的正确性。两个問題都須由实踐来解决。列宁說：“人的实踐活动必須亿万次地使人的意識去重复各种不同的邏輯的格，以便这些格能够获得公理的意

① 在苏联学者波茨瓦尔(Д. А. Бочвар)手中，邏輯的这种了解成为解决邏輯的和集合論的諄論的有效方法。

义。"①

在另一个地方列宁写道："为我們的实踐所证实的是唯一的、最終的、客观的眞理。"②誠然，实踐的标准不是"僵硬的"，从列宁的观点看来，优点，而非缺点，正在于此，它保证科学无限发展的可能性。列宁說："当然，在这里不要忘記，——实踐标准实质上决不能完全地证实或駁倒人类的任何表象。这个标准也是这样的'不确定'，以便不至于使人的知識变成'絕对'，同时它又是这样的确定，以便同唯心主义和不可知論的一切变种进行无情的斗爭。"③

但是塔尔斯基的看法不是这样。讀到本书某些地方，使人不由得产生一种印象：对于作者，理論和实踐几乎是两极化的对立面，它們可以是互不相容的。如果有人想使我們相信：造永动机和魔桌布在"理論上"是很重要的，但是"可惜"，"实踐上"这不能实現，因为它違反能量守恒定律，对于这样的人我們說些什么？——显然，我們反对这种提出違反物理規律的方案的"理論"。

关于哥德尔(K. Gödel)的工作，作者写道，哥德尔的工作证明，要建立所有眞的算术命題都可用以证明的"形式系統"是不可能的。誠然，塔尔斯基并沒有由此做出什么明显的不可知論的結論来。他仅"限于"指出，用这一点就可以說明，为什么尽管完全性概念对于演繹理論有非常巨大的理論上的重要性，在实踐上它对于演繹理論的构造只发生很小的影响。然而他沒有談到哥德尔所指的是什么样的"完全性"。这个概念有各种不同的意义，各个意义都不仅可以用，而且事实上已經用上了，但是，他根本沒有談到这些不同的意义，尽管像已經指出来的，在这个領域中这个概念有一些有趣

① 列宁：《哲学笔記》，人民出版社 1956 年版，第 175—176 頁。

② 《列宁全集》第 14 卷，人民出版社 1957 年版，第 143 頁。

③ 《列宁全集》第 14 卷，人民出版社 1957 年版，第 142—143 頁。

的結果：其实，事情的实质在于，这里所指的是形式系統，形式系統只包括有穷个公理和推理規則，每个公理和推理規則由确定的、能行地实現的运算所构成。如果对"完全的"形式系統一語我們同时还作这样的理解：在其中所有用一定的詞項表示的命題，或者是被证明或者是被否证，那么这意味着，問題是关于工具的构造，理論上(和实踐上！)与之等价的能完全代替人的思維(应用到所討論的理論的命題上)的机器的构造。自然，任何一个馬克思列宁主义者不会想到反对創造任何能运算的机器，特別是运算繁重和令人厌倦的計算題的机器。然而他不会想到，也不会认为在实踐上无法实現的幻想的机器在"理論上是重要的"。①

我們要指出，关于演繹理論的无矛盾性和完全性在理論上的重要性，和它們在各种情形中（或对它們的不同的处理办法中）实际上实現的可能性，讀者在塔尔斯基的书中，无論如何，找不到充分的材料。这些問題的通俗說明实在也困难，而且每一項都要費不少的篇幅。我們只說一点，哥德尔定理并沒有使算术无矛盾性的一些证明，例如，我們在苏联数学家諾維科夫(П. С. Новиков)和干称(Gentzen)的著作中見到的证明，失去意义；再者，甚至证明对于不論那一个普通邏輯的"形式系統"都不可解的問題的存在的一些最抽象的結果也已經使人能够解决若干早已提出，然而迄今沒有解决的数学問題。② 自然，不言而喻，在这里理論与实踐处于

① 如果在某个时候以前还能认为数学学科与其它科学不同是由于：用数学科学語言表达的眞命題組成的整个无穷集合可以由确定的、預先列举出来的而且容易檢驗的規則，即从有穷个、甚至不多的通常取作公理的規則得到，那么現在我們知道，对于通常的算术，这些期望看起来是不可实現的。算术完全不应得到黑格尔給它的那种輕視，黑格尔以为在这門科学中思維能够被自动机代替，这种意見馬克思和恩格斯从来沒有同意过。現在这一点得到了证明，尤其是从算术对于邏輯問題和数学方法論問題的应用是富有意义的这一事实上得到了证明。

② 这一类的一系列問題已为苏联数学家馬尔科夫(А. А. Марков)所解决。

統一之中，而不是与实踐对立的。

作者指出“未来的邏輯学像所有理論科学一样，本质上依賴于人类政治的和社会的相互关系納入規范，”自然，他是正确的。

但是他以为，社会因素在职业学者的活动范圍之外，以及邏輯知識的傳佈可以自然而然地促进人們之間更好的相互了解，这一点他是錯誤的。美国反动集团使科学的进步服务于帝国主义侵略目的的企图再一次证实，在科学周圍和在科学之中尖銳的政治和意識形态的斗爭是不可避免的，在这个斗爭中学者們不可能始終是旁观者，而不无变成帝国主义和反动势力的帮凶的危險。

雅諾夫斯卡婭

初版序言

根据許多門外汉的意見，数学今天已經成为一門死科学：在达到不寻常的高度发展水平以后，它已經在一种严格的完全性中僵化了。这是对情况的一种完全錯誤的看法。在科学研究領域中現在很少有象数学那样經历着如此剧烈的发展阶段。而且，这种发展是极其多样化的：数学領域正在向一切可能的方向伸展，它在高、寬和深三方面都在成长着。它的高度在成长着，因为在数百年来（如果不是数千年以来的話）发展的旧的理論的土壤之上，新的問題不断地发生，而其所达到的結果越来越完全。它的寬度在成长着，因为它的方法滲透到其他各种科学部門中，而其研究的范圍日益囊括着越来越广泛的現象界，并且越来越多的新的理論被包括在数学学科的龐大的范域之中。最后，它的深度在成长着，因为它的基础日益坚定地被建立起来了，它的方法日益完备，它的原則日益巩固。

本书的目的就是要向那些对于現代数学有兴趣、而不曾实际参与它的工作的讀者們，至少在数学发展的第三个方面、即其在深度方面的成长提供一个最一般的观念。我的目的是要使讀者熟悉一种名为数理邏輯学科的最重要的概念，这門学科是为了把数学建立在更坚固、更深刻的基础上創造出来的；这一个学科，虽然它的存在只有短短的一个世紀，却已經达到了高度的完全性的水平，而且在我們的知識的总和中它今天所起的作用远远超越于其原定的范圍。我的目的是要表明，邏輯的一些概念滲透到数学的整体中，它把所有的专門的数学概念了解为特殊事例，并把邏輯規律恒

应用于——自觉的或不自觉的——数学推理之中。最后，我試图提出构造数学理論的一些最重要的原則——这些原則也构成另外一种学科、数学方法論的主題——并指明怎样在实际上着手应用这些原則。

在这一本相当小的书的范圍中，不假定讀者有任何专門的数学知識或抽象的推理的任何专門的訓练，要徹底地实現这全部計划是不容易的。在这一本书中，必須从头到尾力图把最大的可理解性和必要的簡明性以及經常注意避免錯誤或从科学观点看来的粗糙的不精确性結合起来。其所用的語言必須是尽可能少地脫离日常生活的語言。必須放棄使用专門的邏輯符号，虽然这种符号是使我們把簡明性和精确性結合起来，并使我們尽可能地排除含混和誤解的可能性、从而在一切精細的思考中具有很大用处的极其宝貴的工具。必須把系統地处理的观念从一开始就放棄掉。在出現的很多問題之中只有少数能够詳細地討論，其他一些問題仅仅肤淺地接触到，还有一些問題則完全忽略过去了，并且我意識到，所討論的題目的选擇不可避免地表現了或多或少的任意性。对于現代科学还沒有采取任何确定的态度，而是提出了許多可能的、同样正确的解答的那些事例，不可能客观地把所有已知的見解都提出来。不得不作出支持某一确定見解的决定来。当作出这种决定的时候，我是十分小心的，不是首先使之符合于个人的兴趣，而是宁取一种尽可能簡单的并且适合于普通表达方式的解法。

我并不幻想我已經成功地克服了这些以及其他一些困难。

序　　言

本书是我的《論数理邏輯和演繹方法》(該书 1936 年最初用波兰文出版，又于 1937 年出版了确切的德文譯本——书名是：《数理邏輯和数学方法論导論》)一书部分修正了的和扩充了的版本。最初写这本书，是企图把它当作一本通俗的科学著作；其目的是向受过相当教育的普通讀者提供——用把科学的严格性和最大的可理解性結合起来的方式——集中于現代邏輯的强大的現代思潮的一个清楚的观念。这个思潮最初是从多少受到局限的巩固数学基础的任务发生的。可是，在現阶段它却具有远为广泛的目的。因为它試图創造出可为人类知識的整体提供一种共同基础的統一的概念工具。此外，它有助于使演繹方法完全化和敏銳化，这种演繹方法在某些科学中被当作确立眞理的唯一的允許的方法，而且，的确，它至少在一切智力活动的領域內，是从被公认的假設中推导出結論来的必不可少的补助的工具。

根据对波兰文版和德文版的反应，特别是某些評論者的建議，产生了一个想法，要使这个新的版本不仅仅是一本通俗的科学著作，而且也是大学里的邏輯和演繹科学方法論的初級課程可以作为藍本的教科书。由于在这个范圍內合适的初級教科书相当缺乏，这一尝試就显得更为合适。

为了要进行这种尝試，必須在书中作某些改变。

在前几版中，把某些最基本的問題和概念完全忽略过去或仅仅略微触及，这或是由于它們比較地具有专門性，或是为了避免一些具有爭論性的論点。像这样一些題目，例如：在邏輯的有系統的

发展中和在日常生活的語言中某些邏輯观念的用法之間的区别，证明語句演算的規律的一般方法，語詞与其名字之間的明确区别的必要性，全类和空类的概念，关系运算的基本观念，以及最后，作为各科学的一般科学的方法論概念。在这一版中，所有这些題目都討論到了（虽然所有这些題目并非同等詳尽地討論了的），因为我似乎觉得在現代邏輯的任何一本教科书中，不談这些題目就会造成一种根本的缺陷。因此，本书前面的几章，即概論部分或多或少地扩展了；特别是第II章，即专門討論語句演算的一章包含着很多新材料。对于这几章我又补充了許多新的练习，并且增加了历史的綫索的資料。

在前几版中，专門符号的应用是縮減到最低限度，而在这一版中我以为有必要使讀者熟悉邏輯符号的基本知識。但是，实际上这种符号的应用仍然受到很大限制，并且大部分限定在练习中。

在前几版中，为了說明一般的和抽象的思考而引出例子的主要領域是中学数学；因为我过去和現在都认为，基本数学、特别是代数，由于它的概念的簡单性及其推論方法的一致性，特别适合于例证邏輯的和方法論性质的各种基本現象。但是，在这一版，特别是在新补充的篇幅中，我經常从其他領域、特别是从日常生活中举出了一些例子。

除了这些增补以外，凡是学习者們較难以掌握的某些部分我也都重新写过了。

本书的基本面貌仍然沒有改变。初版的序言（其主要部分重新发表在前面）将会为讀者提供一个本书的一般性的观念。然而，也許有必要在这里很清楚地指出来讀者在这本书中所找不到的是一些什么东西。

第一，本书不包括邏輯的、系統的和严格的演繹的陈述；这样

一种陈述显然不在一本基本的教科书的范圍之內。我原来企图在这一版中增加一章，名为作为演繹科学的邏輯，这一章——作为包含于第VI章中的一般方法論意見的一个說明——会为邏輯的某些基本部分的有系統的发展提供一个綱要。由于种种原因，这个企图未能实現；但是我希望包括在第VI章中的关于这个題目的几个新的练习在某种程度內将会补偿这个省略。

第二，除了两处很少的篇幅以外，这一本书沒有提供关于傳統的亚里士多德的邏輯的知識，并且不包含从之引伸出来的材料。但是，我相信这里給予傳統邏輯的篇幅是充分符合于它在現代科学中已經減低了的微小的作用的；而且我还相信我这个意見将会得到大多数現代邏輯学家的贊同。

最后，这一本书不涉及屬于所謂經驗科学的邏輯和方法論的任何問題。我必需說，我傾向于怀疑，作为与一般邏輯或“演繹科学的邏輯”相对立的任何特殊的“經驗科学的邏輯”究竟是否存在(至少，按照“邏輯”一詞在本书的用法——这就是說，它是一种学科的名称，这种学科分析一切科学所共有的一些概念的意义，并建立支配这些概念的一般規律)。但是这与其說是一个实际的問題，还不如說是一个术語的問題。总之，經驗科学的方法論构成科学研究的一个重要領域。当然，邏輯的知識在这种方法論的研究中，正如在任何其他学科中的情况一样，是宝貴的。可是，必須承认直到今天邏輯概念和方法在这个領域內并未得到任何特殊的或有成效的应用。并且至少这个情况可能不仅仅是現阶段方法論研究的一个后果。可能，这是由于下述情况所引起：为了对方法論作适当的論述，必須把經驗科学作为不仅仅是一种科学理論——就是說，作为按照某种規則所排列起来的确定的命題体系——而且是部分的由这样的命題和部分的由人类的活动所构成的复合物。

还必需补充說，与这种經驗科学本身的高度发展显著地相反，这些科学的方法論很难夸耀有相应的确定的成就——尽管已經作了很大的努力。甚至这个領域所涉及的初步概念澄清工作也还不曾进行得令人满意。因此，經驗科学的方法論課程必定具有一种有别于邏輯課程的完全不同的性质，而且它必定是大部分限于对試驗性的探索和失敗的努力的估价和批評。由于这些和其他一些理由，对于把邏輯和經驗科学方法論的討論結合于同一个大学課程之中，我认为很少合理的根据。

关于本书及其用作大学教科书的安排方面有几点說明。

本书区分为两部分。第一部分是邏輯和演繹科学方法論的一般的导論；第二部分，借助于一个具体的例子，表明邏輯和方法論在数学理論的构造中的一种应用方式，并因而为消化和深化在第一部分中所获得的知識提供一个机会。每一章的后面都附有相当的练习。簡明的历史的綫索写在脚注中。

記有星标“*”的部分、甚至于整节，不論記在开始或末尾，都包含着較难的材料，或者假定讀者已熟悉包含着这样的材料的其他篇章；省略掉这些部分对于本书以下一些部分的理解不会有什么妨碍。这也适用于凡在号碼前記上一个星标的各个练习。

本书包含着足够全年課程用的材料。不过，它的編排也使它同样适用于半年的課程。如果把它用为哲学系的半年邏輯課的課本，我建議学习整个第一部分、包括較难的部分在内，而完全略去第二部分。如果把本书用为数学系的半年課程——例如，数学基础課——的課本，我建議学习本书的两个部分，而略去較难的部分。

无論如何，我願意强調小心地和詳尽地作好练习的重要性；因为它們不仅有助于对所討論的概念和原則的消化，并且也还触及

正文中沒有机会討論的許多問題。

如果本书对于邏輯知識的更广泛的傳播有所貢献的話，我将感到很快乐。历史事件的进程已經使現代邏輯的一些最杰出的代表集中在这个国家（指美国——譯者），并因而为邏輯思想的发展在这儿創造了特別有利的条件。自然，这些有利的条件可能很易于为其他更强有力的因素所抵消。显然，未来的邏輯学，象所有理論科学一样，本质上依賴于人类政治的和社会的相互关系納入規范，因而依賴于一种超越于职业学者的控制的因素。我并不幻想邏輯思想的发展会对于人类关系的正常化过程特別起很重要的作用；但我相信，邏輯知識的广泛傳播可以积极地加速这个过程。因为，一方面，由于使概念的意义在其自身范圍內精确并一致起来，以及由于强調这样的精确性和一致性在任何其他领域中的必要性，邏輯就使凡是願意很好地了解的人們都可能彼此很好地了解。并且，另一方面，由于思想工具的完全化与敏銳化，它使人們更有批判性——因而他們就不大容易为所有伪推論引入歧途，現在在世界各处他們不断有被这种伪推論引入歧途的危險。

我衷心感謝海尔麦（O. Helmer）博士的帮助，他把德文版譯成了英文。我願意对于霍夫斯塔德泰尔（A. Hofstadter）博士、克拉德尔（L. K. Krader）先生、納盖（E. Nagel）教授、蒯恩（W. V. Quine）教授、怀特（M. G. White）先生、特別是麦克鏗賽（J. C. C. McKinsey）博士和溫納（P. P. Wiener）博士表示最热誠的感謝，当我准备英文版时，他們慷慨地提出了意見并給予帮助。我也感激阿罗（K. J. Arrow）先生，他帮助閱讀了校样。

塔尔斯基

1940 年 9 月于哈佛大学

本书是英文第一版的影印本，不可能在其中作很大的改动。

不过，印錯的地方已經改正了，并在細节方面作了一些改进。对于讀者和評論者的有益的建議，我表示感謝，我特别感激秦 (Louise H. Chin)女士，因为她帮助准备了这一版的出版。

塔尔斯基

1945 年 8 月于加里福尼亚大学，
貝克萊

目　录

第二部分　邏輯和方法論在构造数学理論中的应用

第一部分　邏輯的元素，演繹方法

(I)　論变項的用法

§1. 常項与变項

每一种科学理論都是許多語句組成的系統。这些語句都是被断定为眞的，可以叫做定律或断定了的命題，或者，就簡单地叫做命題。在数学中，这些語句都按照一些原則(在第 VI 章中将詳細討論这些原則)一个接着一个地排成确定的序列。在数学中，这些語句的正确性都要建立起来。建立語句的正确性，就叫做证明。被证明过的語句，就是我們所謂定理。

在数学的定理与证明中出現的語詞和符号，可以分为常項与变項。

例如在算术中，我們常碰到这样的語詞，如“数”，“零”(“0”)，“一”(“1”)，“加”(“+”)，…。① 这些語詞都是常項。它們都有确定的意义，而且在运用它們的过程中，它們的意义一直不变。

在算术中，我們习惯于将单个的英文的小写字母“a”，“b”，“c”，…，“x”，“y”，“z”用作变項。同常項相反，变項本身都是沒有

---

① “算术”这个詞，我們是用来表示数学中研究数的一般性质、数与数間的关系与数的运算的那个部分。特別是中学所讲的数学中，“算术”也常常叫做“代数”。我們在这里所以要用“算术”这个語詞，是因为在高等数学中，“代数”是用来表示关于代数方程式的理論的。(在这些年来“代数”这語詞又用成一个更寬的意义。它仍然是与“算术”的意义不同。)“数”这一語詞在这里总是用来表示数学中的实数，这就是說，数是包括正整数、分数、有理数、无理数、正数与負数，但却不包括虛数或复数。

意义的。对于下面的問題：

零是否有某一种性质？

例如：　　　　零是一正整数嗎？

我們是可以給以肯定的或否定的回答的。我們所給的答案可以对，也可以錯。但是，无論如何，这些問題是有意义的。但是，相反的，下面关于 x 的問題：

x 是一正整数嗎？

便是一无意义的問題，我們也不能給一有意义的回答。

在有些初等数学的教科书中，特别是較老的初等数学的教科书中，我們有时碰到一些表述，好像我們可以給这些变項以独立的意义似的。因此，就有人說："x"，"y"，…这些符号，也指示某些数或量；"x"，"y"，…虽然不是指示"常数"（"constant numbers"）（常数是由常項如"0"，"1"所指示的），但是它們却指示那些所謂"变数"（"variable numbers"）或"变量"（"variable quantities"）。这种說法是出于一种极大的誤解。"变数" x 不可能有任何确定的性质。例如，它不是正数，也不是負数，也不等于零。或者說，x 的性质是随着情形不同而变化的；有时它可以是正数，但有时又可以是負数，有时又可以等于零。这样一种东西，在我們的現实世界中根本是找不着的。这样的东西如果存在于現实世界，那将会是違背我們思想的根本規律的㊀。因此，将符号区分为常項与变項，并不表示在数方面也可以区分为常数与变数。

§2. 包含变項的表达式——語句函項与指示函項

由于变項本身是沒有意义的，所以，像

x 是一正整数

这样的一句話，也就不是語句，虽然它們具有語句的文法形式。它們并沒有表示一个确定的断定。因之，我們既不能肯定它們，也不能否定它們。我們用一个表示一个确定的数的常項来代换

x 是一正整数

中的"x"，只有这时，我們才能得到一个語句。例如我們用符号"1"去代换"x"，結果得到一眞語句；若用"$\frac{1}{2}$"去代换"x"，結果得到一假語句。这样的一个表达式，在这个表达式中包含有变項，同时如果用常項去代换这些变項，这个表达式便变成了一个語句——这样的一个表达式，我們将它叫做一个語句函項。这里顺便提到一下，数学家是不很喜欢用"語句函項"这个名詞的，因为他們把"函項"这詞用作另一个意义。他們較多地将"条件"(condition)这一語詞，用成我們所說的"函項"的意义。完全由数学符号(而不由日常語言中的語詞)所构成的語句函項与語句，例如，

$$x+y=5,$$

数学家常常叫它做公式。在不会引起誤解的地方，我們有时将"語句函項"簡单地就叫做"語句"。

在一个語句函項中的变項的作用，可以很恰当地比做塡空白題目中的那些括弧所形成的空白。正如只有当空白被我們塡上以后，題目才得到一个确定的內容一样，一个語句函項只有当变項都被常項所代换以后，才变成一个語句。在一个語句函項中，用常項去代换变項——相同的变項用相同的常項去代换——其結果可以得出一个眞語句；在这种情形下，我們就說，常項所表示的事物滿足这个特定的語句函項。例如 1，2 与 $2\frac{1}{2}$ 这几个数滿足下面这个語句函項：

$$x<3,$$

但是，3，4 与 $4\frac{1}{2}$ 这些数就不滿足这个語句函項。

除了語句函項，还有别的包含变項的表达式值得我們注意，那就是指示函項或摹状函項。一个指示函項或摹状函項是这样的表达式，如果将它所包含的变項換为常項，那么，它就变成一个指示詞或摹状詞，例如表达式：

$$2x+1$$

便是一个指示函項，因为，如果用一个任意的数值常項（即是說，表示一个数的常項，如“2”）去代換变項“x”，我們便得一指示詞（或摹状詞），此指示詞表示一个数（如5）。

在算术中所見的指示函項中，包括了所有的所謂代数式，这些代数式是由变項、数值常項与四种基本算术运算的符号所构成的，例如：

$$x-y,\qquad \frac{x+1}{y+2},\qquad 2(x+y-z)。$$

但是，另一方面，代数方程式，即是用“=”将两个代数式联起来而成的公式，却是語句函項。在数学中，关于方程式有一套习用的术語。在方程式中出現的变項，叫做未知数。那些能滿足这方程式的数，叫做这方程式的根。例如，在方程式：

$$x^2+6=5x$$

中，变項“x”是未知数，而数2，3是这方程式的根。

关于用于算术中的变項“x”，“y”，…，我們說它們代表那些表示数的指示詞，或者說，数是这些变項的值。这話的大意是說：如果用表示数的常項（而不是用表示数的运算的表达式，或表示数与数之間的关系的表达式，或在算术范圍之外的几何图形、动物、植物等等）㊀ 去代換一个包含“x”，“y”…这些符号的語句函項中的这些符号，那么，这个語句函項就变成語句。同样的，用于几何中的变項，是代表那些表示点与几何图形的指示詞。在算术中，我們