

www.docsriver.com 定制及广告服务　小飞鱼
更多广告合作及防失联联系方式在电脑端打开链接
http://www.docsriver.com/shop.php?id=3665

汉译世界学术名著丛书

# 科学与假设

[法]彭加勒著

汉译世界学术名著丛书

# 科学与假设

〔法〕彭加勒著

叶蕴理译



商务印书馆

1989年·北京

汉译世界学术名著丛书

**科 学 与 假 设**

〔法〕彭加勒 著 叶蕴理 译

商 务 印 书 馆 出 版

（北京王府井大街36号）

新华书店总店北京发行所发行

北京第二新华印刷厂印刷

ISBN 7-100-00521-3/B·64

1930年10月第1版
1957年10月重印新1版
1989年7月北京第5次印刷
印数 7,000 册

开本 850×1168 1/32
字数 117 千
印张 $5\,^1/_2$
插页 4

定价：3.05 元

www.docsriver.com 定制及广告服务　小飞鱼
更多广告合作及防失联联系方式在电脑端打开链接
http://www.docsriver.com/shop.php?id=3665

# 汉译世界学术名著丛书
## 出版说明

我馆历来重视移译世界各国学术名著。从五十年代起，更致力于翻译出版马克思主义诞生以前的古典学术著作，同时适当介绍当代具有定评的各派代表作品。幸赖著译界鼎力襄助，三十年来印行不下三百余种。我们确信只有用人类创造的全部知识财富来丰富自己的头脑，才能够建成现代化的社会主义社会。这些书籍所蕴藏的思想财富和学术价值，为学人所熟知，毋需赘述。这些译本过去以单行本印行，难见系统，汇编为丛书，才能相得益彰，蔚为大观，既便于研读查考，又利于文化积累。为此，我们从 1981 年至 1986 年先后分四辑印行了名著二百种。今后在积累单本著作的基础上将陆续以名著版印行。由于采用原纸型，译文未能重新校订，体例也不完全统一，凡是原来译本可用的序跋，都一仍其旧，个别序跋予以订正或删除。读书界完全懂得要用正确的分析态度去研读这些著作，汲取其对我有用的精华，剔除其不合时宜的糟粕，这一点也无需我们多说。希望海内外读书界、著译界给我们批评、建议，帮助我们把这套丛书出好。

商务印书馆编辑部

1987 年 2 月

# 目　　錄

# 導　言

大凡科学的眞理，对一位膚淺的观察者是無可怀疑的；科学的邏輯是永固的，至于学者們有时会犯錯誤，那是因为他們不知其中的規則。

一切数学的眞理，是用了一連串正确的推理从少数明顯的命题（proposition）推演出來的；不但是我們不得不服从这些眞理，就連那自然界本身亦复如是。它們好像能支配“造物者”，只許它在比較上很少的解答中能有所选擇。因此我們只要有一些經驗，便知道它所选的是什么。从每个經驗中，用一系列的数学演繹法便可推出許多的后果（consequence），也就是这样从每个后果我們才認識宇宙的一角。

这就是普通一般人，以及略知物理的中学生所想像的科学定理的來源。这就是他們怎样認識实驗和数学的作用。这也是百年前許多学者对这作用所懂得的，那时候，他們夢想借用愈少愈妙的实驗的材料，來說明世界的結構。

人們試略加思索，就可知假設（l'hypothèse）在科学中所占的位置；人們已知数学家既少不了它，而实驗家也少不了它。因此就生出一个疑問：所有这些建筑在假設上的学問是否堅固的，而人們認为它經不起一陣小風便要傾倒的。作这样的怀疑，还是膚淺的見解。怀疑一切，或信仰一切，都是很便利的兩种解答，因为兩者都可以使我們不用思索。

所以我們对于假設且慢粗淺地加以責难，应該細心審察它的作用；这样我們才能認識它不但是必需的东西，并且它往往是合法的了。我們將見假設可分几种，有的是可以証实的，并且一經实驗証明，就成为眞理的淵藪；有的不会遺誤我們，同时好处在能堅定我們的思想，最后有的只是貌似假設，其实不过是一种伪裝的公約(convention)或定义而已。

这最后的一种假設大半見于数学及其相关的科学。这些科学正因此而愈形眞确；这些公約是我們精神上一种自由活动的產品，它在这一种范圍里是無障碍的。在这里面我們的精神可以肯定，因为它能頒布法令；但要知道，这些法令僅可頒行于我們的科学中，沒有它們科学將变为不可能；它們不能支配自然界。然而，这些法令是否任意的？不，否則它們將不生效果了。实驗固然讓我們自由选擇，然同时又指示我們以最便利的路徑。所以我們的法令如同一專制聪明的太子，要諮詢参謀会議后才頒布的法令一样。

有人对于在有些科学的基本原則中，这一种自由的公約的特征，引为惊奇。他們曾經想过分地加以推廣，而同时忘却了自由非即任意之謂。因此他們就成立了所謂唯名主义(nominalisme)。他們自問道，学者是否即他所自造的定义的傀儡，而他所認为發現的世界是否簡直就是他的私意所創①。在这情形下，科学將或是确实的，但是缺少前途了。

果眞如此，則科学將必無能力了。但我們竟見其蒸蒸日上。它如不能使我們知道些实在的东西，这样是不可能的；但它所能达到的，并不是老实的教条主义者(dogmatiste)所想的事物的本身，这

① 参閱 M. Le Roy: Science et Philosophie (Revue de Métaphysique et de Morale, 1901.)

不过是物与物間的关系而已；除这种关系以外，再沒有可知的实在(la réalité)了。

这就是我們將來的結論，然为此我們必須从算術与几何談起，一直談到力学与实驗物理学。

数学推理的性質是什么？眞是我們通常所信为演繹的嗎？把它仔細分析一下，可知大为不然，它在某种范圍內却帶着归納推理的性質，其所以丰裕亦正在此。但它还保存着不少的絕对精密的性質；这是我們在开始就要說明的。

等到旣然弄明白数学交給研究者这一种工具之后，那时我們还要討論另一基本概念，就是数学量。这是我們可在自然界中找到的呢，抑或是我們所導引進去的呢？又，果眞是那后一情况，則我們会不会完全弄錯呢？試把我們感覚所得的粗鈍数据和那数学家理想中所称呼的極端复雜而微妙的数学量來比較，我們勢必承認一种分歧；所以我們想收罗万有的这个框子，原來是我們手創的；然而我們并未偶然做成它，我們可說曾經按照尺寸去做的，因此我們能收進事实，同时又能对事实的主要的东西不加改觀。

我們对于世界所支配的另一框子就是空間。几何的基本原理是从何而來？是邏輯学支配我們的嗎？罗巴切夫斯基創立了非欧几里得几何学以証明其不然。空間是否由我們的感官得來的？也不是，因为我們的感官所能揭示的，絕对与几何学家的空間不同。几何学是否來自經驗？深刻研究之后，可見不然。所以我們結論它的原理不过是一种公約；但不是任意的公約，現在如把它轉运到另一世界（我叫它非欧几里得世界，我并且要把它想出來），我們就得采用别的公約了。

在力学中，我們也將得到相似的結論，并且我們將知这种科学

的原則，虽然比較直接根据于实驗，但还含有几何公設(postulat)的公約性。到此为止，都还是唯名主义占着勝利，但現在我們且看眞正的物理学如何。这里情况改变了，我們遇見一些別的假設，并可見其何等的丰富。無疑地，表面看來，理論对我們好像是脆弱的，而它在科学史上，又每如曇花一現，但是它們也不能完全消滅，而每一理論总有所殘余。这殘余的东西，正是应当清理的，因为正是那兒而唯独那兒，才是眞正的实在哩。

物理学的方法是建設在归納上的，我們借此可知在先前發生过的外界某种境况畢具时，某現象必可重新發生。如**所有的**这些境况可以如数重現，則这条原理，就可以放心应用了，但这是从來沒有过的，其中总有些境况是缺少的。我們可以确信这是不重要的嗎？这顯然不是的。这也許似乎对的，但这不是确实一定的。由此見得概率(la probabilité)的概念在物理学上的作用，是何等的偉大了。所以概率的計算不僅是一种消遣和賭博者的引導，而我們应当深究其原理才行。关于这層，我只能給点很不完备的結果，因为这种使我們辨別眞相的空泛的本能很难加以分析。

我以为把物理学家工作的情形研究之后，还要說明他們工作的成績。因此我就在光学与电学的歷史中举了些例子。我們將知弗勒納耳(Fresnel)和麥克思韋(Maxwell)的理論何來，以及安培(Ampère)和那些創造这电动力学(électrodynamique)的学者引用了那一些不自覺的假設。

# 第一部 数与量

## 第一章 数学推理的性質

### 一

数学的科学的可能性本身好像是一种不可解决的矛盾。如果这种科学之为演繹不过是表面的，則它所有的这种嚴密而無疑的正确性何由而來的呢？反之，若說它的一切命題都可用形式邏輯的規則相互引出，則数学豈不变成一种龐大的重复語(tautologie)么？三段論不能告人以真正新穎的事物，且如所有必來自同一律(principe d'identité)，則所有亦必能归入其中。然則充滿許多書中的定理的陈述將不过是 $A$ 卽 $A$ 的各种弯轉的說法而已，这样說人們会同意嗎？

自然，所有的推理都可归根到几条公理(axiome)上，因这是所有推理的起源。假使有人断定这些推理不能化为矛盾律(principe de contradiction)，又如人們也不願認为是一些不能参加数学需要性的經驗事实，則人們还有可能把那些推理列入先驗的綜合判断(jugement synthètique a priori)之中。这样并非解决困难，不过加以洗礼而已。卽使到了綜合判断的性質对于我們不再神秘的时候，然而那矛盾仍不会消滅的，它不过退了一步。三段論推理对于給与它的数据仍是無所添加的，这些数据化为一些公理，而在

結論中人們决不能找到别的东西。

無論什么定理，如在它的証明中不参加新的公理，則必不是新的，推理只能借用直接的直覚法 (intuition) 給我們直接明顯的眞理；它好像只是一个寄生的中人，于是人們要不要問那所有三段論的工具是否單單用來遮蔽我們的借用品的？

我們随便展开一本数学書，便知道其中的矛盾令人更为惊奇；著者在每一頁里有推廣已知的命題的意圖。所以数学方法是否由特別而推及普遍，然則何以又說它是演繹的呢？

最后，如果数学是純粹分析的，或可由少数綜合判断分析出來的，則特殊聪明的人一眼就可能看出所有的眞理。再說吧，人們甚至可希望总有一天会發明一种簡單的言語，來叙述这些眞理；使得常人也能一目了然。

人們如不承認这些結果，就要知数学推理的本身有一种創造性，因此它与三段論实有区别。

兩者的区别应該是深刻的。譬如將兩相等数作同样的均勻运算，便有相同的結果，我們实在不能解釋这条常用規則的奧妙。

所有这些推理的形式，不問其可否归入眞正的三段論，总保有分析性，而其能力薄弱也正是这个緣故。

## 二

我們現在要討論的，已是很陈旧的問題了；賴布尼茲(Leibnitz)已經想証明二加二得四，我們試看他的証法如何。

我假定对数 1 已下定义，又知 $x+1$ 卽加一單位于給定数 $x$ 的运算。

这些定义，無論如何，与推理的進展沒有关系。

其次我对 2, 3 和 4 用下列等式規定:

(1) $1+1=2$,　　(2) $2+1=3$,　　(3) $3+1=4$,

同样,我用下列式規定 $x+2$

(4) $x+2=(x+1)+1$。

因此我們有:

| | |
|---|---|
| $2+2=(2+1)+1$, | (定义 4) |
| $(2+1)+1=3+1$, | (定义 2) |
| $3+1=4$, | (定义 3) |
| 所以: $2+2=4$。 | (即所欲証) |

我們不能否認这个推理是純分析的。但假使問数学家,他必答曰:“这不是眞的証明,这不过是一种核驗而已”。人們僅將这兩种純粹公約性的定义做了一种比較,才知道是相等的;至于新的东西,是一点沒有得到核驗(vérification)之所以不同于眞的証明,实因它是純粹分析的,是毫無效果的。其所以無效果,正因其結論只是三段論的兩前提 (prémisse) 之一种譯語而已。反之,眞正的証明是很丰富的,因为里面的結論在某种意义上是比較前提普遍的。

因此 $2+2=4$ 这个等式之所以能被核驗,只因它是特例而已。所有数学中的特別定理都可用这方法核驗。然而数学如竟成为这样的一串的核驗,那它將不成为科学了。例如下棋的人并不見得因为贏了一盤,就發明一种科学。唯有普遍性才成为科学。

人們甚至可說那些准确的科学的目的,正在于免去我們这种直接核驗的辛苦。

## 三

我們且看在工作时的几何家,而考察他們所用的方法。

这却不是容易的事；單單任意翻开一本書而分析其中某条証明，这是不够的。

由于几何学中的一些前提的作用以及空間概念的來源与性質等都是难题，我們先当撇开几何学。为了同一理由，我們也不能用到微積分学。我們要去找純粹的数学思想，也就是在算術中去找。

此外还要选擇一下；因为在数論最高深的部分，那原始的数学概念已受了極深的提鍊，以致难于分析它了。

所以要在算術的初部中，我們才可找到所要的解釋，然正是在最基本的定理証明中，顯出經典著作的作者用了最不精密而准确的手法。这是不可怪他們的；他們曾受一种必需的束縛，初学者还沒有眞正数学精密性的訓練；他們在那里可能只見到一些空洞的微妙；所以人們如在这上面苛求他們，那不过白費时間；他們要重新按部就班地快点学过的，而这种程序也就是那些科学建設者慢慢地經过了的。

为何要这样長的准备，才能慣于这种完善的精确性，而这好像是聪明人都当賦有的呢？这是一个邏輯与心理問題，大有考慮的价値。

然这是我們題外的事，可不贅述；为不失掉我們的目的，我們要把最基本的定理重新証明，且其形式不当是为免去那些初学者扫兴才粗淺的，而是能够滿足已有訓練的几何家的。

加法的定义——我假定对 $x+1$ 的运算，即將数 1 加在数 $x$ 上，已先下定义。

且这个定义，無論为何，对于推理的進展，是毫無作用的。

現在我要規定 $x+a$，就是把数 $a$ 加到数 $x$ 上的运算。

假定規定演算法：

$$x+(a-1)$$

則 $x+a$ 的算法可用下式規定:

$$(1)\qquad x+a=[x+(a-1)]+1。$$

所以我們如果知道何为 $x+(a-1)$,便知道何为 $x+a$,因为我在起初已假定人們知道何为 $x+1$,故 $x+2$, $x+3$ 等演算法人們也可陸續地用循环法(par récurrence)規定了。

这个定义値得注意一下,它有一种特別的性質,使它与純粹邏輯的定义已有所区別;事实上等式(1)包含無窮的不同的定义,其中每一定义必待已知前者之后才有意义。

加法的特性——結合性(associativité)——我說:

$$a+(b+c)=(a+b)+c。$$

盖 $c=1$ 时此定理是对的;因此可寫为:

$$a+(b+1)=(a+b)+1,$$

此式除符号差別外与上面規定加法的(1)式相同。

今如 $c=\gamma$ 时此定理仍眞,則 $c=\gamma+1$ 时此定理亦眞。

盖由　$$(a+b)+\gamma=a+(b+\gamma),$$

人們陸續引出:

$$[(a+b)+\gamma]+1=[a+(b+\gamma)]+1,$$

或照定义(1)有:

$$(a+b)+(\gamma+1)=a+(b+\gamma+1)=a+[b+(\gamma+1)],$$

由此可見用了一串純粹分析的演繹法,証明此定理对于 $\gamma+1$ 亦眞。

故 $c=1$ 时旣眞,則 $c=2$, $c=3$ 等等时,此定理也是眞实的。

可換性(commutativité)——(一)我說: $a+1=1+a$。

今如 $a=1$,則此定理顯然是眞的,人們再可用純粹分析的推

理來核驗如 $a=\gamma$ 时为眞，則 $a=\gamma+1$ 亦然；但 $a=1$ 时旣如此，則令 $a=2$，$a=3$ 等等，也应該如此；人們为表达这事，就說那命題是用循环法証明的。

(二)我說：

$$a+b=b+a。$$

此定理对 $b=1$ 已証明如上，人們再可用分析法核驗如它在 $b=\beta$ 时为眞，則 $b=\beta+1$ 时亦必如是。因此命題用循环法而成立。

乘法的定义——我們用下列等式來規定乘法：

$$a\times 1=a。$$

(2) $$a\times b=[a\times(b-1)]+a。$$

等式包含無数的定义；一如(1)式；今 $a\times 1$ 旣經規定，則此式亦可陸續規定 $a\times 2$，$a\times 3$ 等等。

乘法的特性——分配性(distributivité)——我說：

$$(a+b)\times c=(a\times c)+(b\times c)。$$

在 $c=1$ 时，人們用分析法檢驗此式之眞；其次檢驗如在 $c=\gamma$ 时定理为眞，則在 $c=\gamma+1$ 时它也是眞的。

这样我們的命題又是用循环法而証明了。

可換性——(一)我說：

$$a\times 1=1\times a。$$

在 $a=1$ 时此乃顯然的定理。

人們可用分析法証明如 $a=\alpha$ 时，此定理为眞，則 $a=\alpha+1$ 时它也是眞的。

(二)我說：

$$a\times b=b\times a。$$

在 $b=1$ 时，此定理已經証明。人們可用分析法核驗如 $b=\beta$ 时

为眞，則 $b=\beta+1$ 时亦眞。

## 四

我且把这一串單調的推理停止在这里罢。但正是这种單調最能把那一致而又步步碰到的方法，明白表示出來。

这就是循环証明法。人們先在 $n=1$ 时建立一个定理，然后指出如它在 $n-1$ 时为眞，則在 $n$ 时亦眞，于是人們結論它对任何整数也是眞实的。

剛才我們已經見过用这方法怎样証明加乘二法的規則，此即代数演算的規則；这种演算是轉变算式的工具，所得各种組合之多，远非單純三段論可比拟；但这仍是一种純粹分析的工具，它是不能告訴我們一点新东西的。假使数学此外再無別的工具，則在它的發展中很快就要停止；但是它可以重新运用同样的方法，就是所謂循环推理法(raisonnement par récurrence)，因此它仍可繼續前進了。

人們若能好好地留意，則可見步步都是这样的推理，而其形式或即如上文所說过簡單的，或則多少有所改变的。

这实在是最完善的数学推理，我們当再仔細的去研究它。

## 五

循环推理法的主要特性是在它能包含無数的三段論，而集中在可認为唯一的公式中。

欲明此理，且待我將这些三段論依次說明，它們的排列，讓我打个比方，有如瀑布直瀉下來。

这自然都是些假設的三段論。

已知在数 1 时定理为眞。

但如果对 1 为眞，則对 2 亦眞。

故它对 2 为眞。

但假使对 2 为眞，則对 3 亦眞。

故它对 3 为眞，余依此类推。

由此可見每一三段論的結論可做下一三段論的小前提。

且所有三段論的大前提都可化成唯一的公式。

这就是，如定理对 $n-1$ 为眞，則对 $n$ 时亦然。

可見在循环推理法中，人們僅限于陈述第一三段論的小前提，以及含有以一切大前提为特例的普遍公式。

因此这一串永無止尽的三段論可减縮成为几行的語詞。

現在可容易明白，有如我已說过的，何故某定理的特别結論可用純粹分析的方法去核驗。

我們如不去証明那定理对任何数时为眞，而只要指出好比对 6 为眞，那只証明要建立上述瀑布的前五条的三段論；但如我們要証明定理对 10 为眞，則需九条三段論；再大的数目，所需的条数更多；然此数無論如何大，我們終可达到目的，而这样分析的核驗总是可能的。

虽然，我們無論走得多远，我們終究不能得到一个适用于一切数目的普遍定理——只有它才能作为科学的目的。为此目的則非有無窮的三段論不成，这必須越过那僅僅依靠形式邏輯的分析家的忍耐力还永久塡不滿的深涯。

起初我曾問过，何以人們想不出一个足够神通的人，他会一眼看穿数学中所有的眞理。

現在这个問題是很容易回答的了；棋手能做四步五步的預算，

但是無論我們覺得他本領怎样大，他只能准备有限的数目；假使他把这种本事用在算術上，他就不能直接用直覺法看出那普遍的眞理；連为求到一最小的定理，他也必用循环法推想出來，因为这是从有限数到無窮数的推理工具。

这工具总是有益的，因其一方面能任我們的意思一躍而升進数級，一方面又能省却極無味而單調的冗長的核驗，并且这种核驗在事实上也很快地不能实踐的啊。然而遇到以普遍定理为目标时，这工具就成为不可少的了，因为用分析核驗法，虽不能允許我們达到普遍定理，但能使我們不断地接近它。

人們必定以为我們現在所談的算術范圍与微積分学相差太远了，但是剛才我們已知数学的“無窮”观念的重要作用，少了它便無科学，因为也沒有普遍的东西了。

## 六

循环推理所依据的判断还可用别的方式表示；例如在無窮个相异的整数中，我們可說必有一数較小于其他各数。

人們可很容易地由这一陈述推到另一陈述，而自觉貌似已經証明了循环推理的合法性。

但照这样做下去，人們終必被阻擋着，而必來到一个不可証明的公理，而这公理实卽待証的命題的另一說法罢了。

所以循环推理的規則，决不能变为矛盾原理，这是誰也不能否認的結論。

这条規則又不是从实驗上得來的；实驗所能告訴我們的，不过說这規則好比对数十或首先一百个数为眞，但不能推到一串無窮尽的数目上去；只能推到这一串数或多或少的但总是有限止的部

分。

但是，如所有的問題，只是这点，則用矛盾律已足济事，它可使我們推演無論多少的三段論，然其所以失敗，只在于想把無窮的三段論納入唯一的公式中，只在正对着無窮时，也正因此連經驗也無力量了。这条規則，旣非分析法所能証明，而又非經驗所能核驗的，正是先驗的綜合判断的实例。人們又决不可在这里好似对于少数几何的前提認为这是一种公約。

然則我們何故势必服从这种判断，有如金科玉律呢？原來这不过是表現精神力量之偉大，它能断定假使某种动作一次可能，則同一动作又可重复無窮次。精神对这种强大的力量具有一种直接的直覚，而經驗不过是給它一种利用的机会，因而能够有所領悟。

然有人說：如那粗糙的实驗不能証明循环推理之合法性，那么助以归納法的实驗，仍是一样嗎？我們陸續看到某定理对 1, 2, 3 等等数都眞的时候，于是我們可說那定律已顯然成立，正如那些以極多数但有限的观察为根据的一切物理学定律一样有效。

我們要認明其中有与通用的归納法酷似之处。然而也存在着主要的区別。应用在物理科学中的归納法总是不确实的，因它是建立在宇宙有普遍的程序的信仰上的，但这种程序是超人的。反之数学归納法或卽循环証明法是必然支配着我們的，因为它只是精神本身的一种特性的肯定啊。

## 七

我已經說过数学家極力想把他們所得的命題推廣起來，而我不必另找例子，就照剛才已証明的等式：

$$a+1=1+a,$$

其次我又曾用以求得等式：

$$a+b=b+a,$$

此式当然較为普遍。

所以数学也可像别的科学，从特殊推到普遍。

这件事在我們以前开始这个研究时，好像是不可了解的，然自剛才我們發現循环証明法和通用的归納法的相似点以后，我們就觉得其中再沒有什么神秘的了。

無疑地，数学的循环推理与物理的归納推理，兩者的基礎虽各有不同，但兩者的步趋，却是平行一致的，向一个方面走的，换一句話說，兩者都是从特殊推到普遍。

我們試再仔細地討論一下。

为要証明等式：

$$(1)\qquad a+2=2+a,$$

我們只需应用兩次下列規則：

$$a+1=1+a,$$

且演算如下：

$$(2)\quad a+2=a+1+1=1+a+1=1+1+a=2+a。$$

从(1)式用純粹分析的方法演繹出來的(2)式幷不是一簡單的特例：它是另一回事。

所以人們甚至不能說：在数学推理的眞正分析与演繹的部分是照普通的字义說由特殊而進于普遍的。

(2)式之兩边不过是(1)式之兩边較繁的組合，而分析的用处只是把其中的元素分开而研究它們相互的关系。

所以数学家用“建筑的方法”而“建筑”那些逐漸繁复的組合。他們再用分析的方法，从这些組合，从可說这些集合回到其中所含

的原始元素，他們乃知这些元素間的关系，而由此推想到这些集合本身間的关系。

这却是一种純粹的分析步驟，但这不是由普遍進于特殊的步趋，因那些集合当然不能認为比較元素更为特殊。

人們对于这种“建筑”的方法曾予以注意，这是很对的，而且人們認为这是准确科学進步的必需与充足的条件。

这个方法是必需的，不錯，若就以为充足了，那还不見得咧。

如要一种建筑是有益的，不是徒耗心血的，而且是可以助人向上的梯階，則第一要有一种統一性，使人不見其徒为元素的堆叠而已。

說一句正确的話，就是要使我們覚得考慮这种建筑品比較考慮它的各元素本身为有益。

这益处何在？

例如为什么对总是可以分成多数三角形的多边形來推想，而不对这些三角形去推理呢？

此因有任何数边的多边形有些特性是人們可以証明的，証明以后，人們便可直接应用此理于任何特別的多边形。

反之，若直接去研究那些由多边形分成的三角形間的关系，往往要費許多心力才能發現这些特性。倘若我們已知普遍定理，那就省力多了。

所以一建筑之有益与否，是在其能否与其他相似的建筑并列，成为同一种(genre)的各类。

假使說四边形不僅是兩个三角形的叠合物，那正因它是多边形的一种。

并且还要能够証明同一种的特性，而不必对每一类的特性一

一証明。

为要达到这步，則必須經过一級或多級的路程，从特殊升到普遍。

这种"用建筑"的分析法，幷不迫使我們从上面走下來，而讓我們站在同一的水平綫上。

我們只能用数学的归納法，才能上進，只有它才能告訴我們新鮮的事物。如果沒有那种在某些方面有别于物理归納法但同样有效的数学归納法的協助，則建筑就無力去創造科学了。

最后，請注意这种归納法的可能成立，全在于同一的演算可重复無窮次。所以棋戲决不能成为一种科学，因为同一盤棋各子的走法是不相同的。

## 第二章　数学量与实験

人們如要知道数学家的所謂連續統(un continum)究作何解，这是不应向几何学來提問的。几何家多少总要表現他所研究的圖形，然他的表象只是他的工具而已；他研究几何时，少不了要用廣延(etendue)对象等，正如他用粉筆來表示；所以人們对于那粉筆的画綫所生出來的小弯曲之無足輕重，正如他所用的粉筆之为白色一般。

至于純粹的分析家就不怕这个缺点。他把数学中一切与它無关的元素取出，而他能回答我們的問題：数学家所推想的那連續統，眞是什么呢？許多对本行会用心的数学家早已解答此題；譬如在丹勒利(J, Tannery)所著的"含一变数的函数論導引"(Introduction à la théorie des Fonctions d'une variable)一書中已可

見得了。

我們先自整数排列談起；今在二相續的整数中加入一个或多个的中間数，再在二相續的新数中加入中間数，如是依次类推以至無窮。由是乃得無窮的数項，此卽所謂分数，有理数，或可約数。然此尙不足；在这些已經是無窮的数項中，当再插入所謂無理数或不可約数。

在未更進一步以前，我們先要注意一事。就是这样想出來的連續統，不过是按着一定順序排列成的个体的集合，虽是無窮，但是彼此排斥的。这里不是普通观念，假定在連續統的元素之中有一种使成为整体的密切关系，認为不是点成立于綫之先，而是綫反先于点。从那著名的公律，卽連續統者，乃是多样性的統一，人僅見多样性存在，而不見統一。分析家照他們那样規定連續統也有他的道理，因为自从他們追求嚴密性，他們一直是站在那上面來推理的。然由此已可見眞正的数学的連續統实与物理家和形而上学家的連續統有天壤之別了。

人們也許說数学家倘僅以此定义为滿足，則無异做字的傀儡了，他們当詳細說明那中間数項究为何物，說明他們的插入法，幷且証明这样作是可能的。然这样便錯了，在他們的推理中，这些中間数項的唯一特性① 是在它們的前后排列的特性；所以也唯有这特性才可加入定义中。

因此人們可不必顧慮那些中間数項的插入的方式；另方面誰也不会怀疑这作法是可能的，除非忘記这最后字用几何家的話簡直就是無矛盾的意思。

① 以及包含在特別的公約中的特性，这些公約是用以規定加法的，而是以后要說的。

虽然，我們的定义尙未完善，我將在这長段插話之后补說。

不可約数的定义——柏林派数学家，特别是克龍勒克（M. Kronecker）先生，他毫不借用别的什么材料，只用整数來从事建設那分数和無理数的連續排列。照这样看來，数学的連續就將不过是精神的純粹創造品，与經驗毫不相干的了。

他們对于有理数的概念，似乎并無困难，他們主要極力想求出不可約数的定义。然在未介紹他們的定义以前，我当加一声明，以免那些不熟悉几何学家的習慣的讀者的惊奇。

数学家所研究的不是物（l'objet），而是物与物間的关系；只要物与物的关系不变，則物虽变易，他們也不关心。物質对他們是不重要的，使他們感兴趣的只是物的形式。

倘若人們不記得这事，就不会懂得杜德金（Dedekind）先生把不可約数用一种符号來表示，这与一般信为并且几乎可測量而可感数量观念，大不相同。

現在且看杜德金的定义是什么：

可約数可按照無窮的方法分为兩排，它的条件便是凡第一排的任何数必較大于第二排的任何数。

有时第一排中有一数較小于其他各数；例如將一切大于2和数2本身数排在第一排，又把一切小于2的数排入第二排，則顯然2是第一排的最小数，此理甚明。所以数2便可作为这种分配的符号。

反之，也許在第二排中有一数大于其他各数；例如將凡大于数2排入第一排，將2和一切小于2的数排入第二排。这里，数2还是可作为这种配置的符号。

然有时也許在第一排中，無一数小于其他各数，以及在第二排

中無一数大于其他各数。例如將平方較大于2的一切可約数排入第一排，將平方小于2的一切数排入第二排，大家知道这里沒有一个平方适为2的数。在第一排中顯然無一数小于其他各数，因为尽管某数的平方接近于2，人們总还可以找到別一个可約数，而其平方更接近于2的。

照杜德金的看法，不可約数 $\sqrt{2}$ 不过是可約数特別分配的式样的符号而已；而在每一分配的方式中，相应地必有一可約数或不可約数來做为符号。

但这就算滿足，那就未免太不顧到这些符号的來源了；此外尙須說明为什么人們会給这些符号一种具体的存在，而在另方面，对于分数不就开始有困难了嗎？如在事前，我們不知道一种可認为無窮尽分割的物質，亦卽一种連續統，則我們还会有这些数的概念嗎？

物理的連續統——人們到此就要問数学連續統的观念，是否簡單地由于实驗而來的。果然如是，則实驗的粗糙的数据——这就是我們的感覚——將是可被測量的了。人們可能相信这是对的，因为近年來有人努力去測量，并且还發明了一个定律，名曰費希勒(Fechner)定律，而根据这个定律感覚与刺激的对数成正比例。

然而我們如再仔細考察那定律所根据的实驗，則所得結論必將大为不然。例如人們覚得曾观察过10克重的 $A$ 物和11克重的 $B$ 物，兩者產生同一的感覚，而 $B$ 物的重量，在感覚上又無別于12克重的 $C$ 物，但人們对于重量 $A$ 与重量 $C$ 的差別就容易区別出來。所以实驗所得的粗糙的結果，可用下列关系表示：

$$A=B,\qquad B=C,\qquad A<C。$$

这些式子可認为物理的連續統的公式。

这里和矛盾律有一个嚴重的不符合，我們認为有消除这一困难的必要，因此才不得不發明数学的連續統來。

所以人們势必結論說这种观念是精神一手創造的，但这也是实驗所提供它的机会。

我們不能相信等于同一第三物的兩物会互不自相等的，正因此我們才來假定 $A$ 有别于 $B$，而 $B$ 有别于 $C$，但因我們感官的不灵，所以不能辨别它們。

数学連續統的創造——

第一階段——迄今为止，为說明事实起見，我們可能只要在 $A$ 与 $B$ 中任意插入少数保持离散的数項。我們如利用一种工具，來补助我們薄弱的感官，例如顯微鏡，那就怎样呢？剛才不能辨别的数 $A$ 和数 $B$ 兩項，現在对我們似有分别了；但在已經区别的 $A$ 与 $B$ 中將又加入新 $D$ 項，又無法把它來同 $A$ 和 $B$ 区别了。尽管用最改進的方法，那由实驗得來的粗糙結果总表示一种物理的連續統特性，同时帶着內在的矛盾。

非得在已經辨别出來的数項中，不断地插進新的数項，而且这个工作当無窮尽地繼續進行下去，我們才可避免那事。除非我們能想像一种極精密的仪器能把物理的連續統分成离散的元素，好比用天文鏡測視天河，分出無数的小星一样，否則我們不会想到要停止这种工作的。但我們不能理想到这个；因为我們总是靠感官來用仪器，譬如用眼睛窺視顯微鏡放大的物像，因此这种物像总含有一种視覚的性質，因而含有物理連續統的特性。

直接看到的一种長度，和經顯微鏡放大一倍的半長度是毫無分别的。全部的东西和它的部分是同質的，这又是一种新的矛盾，或者說是这样的，倘若数項是假定有限的；事实上因一部分所含的

数項顯然較少于全部，所以部分是不能和全部相似的。

一待数項認为無窮多，則矛盾消失；例如整数集合尽可認为与集合中的一部分的偶整数集合相似；事实上，每一整数对应着一偶整数，这偶整数即該整数的二倍。

但这不僅是为了避免这个含在实驗数据中的矛盾，精神才來用無限的数項來創造一連續統的概念。

此中情形正与剛才整数串連中發生的一样。我們有能力設想一單位可加入于一团的單位中；这完全是靠經驗，才使我們有机会練習这种能力，于是習慣成自然；但从这时起，我們覚得我們的权力是無限的，且可無窮地数下去，虽然我們所数的一向只是有限数的东西。

同样，一等我們在一級数中的相續的兩数中插入平均数，我們就覚得这种工作可以繼續至于無窮，且可說毫無內稟的理由足以使我們停止的。

为言語簡便起見，且讓我規定凡是按照可約数的排列定律所組成的整个数項集合叫做第一級的数学的連續統。今如在那里面再按照不可約数的組成定律，插入新数項，則我們可得所謂第二級数学的連續統。

第二階段——我們还只走了第一步；我們已經說明一些第一級連續統的來源；然現在要知道何以那些还不足，而何以要發明不可約数。

人們試想像一根綫，它便不得不含有物理的連續統的特征，就是說須联想到那根綫具有一定寬度才能把它表象出來。所以兩綫就好像是兩条很窄的帶子，且如滿足于这样粗糙的想像，則顯然兩綫交叉时，必有公共占据的一部分。

然而純粹几何家作了更大的努力：他虽一方面不全然脫离感官的帮助，然他想达到一种無寬狹的綫，与無大小的点的概念。为此目的他只有把綫認为漸形收窄的最后限度，点是面積漸形縮小的最后限度。所以我們那兩条交叉的綫，無論怎样細而窄，总有一共同的面積，条子愈細，面積愈小，而它的限度卽几何家所謂点子。

因此之故，人們說兩綫相交必有一共同点，而这个眞理似乎是直觉的了。

然如人們把綫看作第一級連續統，卽如在几何家所画的綫上只有用有理数的坐标的点子，則这个眞理未免含有矛盾了。这个矛盾將是很明顯的，如人們肯定圓与直綫的存在。

事实上，顯然地，如只認以可約数为坐标的点子是实在的，則內切于正方形的圓和这正方形的对角綫將不能相交，因为相交点的坐标是不可約数。

这样还不够，因为这里僅有少数是不可約数，而非完全是不可約数。

今試把一直綫分为二条半直綫。每一半直綫可認为一定寬的条子；則这兩条子互相搭叠，因在它們之間不应有間隙。它們的共同部分可認为一点，倘若我們理想那条綫愈縮愈細，以至把它分作兩截时，它們的共同交接点，仍只一点，这差不多是直觉的眞理；这里我們就遇到克龍勒克先生的观念了；他認为凡一不可約数可视为兩排有理数的共同交界。

这就是第二級連續統的來源，它是眞正的数学連續統(le continu mathématique)。

撮要——撮要言之，精神有創造符号的能力，因此它能建設数学的連續統，而这不过是一些符号的特别系統而已。只是为了免

去一切矛盾，它的权力才是有限制的；然精神如無經驗給它以理由，則也不会用它的。

在我們所討論的情形中，这种理由就是从感官的粗糙的数据中引出的物理連續統（le continu physique）的概念。但这概念未免牽及許多矛盾，而是要依次免除的。因此我們勢必想出漸趋繁复的符号系統。至今，我們所說到的系統，不僅無內在的矛盾——这正如上面我們已經过的各階段一样——且与那些所謂直覚的命題不生矛盾，这些直覚的命題是从多少經过提鍊的經驗的概念中引出來的。

可量的数量——迄今为止，我們所研究的量都是不可測量的；固然，我們能說这量比那量或大或小，然不能說到底大几倍或小几倍。

事实上，至今我只研究了数項排列的順序。然在应用上这是不够的。我們要学習來比較任何二数項間的間隔。必須有了这个条件，連續統才变成可量的数量，而算術的运算也就可应用上去了。

这事又非有一种新的与特别的公約帮助不成。人們將公認在 $A$ 和 $B$ 兩数項間的間隔等于 $C$ 和 $D$ 兩項間的間隔。例如我們曾在上文以整数級排列为起点，又曾假定在相繼的兩項之間夾以几个中間項；那么这些新数項照公約將認为等距离的了。

这里是对兩数量的加法下定义的方式；因为假使照定义 $AB$ 間隔等于 $CD$ 間隔，則 $AD$ 間隔照定义將是 $AB$ 加 $CD$ 之和。

这个定义是大有任意性的。但也不完全是的。因它服从某种条件，例如它服从加法的結合律与可换律。然只要所选定的定义适合这些定律，則选擇就無所謂，而無庸去把它十分明确化了。

各种注意——我們可以提出几条重要的問題來討論。

一、精神的創造力是否由于数学的連續統的發現而告竭尽了呢？

不；斗布哇乃蒙(Du Bois-Reymond)先生的著作明顯地証明了这点。

大家知道数学家能区别各級的無窮小，第二級的無窮小不特是絕对的無窮小，且对于第一級無窮小也是無窮小的。我們不难想像一种分数級的甚或無理数級的無窮小，于是我們又尋得数学的連續統的尺度，而这正是我們在前几頁所討論的对象。

但还有别的事情哩。有些無窮小对于第一級無窮小是無窮小，但对于第 $1+\varepsilon$ 級的無窮小，反而是無窮大，不問 $\varepsilon$ 小得如何。这就是在級数中我們插進的新数項，且如照剛才我所用过的虽不大通行但还方便的言語，我可說人們又創造了一种第三級連續統了。

我們本不难追求下去，但將是無謂的精神玩意兒；且想出來的符号，將無应用之可能，而無人要去注意的。由討論各級無窮小而引出的第三級連續統本身已少实用而無地盤，而几何学家对它不过認为是一种簡單的好奇而已。人們的精神受經驗的必要性的支配，才施展他的創造技能。

二、既有数学的連續統的概念之后，人們就可免去有如產生这概念的矛盾否？

不，讓我來举例說明。

必須是很通博的人才覺得凡是曲綫不必顯然要有一切綫。事实上，如果人們認为曲綫和直綫是極細的兩条帶子，人們总可使它們有一共同的小部分碰到而不相交。然后我們再想像这兩条帶子縮小以至于無窮細，則二者共同的部分永远可以存在，等到了可說

是到某限度时，这兩条綫只有一共同点而不相交，就是說兩綫只是相接触。

假使几何家作这样的推想，不問其有心或無心，將与上面我們已証明兩綫相交只得一点的道理实在相同，而他的直觉似乎也是合法的。

但这也許就是騙他的。人們可以証明有些曲綫并無切綫，倘若这綫是規定为第二級分析的連續統。

無疑地，用像我們上面研究过的巧法子，或亦可免除矛盾；但这种矛盾旣然只有在特别情形中才碰到，大家便不管它了。与其設法把直觉与分析調和起來，人們寧願牺牲其一，而分析数学旣是嚴密的学問，人們便归罪于直觉法了。

多維的物理連續統——在上面我曾研究过由我們感官的直接数据或即由費氏的实驗的粗糙的結果生出來的物理連續統；我并已証明那些結果是总結在矛盾的公式中：

$$A=B, \qquad B=C, \qquad A<C。$$

現在我們看这个概念是怎样推廣的，并如何能由此生出多維的連續統的概念。

設有任何兩团的感觉。或者我們可加以辨別，或者我們不能辨別，有如在費氏实驗中十二克的重量可別于十克的重量，但不能別于十一克的。我不必用別的东西來建設多維的連續統。

今試把各团的感觉叫做“元素”(élément)。这与数学家的点相仿佛；但这也不是完全相同的东西。我們不能說这元素是無大小的，因为我們不能把它和鄰近的元素区別。因此它似乎被包圍在云霧里一般。拿天文学作比，我們的“元素”就如星云，而数学上的点子就如星星一般了。